数理解析研究所講究録
第 1568 巻 2007 年 115-119

$k(u_1,\ldots,u_\ell)[x]$ における拡張 Hensel 構成

小副川 健 (Takeshi Osoekawa)*
筑波大学 数理物質科学研究科
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

拡張 Hensel 構成は、展開点として特異点を選んでも計算できるように Hensel 構成を拡張した算法である [Kuo89],[SK99]。本稿では拡張 Hensel 構成を多変数有理関数を係数に持つような多項式に対しても適用できるように算法を拡張する。

1 多変数多項式に対する拡張 Hensel 構成

本稿の目標は拡張 Hensel 構成を有理関数係数の多項式へ適用できるようにすることだが、算法そのものは多変数多項式用の算法を直線的に拡張して得られる。本章でまず多項式用算法を説明する。

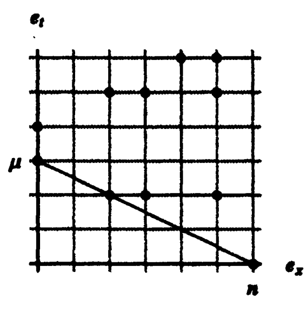
ℓ を自然数とし、$x,u_1,\ldots,u_\ell$ を不定元とする。x を主変数、$u_1,\ldots,u_\ell$ を従変数と呼び、$(u)=(u_1,\ldots,u_\ell)$ と略記する。不定元の指数を $e_x,e_1,\ldots,e_\ell\in\mathbf{N}$ で表し、$e_u=(e_1,\ldots,e_\ell)\in\mathbf{N}^\ell$ を多重指数として $u^{e_u}=u_1^{e_1}\cdots u_\ell^{e_\ell}$ と略記する。$F(x,u)$ は $(\ell+1)$ 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,u_1,\ldots,u_\ell]=\mathbb{C}[x,u]$ の多項式とし、$F(x,u)=\sum_{(e_x,e_u)}c_{(e_x,e_u)}x^{e_x}u^{e_u}$ と表す。$F(x,u)$ の x に関する次数を n とし、$F(x,u)=f_nx^n+f_{n-1}x^{n-1}+\cdots+f_0$ (ただし $f_i\in\mathbb{C}[u]$) と表す。モニックでない多項式に対しても拡張 Hensel 構成は適用できるが [SI00]、目標とする有理関数係数多項式環上では、多項式全体を主係数で割り、主係数を 1 に正規化することで入力をモニックとすることができるため、ここでは多項式はモニックであると仮定してよい。

$w=(w_1,\ldots,w_\ell)\in\mathbf{N}_0^\ell$ ($\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$) とし、$F(x,u)$ に対して次の変換を施す。

$$u_i\mapsto t^{w_i}u_i \qquad (i=1,\cdots\ell)$$

w を (従変数の) 重みベクトルという。

t の指数を $e_t\in\mathbf{N}$ と表すと、e_t は F の各項の従変数の重みつき全次数となる。t の指数を以下では位数と呼ぶ。(e_x,e_t)-平面上に変換後の各項に対応した点をプロットし、その凸包を取る。F はモニックゆえ、この凸包の下辺の右端は重みベクトルによらず点 $(n,0)$ である。凸包の下辺のうち点 $(n,0)$ を通る下辺を延長した直線を Newton 線と呼ぶ。Newton 線と e_t 軸との交点を $(0,\mu)$ とすると、Newton 線上にプロットされた項は $((\mu/n)e_x+e_t)$-斉次である。これらの項の和を Newton 多項式と呼び、F_{New} と表す。



*osoken@math.tsukuba.ac.jp

定義より Newton 多項式は従変数の重みによってある程度異なることがわかる。さらに、結果として得られる Hensel 因子も重みによって解析的振舞の異なる因子が得られる場合がある。これらに対する詳しい議論は [OS06] を参照されたい。

$\hat{\mu}, \hat{n} \in \mathbf{N}$ を $\mu/n = \hat{\mu}/\hat{n}$ かつ $\gcd(\hat{\mu}, \hat{n}) = 1$ を満たすように定める。イデアル $I_k \subset \mathbb{C}[u][x,t], k \in \mathbf{N}$, を次式のように定める。

$$I_k = \langle x^n t^0, x^{n-1} t^{\mu/n}, \ldots, x^0 t^{\mu} \rangle \times \langle t^{k\hat{n}} \rangle$$

F_{New} を次式を満たすように因数分解する。

$$\begin{cases} F_{\mathrm{New}}(x,u) = G_1^{(0)}(x,u) \cdots G_r^{(0)}(x,u) & (r \geq 2) \\ \gcd(G_i^{(0)}, G_j^{(0)}) = 1 & ({}^{\forall} i \neq j) \end{cases} \tag{1}$$

