

# クエット系におけるパッシブ粒子対の不安定周期流解析

京大・工 田谷貴男 (Takao TAYA)  
京大・工 木田重雄 (Shigeo KIDA)

## 1 はじめに

乱流の強い混合・拡散という性質の定量化として、流体粒子の集合からなる線素や曲線や曲面の変形を調べる方法がある。乱流中の線素や面素の変形の研究は、Batchelor[1] の先駆的論文にはじまり、線素は指数関数的に伸長されることが示された。この性質は、近年の計算機の発達にともない数値的にも確かめられている [2][3]。Kida & Goto [4] は無限小線素ではなく有限長さの曲線の追跡を行い、流体線の真の伸長率を求めている。これらは、一様等方乱流での流体線の伸長についてであるが、最近では塚原と河村 [5] によるチャンネル乱流での流体線の伸長についての報告もある。本稿では、混合が異なる流体の境界面の変形で理解されることから、線素や流体線の挙動と流れ場との関係を解析し、境界面の変形の解析の足掛かりとする。

線素や流体線を流す流れ場として、クエット系を採用する。クエット系とは、互いに反対方向に一定の速さで運動する 2 枚の平行な平板間の流れであるが、レイノルズ数がある臨界値より大きい場合には、乱流状態が維持されることが知られている。このクエット系流れの数値計算では、通常、平板の運動方向と平板面内に周期条件が流れに課される。レイノルズ数が臨界値より大きくても、この周期条件の周期がある臨界値より大きくなければ乱流は維持されない。この最小の周期をもつ流れをミニマル流という。クエット系の乱流の代表的な組織構造として、流れ方向渦と低速ストリークが知られている。Hamilton *et al.* (1995) は、クエット系のミニマル流の数値シミュレーションにおいて、これら 2 つの組織構造が互いに影響しあいながら、生成消滅を繰り返すことを示した。この乱流はほぼ周期的に変動するが、厳密に同じ状態に戻ることはない。Kawahara & Kida (2001) は、Hamilton *et al.* (1995) の数値シミュレーションと全く同じ条件のもとで、厳密に周期的に変動する流れを発見し、それが乱流とほぼ同様の時空間変化を示すことを示した。本稿では、この周期流に線素や流体線を流してその挙動を探る。

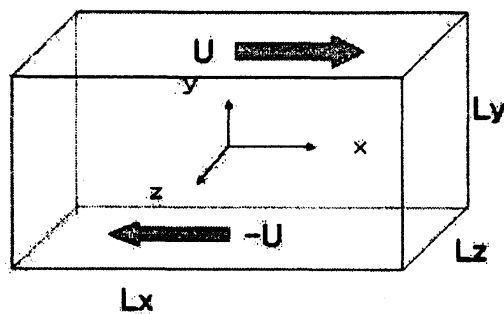


図 1: クエット系の座標系. 距離  $2h$  だけ離れて互いに反対方向に同じ速さ  $U$  で運動する 2 つの平行平板間の流れを考える.

## 2 クエット系

図1に示すように、距離  $2h$  だけ離れ互いに反対方向に速さ  $U$  で運動している平行な平板の間の流れを考える。流体の動粘性係数を  $\nu$  とすると、この系の流れは、レイノルズ数  $Re = Uh/\nu$  が約 320 より大きいと乱流状態の維持されることが知られている。

さていま、流れは平板の運動方向とそれに垂直な方向にそれぞれ周期  $L_x$  と  $L_z$  で周期的とし、平板上では粘着条件が満たされているとする。Hamilton *et al.* (1995) は、 $L_x = 5.513h$ ,  $L_z = 3.770h$ ,  $Re = 400$  とした数値シミュレーションを行ない、上述の定常乱流を実現した。その後、Kawahara & Kida (2001) は、Hamilton *et al.* (1995) と同じ条件のもとで乱流状態と同じふるまいを示す周期流を得た。計算はスペクトル法で行ない、 $x$  方向と  $z$  方向にはいずれもモード数 16 のフーリエ展開、また平板に垂直方向にはモード数 32 のチェビシェフ多項式展開を用いた。流れの運動方程式の時間積分は、非線形項に2次のアダムス - バッシュフォース法、粘性項にクランク - ニコルソン法を適用し、時間きざみを  $\Delta t = 0.001h/U$  として実行した。ここでは、解析の便宜上、レイノルズ数は  $Re = 400$  と同じであるが、空間周期をそれぞれ  $L_x = 5.6h$  および  $L_z = 3.8h$  に選んで、Kawahara & Kida (2001) の周期流に接続する周期流(周期を  $T$  とする)を求めた。以下では、この新しい周期流に流される短い線(線素という)のふるまいを調べる。