ここで、因数分解は従変数の代数関数を用いてもよいし、多項式の範囲での分解に止めてもよい。$r = 1$ となり、二つ以上の互いに素な因子に分けることができない場合は入力の多項式の変換が必要である。その場合の算法は [SI00] を参照されたい。

初期因子を用いて、次を満たす $W_1^{(l)}, \ldots, W_r^{(l)}$ (Moses-Yun の補間式) を計算する。

$$\begin{cases} W_1^{(l)} \dfrac{F_{\mathrm{New}}(x,u)}{G_1^{(0)}(x,u)} + \cdots + W_r^{(l)} \dfrac{F_{\mathrm{New}}(x,u)}{G_r^{(0)}(x,u)} = x^l & (l < n) \\ \deg_x(W_i^{(l)}) < \deg_x(G_i^{(0)}) & (i = 1, \ldots, r) \end{cases} \tag{2}$$

イデアル I_k を法として

$$G_1^{(k)}(x,u) \cdots G_r^{(k)}(x,u) \equiv F(x,u) \pmod{I_{k+1}} \tag{3}$$

を満足するように $G_i^{(k-1)}$ に高次項を振り分けていく。反復公式は次の通り。

$$\delta F^{(k)} \equiv F - G_1^{(k-1)} \cdots G_r^{(k-1)} \pmod{I_{k+1}} \tag{4}$$

で k 次残差を計算し、x についてまとめる。

$$\delta F^{(k)} = \delta f_{n-1}^{(k)} x^{n-1} + \cdots + \delta f_0^{(k)} x^0 \tag{5}$$

各因子 $G_i^{(k)}$ に対して

$$G_i^{(k+1)} = G_i^{(k)} + \sum_{l=0}^{n-1} \delta f_l^{(k)} W_i^{(l)} \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{6}$$

と定めると、Moses-Yun 補間式の性質より、これらは

$$G_1^{(k)}(x,u) \cdots G_r^{(k)}(x,u) \equiv F(x,u) \pmod{I_{k+1}} \tag{7}$$

を満たすことが分る。この構成は $k \to \infty$ まで成立するので、次式が成立する。

$$G_1^{(\infty)}(x,u) \cdots G_r^{(\infty)}(x,u) = F(x,u) \tag{8}$$

$G_i^{(k)}(x,u)$ および $G_i^{(\infty)}(x,u)$ を Hensel 因子と呼ぶ。

2 有理関数係数多項式への拡張

2.1 一変数有理関数の場合

拡張 Hensel 構成は、位数（従変数の全次数）に関して低次の項から順に因子に取り込んでべき級数展開を構成する。また Newton 多項式の計算にも位数が必要である。拡張 Hensel 構成を有理関数係数まで拡張するためには、有理関数に対して適切に位数を定めることが必要である。その方法を、まずは簡単な一変数有理関数の場合について提案する。

$F(x,u) \in \mathbb{C}(u)[x]$ は一般に

$$F(x,u) = x^n + \frac{f_{n-1}}{g_{n-1}} x^{n-1} + \cdots + \frac{f_0}{g_0} \qquad f_i, g_i \in \mathbb{C}[u]$$

と表すことができる。従変数は今は一つなので、その指数を従変数の全次数と見なす。これらの各項に位数を定めるのだが、分母が単項式であるか否かで分けて考える。

分母が単項式の場合は (分子の位数) − (分母の位数) と定めればよい。分母の位数が分子の位数より大きい場合は項全体の位数は負となるが、負の位数が現れても拡張 Hensel 構成は自然に適用できる。

分母が多項式の場合、分母の各項が異なる位数を持つため、有理関数全体で一つの位数を定めるのは無理である。そこで、$u \mapsto tu$ として次の変換を考える。

$$\frac{f_i}{(tu)^\beta (1-\hat{g}_i)} \mapsto \frac{f_i}{(tu)^\beta}\left(1 + \hat{g}_i + \hat{g}_i^2 + \cdots\right) \tag{9}$$

ここで、β は g_i の各項で最小の位数で、$\hat{g}_i = \left((ut)^\beta - g_i\right)/(ut)^\beta$ であり、上記の変換はよく知られたべき級数展開である。この変換により分母が単項式の場合に帰着できる。

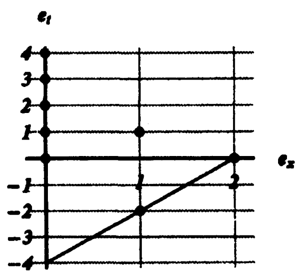
入力を無限べき級数に変換することは、計算機で計算するという観点からは一見すると不可能な考えに思える。ところが (9) の変換は $f_i/(ut)^\beta(1-\hat{g}_i) = f_i/(ut)^\beta + f_i\hat{g}_i/(ut)^\beta(1-\hat{g}_i)$ なる変形を逐次的に行っているため、計算に必要な部分だけを必要になったときに取り出して、残りの変換を後にまわすことで問題は回避できる。

以下に一変数有理関数係数の場合の計算例を示す：

$F = x^2 + \dfrac{2-3u^3}{7u^2}x - \dfrac{3+3u^2}{-3+2u+u^3}$ として $u \mapsto tu$ および (9) の変換を適用すると

$$F = x^2 + \left(\frac{2}{7u^2}t^{-2} - \frac{3u}{7}t\right)x + (1+u^2t^2)\left(1 + \left(\frac{2ut+u^3t^3}{3}\right) + \cdots\right)$$

を得る。この各項を (e_x, e_t)-平面上にプロットすると、右図のようになる。x の 1 次の項に負の位数を持つ項が現れており、また、x の 0 次の項は無限べき級数が現れている。Newton 多項式は右図斜線上の項からなり、



$$F_{\mathrm{New}} = x^2 + \frac{2}{7u^2}t^{-2}x = x\left(x + \frac{2}{7u^2}t^{-2}\right)$$

である。簡単のため、以下 t を省略し、$G_1^{(0)} = x, G_2^{(0)} = x + 2/7u^2$ としてこれら 2 つの因子に高次項を振り分けていくと次のようになる。

$$G_1^{(\infty)} = x + 7u^2/2 + 7u^3/3 + 91u^4/18 + 1057u^5/108 + 32515u^6/648 + 67039u^7/972 + \cdots$$
$$G_2^{(\infty)} = x + 2/7u^2 - 3u/7 - 7u^2/2 - 7u^3/3 - 91u^4/18 - 1057u^5/108 - 32515u^6/648 - \cdots$$

入力の多項式を、u に値 u_0 を与えて $F(x, u_0)$ の数値根を計算した結果と数値比較をすると、次表のような結果が得られた (Hensel 因子は 30 次まで展開した。下線部は正しい数値を表す)。

u_0	厳密計算		Hensel 因子	
0.1	-0.0379961	-28.4906	-0.0379961	-28.4906
0.2	-0.1748999	-6.88224	-0.1748999	-6.88224
0.3	-0.551247	-2.49478	-0.552668	-2.49336
0.4	-0.807143 + 0.988804 i	-0.807143 - 0.988804 i	-7.55354	5.93926

展開点である原点近傍では 30 次までの展開でも比較的良く近似できている。0.3 で精度が落ちており、0.4 では収束半径の外であるため値は大きく異なっている。

2.2 多変数有理関数の場合

2.1 で用いた位数の決め方は多変数有理関数に対しても自然に拡張できる。

分母が単項式の場合は、一変数の場合と同じく (分子の位数) − (分母の位数) で定めればよい。斉次式も同様である。

分母が多項式の場合、一変数の場合とは異なり、分母を最小位数をもつ単項式でくくれるとは限らない。一般に $f_i, g_i \in \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_l]$ に対して、$g_i = (\bar{g}_i t)^\beta (1 - \hat{g}_i)$ とおいて

$$\frac{f_i}{(\bar{g}_i t)^\beta (1 - \hat{g}_i)} \mapsto \frac{f_i}{(\bar{g}_i t)^\beta}\left(1 + \hat{g}_i + \hat{g}_i^2 + \cdots\right) \tag{10}$$

と変換することになる。ここで β は g_i の最小位数、$\bar{g}_i$ は g_i の β-斉次部分の多項式あるいは単項式である。一変数有理関数の場合とは異なり、$\hat{g}_i$ は分母が斉次多項式の有理関数にもなり得る。

多変数有理関数の場合、重みが異なれば (10) の変換は異なるべき級数が得られる。

計算例として [SI00] の Expample 4 を今回の方法で計算してみる。

$$F(x,y,z) = x^4(y^2 - z^2) + x^3(y + 3z + 3y^2 + 3z^2) + x^2(-2 + 3y - 4z - 2y^2 + 5yz - 2z^2 + y^3 + 6y^2 z + 3z^3)$$
$$+ x(-5y - 9y^2 - 5yz - 5z^2 + 3y^3 + y^2 z - 5z^3) + (3y^2 - 5y^3 - 7y^2 z - yz^2 - 2y^4 - 3y^2 z^2 - 3yz^3 - 2z^4)$$