## 3 線素と流体線の挙動

乱流中で物質は激しくかき混ぜられる。この混合のメカニズムを明らかにすることを目標にして、受動的に流される線素や流体線が流れのどのような構造によって、どのように変形され輸送されるかを調べる。

### 3.1 線素の方向の整列

一般に線素は流されながら方向を変える。位置も方向も初期条件に依存して異なる。線素の平均伸長率が正である乱流中では、同じ位置から出発した線素の方向は急速にそろってくる。ここでは、乱流と同じく線素の平均伸長率が正である不安定周期流における線素の方向について議論する。

受動的に流される線素の方向がどれくらい早くそろうかを定量的に測るために、次のような直接数値シミュレーションを行なう。与えられた基準粒子からある基準長  $d (\ll h)$  だけ離れ、方向をランダムに多数のテスト粒子を分布させ、これらの運動を追跡する。テスト粒子は、数値積分の各ステップで、基準粒子からの方向は変えないで、基準粒子からの距離を基準長に戻す操作を行なう。各テスト粒子の基準長からの  $x, y, z$  軸への方向余弦の分布の散らばりの大きさを見積もる。図2は、ある基準粒子について方向余弦の標準偏差  $\sigma$  の時間変化を示す。テスト粒子の方向が完全にランダムに分布している場合には、この値は  $\sqrt{3}/2$  になるが、確かに  $t = 0$  ではそのようになっている。方向のちらばりの大きさは時間とともに、ほぼ指数関数的に減少している。周期流の時間周期の3倍程度たつと、散らばりの大きさは0.001程度になる。

以上の粒子対の方向のちらばりの計算を、流れ場に一樣に分布させた1400個の基準粒子について行なう。それぞれの基準粒子について、そのまわりに1000個のテスト粒子を配置し、それらの基準粒子からの相対位置の方向余弦の標準偏差が、0.1, 0.01, 0.001あるいは0.0001以下であ

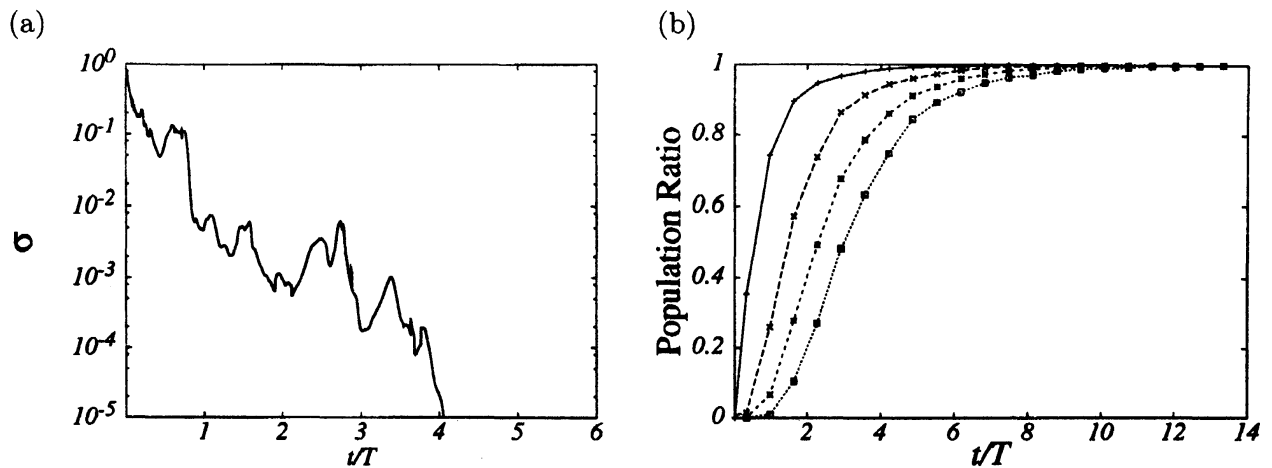


図 2: 粒子対の方向の整列. (a) 初期時刻に位置 (2.8, 0.75, 1.5) から出発した 1000 個の粒子対の方向ベクトルの方向余弦の標準偏差の時間変化. (b) 初期に多くの粒子対をランダムな方向で不安定周期流中に均一分布させる. 方向余弦の標準偏差が 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 以下になる粒子対の割合をそれぞれ —, ---, ···, ····· で表す.

る基準粒子の割合の時間変化を図 2 に示す. この図から, 不安定周期流中を同一の点から出発して受動的に流れる線素の方向は, 周期の数倍程度の時間が経過すれば, 初期条件によらず, 整列するといえる.

### 3.2 線素の方向分布

線素の方向が場所によってどのような方向を向くかを調べるために, 図 1 の基本周期箱を辺の長さ  $0.1h$  の立方体に区切り, 系全体に 5320 個の線素を流し, 各立方体の中に入った線素の方向の確率分布を調べる. 不安定周期流では, 周期ごとに全く同じ状態が繰り返されるので, 各時間位相ごとに各立方体に入る線素の数は, 数値シミュレーションの計算時間に比例して増大する. 線素の方向は単位球面上の点で表される. 方向ベクトルの  $x, y, z$  成分 ( $x, y, z$  は図 1 のクエット系での座標系) をそれぞれ  $l_x, l_y, l_z$  とし, 行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \overline{l_x^2} & \overline{l_x l_y} & \overline{l_x l_z} \\ \overline{l_x l_y} & \overline{l_y^2} & \overline{l_y l_z} \\ \overline{l_x l_z} & \overline{l_y l_z} & \overline{l_z^2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

を考える. ここで上線は, 箱の中での平均を表す. このとき,  $\mathbf{A}$  の固有値は, 方向ベクトルの個数密度を 2 次形式で表したとき, 対応する主軸の長さの 2 乗になり, 固有ベクトルが主軸の方向となる. 座標系を図 3(a) のように, 3 つの固有ベクトルの方向に, 対応する固有値の大きい順に,  $x_1, x_2, x_3$  軸をとる.

この固有ベクトル座標系では, 線素の方向ベクトルの分布の 2 次形式近似の空間対称性から, 第 1 象限 ( $x_1, x_2, x_3 > 0$ ) のみで分布の議論をしても一般性を失わない. さていま仮に, 線素

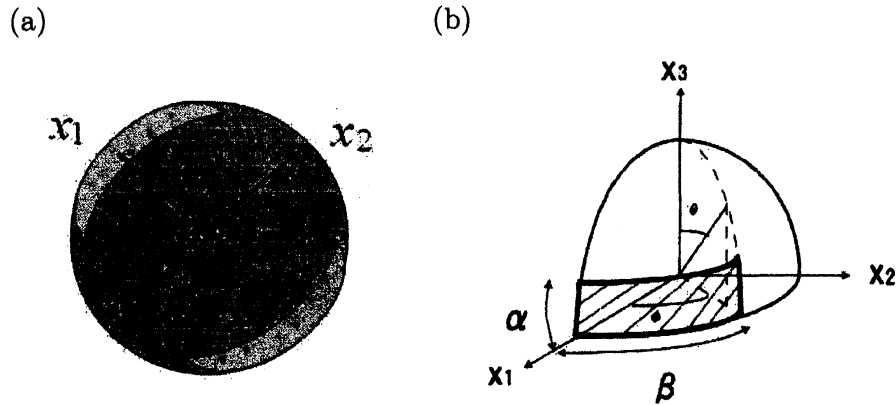


図 3: パッシブベクトルの方向分布の評価. (a) 図 1 の基本周期箱を分割した一辺  $0.1h$  の立方体内の線素の方向の分布を 2 次形式の楕円体で表し, 1 番長い軸を  $x_1$ , 2 番目を  $x_2$ , 一番短い軸を  $x_3$  とする座標系をとる. (b) 線素の方向の分布を図のように,  $\alpha$  と  $\beta$  を二辺とする矩形の領域の一樣分布と比較する.