この多項式を主係数 $(y^2 - z^2)$ で割り、重みベクトルを $w = (1,1)$ とすると、Newton 多項式は $F_{\mathrm{New}} = x^4 - 2x^2/(y^2 - z^2) + x^3(y + 3z)/(y^2 - z^2)$ である。これを三つの因子に分け、それぞれを $F_2^{(0)} = x^2$, $G_{11}^{(0)} = x + 2/(y - z)$, $G_{12}^{(0)} = x - 1/(y + z)$ として $k = 4$ まで構成すると以下の Hensel 因子を得る。

$$
\begin{aligned}
F_2^{(4)} &= x^2 + x\left(\frac{5y}{2} + \frac{33y^2}{4} - \frac{5yz}{2} + \frac{5z^2}{2} + \frac{9y^3}{2} - \frac{209y^2z}{8} + \frac{25yz^2}{4} - \frac{5z^3}{2}\right) - \frac{3y^2}{2} \\
G_{11}^{(4)} &= x + \frac{2+y+2z}{y-z} + \frac{y}{2} - \frac{5y^2}{4} - \frac{3yz}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{y^3}{2} + \frac{17y^2z}{8} + \frac{7yz^2}{4} + \frac{z^3}{2} \\
G_{12}^{(4)} &= x + \frac{-1+3y}{y+z} - 1 - 3y - 7y^2 + 4yz - 2z^2 - 5y^3 + 24y^2z - 8yz^2 + 2z^3
\end{aligned}
$$

第二、第三の因子をそれぞれ $(y-z)G_{11}^{(4)}$, $(y+z)G_{12}^{(4)}$ と置き換えると、上記は [SI00] と同じになる。

重みを変えることで異なる Hensel 因子を得ることもできる。重みを $w=(1,2)$ とすると Newton 多項式は $F_{\rm New}=x^4+x^3/y-2x^2/y^2$ となり、高次項を取り込むと y のべき乗が分母に現れる。$F_{2(1,2)}^{(0)}=x^2, G_{11(1,2)}^{(0)}=x+2/y, G_{12(1,2)}^{(0)}=x-1/y$ とおくと以下の Hensel 因子を得る。

$$
\begin{aligned}
F_{2(1,2)}^{(0)} &= x^2 - \frac{3y^2}{2} + x\left(\frac{5y}{2} + \frac{33y^2}{4} + \frac{9y^3}{2} - \frac{5yz}{2}\right) \\
G_{11(1,2)}^{(0)} &= x + 1 + \frac{y}{2} - \frac{5y^2}{4} + \frac{2}{y} + \frac{2z}{y^2} + \frac{3z}{y} + \frac{2z^2}{y^3} + \frac{3y^2z^2+2z^3}{y^4} + \frac{y^8-3y^6z+6y^2z^3+4z^4}{2y^5} \\
G_{12(1,2)}^{(0)} &= x + 2 - \frac{1}{y} + \frac{z}{y^2} - \frac{3y^4+3y^2z+z^2}{y^3} + \frac{-7y^6+3y^2z^2+z^3}{y^4} - \frac{5y^8-4y^6z+3y^2z^3+z^4}{y^5}
\end{aligned}
$$

一方、重みを $w=(2,1)$ とおけば Newton 多項式は $F_{\rm New}=x^4-3x^3/z+2x^2/z^2$ となり、z のべき乗を分母に持つ Hensel 因子が得られる。

3 結論

今回の方法を用いると、有理関数係数多項式に対して前処理を行うだけで、多変数多項式と同様に拡張 Hensel 構成を適用することができる。多項式を入力とした拡張 Hensel 構成でも、出力される因子は従変数に関する有理関数を含む場合も多い。それらの式にもう一度拡張 Hensel 構成を適用する場合、分子の位数とともに分母の位数も増加するべき級数になっていることが多く、一般に分母を払って多項式化することができないため、有理関数のままでも計算できるようにしたこの方法は有用であろう。

また、今回負の位数を持つ項があっても拡張 Hensel 構成が使えることを見てきたが、負の重みを定義して拡張 Hensel 構成を行うこともできる。この場合、負の重みを定義した変数に関しては無限遠からの近似になり、非常に興味深い。

参考文献

[Kuo89] T.-C. Kuo: Generalized Newton-Puiseux theory and Hensel's lemma in $\mathbb{C}[[x,y]]$, Canad. J. Math. **XLI**, 1101-1116 (1989).

[Mcd95] J. McDonald: Fiber polytopes and fractional power series, J. of Pure and Applied Algebra, **104**, 213-233 (1995).

[SI00] T. Sasaki and D. Inaba: Hensel construction of $F(x,u_1,\ldots,u_\ell), \ell \geq 2$, at a singular point and its applications, ACM SIGSAM Bulletin **34**, 9-17 (2000).

[SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, Japan J. Indus. Appl. Math., **16**, 257-285 (1999).

[SS96] K. Shiihara and T. Sasaki: Analytic continuation and Riemann surface determination of algebraic functions by computer. Japan J. Indust. Appl.Math. **13**, 107-116 (1996).

[OS06] T. Osoekawa and T. Sasaki: 従変数に重みをつけた拡張 Hensel 構成と Newton 多面体, 京都大学数理解析研究所講究録 **1514**, 15-21 (2005).