の方向ベクトル  $(\theta, \phi)$  から, ある  $(\alpha, \beta)$  (ただし  $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$ ) の角度に対して,  $\pi/2 - \alpha \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \beta$  の範囲に一樣分布しているとする. このとき, 式 (1) の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ) は

$$\lambda_1 = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) \left( \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\beta \right), \quad (2)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) \left( \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\beta \right), \quad (3)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \quad (4)$$

と表される.

式 (2), (4) から求めた  $\alpha, \beta$  の確率分布は図 4 のようになる. 等高線は, 確率密度が高い順に並べたときの上位 30%, 50%, 70%, 90% の境界である. 上位 90% の立方体では  $\beta$  がさまざまな値をとり,  $\alpha$  が  $20^\circ$  以下なので, 線素の方向の集合は, ほぼある平面上に分布する確率が高いことがわかる.

次に, この平面の方向と流れ場の構造との関係を調べる. 平面に垂直なベクトル (図 3(b) の  $x_3$  方向)  $l_\perp$  と, 立方体の中心での渦度ベクトルとの内積の確率密度関数を図 4 に示す. この図から,  $l_\perp$  は渦度ベクトルと垂直な方向を向く, つまり渦度ベクトルは線素の分布する平面状にある確率が高いことがわかる.

### 3.3 流体線と流れ場との関係

前節で  $l_\perp$  が渦度ベクトルと垂直な方向を向くという結果が得られた. この結果を物理的に理解するために, 線素をつないだ流体線のふるまいについて調べる.

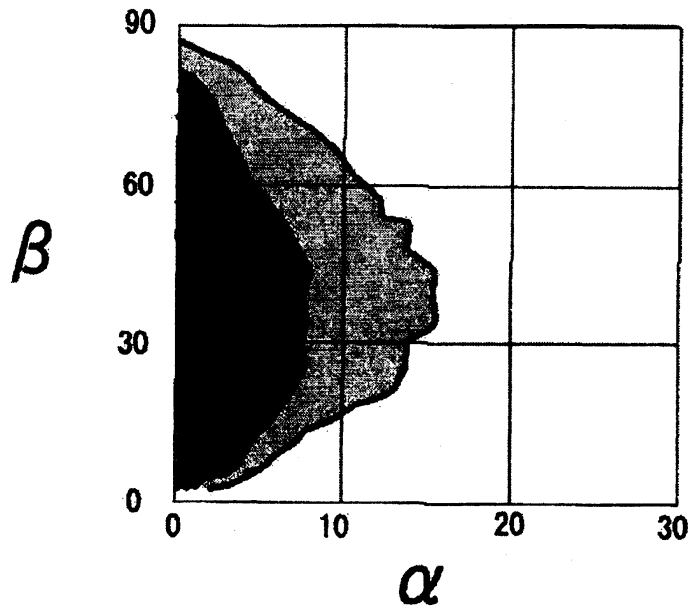


図 4: 線素の方向の球面上での角度の分布. 確率密度が高い順に並べたときの上位 30%, 50%, 70%, 90% の境界線を示す.  $t = 0.7T$ .

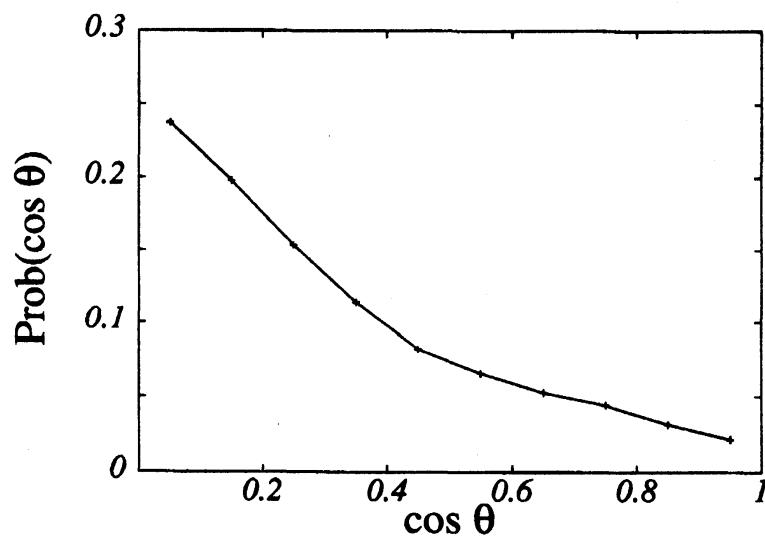


図 5:  $l_{\perp}$  と  $\omega$  (渦度) の内積の確率密度関数.  $-0.5h \leq y \leq 0.5h$ ,  $t = 0.7T$ .

線素が引き伸ばされてあるしきい値(ここでは $0.01h$ )を越えたときは, その線素の midpoint をとって2つに分割する. 線素の方向が初期の方向に依存せずに整列したといえる時間帯( $t = 7.7T$ )における流体線と, 圧力ラプラシアンで可視化した縦渦を図6に示す. 縦渦に巻きついている流体線に注目する. 縦渦の渦度ベクトルと流体線が一番折れ曲がっている部分での $\perp$ と垂直になっている.

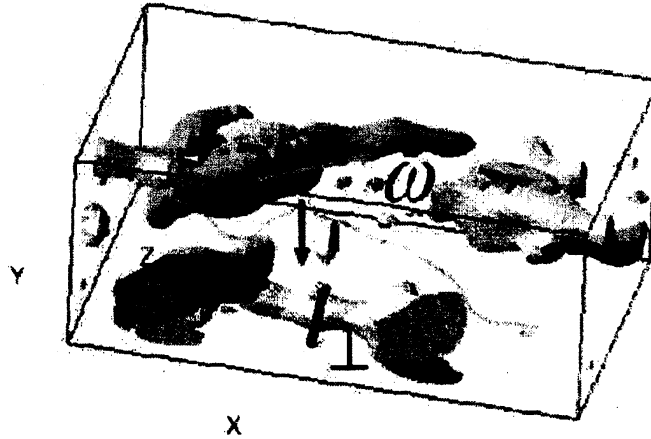


図6: 流体線の縦渦による巻き込み. 流体線と圧力ラプラシアンの等値面(閾値は $0.11\rho U^2/h^2$ )を示す. 濃(または淡)灰色の等値面の内部では, 渦度が $x$ 軸の正(または負)の方向に向いている.  $t = 7.7T$ .

#### 4 まとめ

クエット乱流の特性をよく表す不安定周期流に多数の線素と流体線を流し, そのふるまいと流れ場との関係を調べ, 次のことを明らかにした. まず, ある時刻に, 方向の異なる2つの線素を同じ位置に放つと, 時間の経過とともに, これらの線素の向きは急速にそろってくる. この線素の向きの整列は周期流の3周期程度で完了する. 次に, 線素を長さ $0.1h$ の立方体のスケールで見ると, 線素はほぼ平面上に存在し, この平面に垂直な方向ベクトルは渦度に垂直な方向を向く. このことは, 縦渦による流体線の巻き込みに対応している.

乱流の特性をよく表す不安定周期流による乱流力学の解析研究は始まったばかりである. 再現性のある周期流を用いた乱流拡散や混合, 渦構造の生成消滅のメカニズムの解明が期待される.

#### 参考文献

- [1] Batchelor, G.K., *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **213**, 349–366 (1952).
- [2] Girimaji, S.S., Pope, S.B., *J. Fluid Mech.* **220**, 427–458 (1990).
- [3] Huang, M.-J., *Phys. fluids* **8**, 2203–2214 (1996).
- [4] Kida, S., Goto, S., *Phys. fluids* **287**, 352–361 (2002).
- [5] 塚原隆裕, 河村洋, 日本流体力学会誌「ながれ」 **24**, 609–618 (2005).
- [6] Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F., *J. Fluid Mech.* **287**, 317–348 (1995).
- [7] Kawahara, G. and Kida, S., *J. Fluid Mech.* **449**, 291–300 (2001).