数理解析研究所講究録
第1569巻 2007年 1-7

強デファイナブル C^rG ベクトル束

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

本稿では、実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \ldots)$ において考察する。もっと一般的に、実閉体上でも議論することができるが、$\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[3], [4] などに性質がまとめられている。本稿では、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきで考える。

ここでは、G がコンパクトデファイナブル群のとき、デファイナブル G 集合上の G ベクトル束の強デファイナブル G ベクトル束構造の一意存在について考察する。また、G がコンパクトデファイナブル C^r 群で、$0 \leq r < \infty$ のとき、アフィンデファイナブル C^rG 多様体上の G ベクトル束の強デファイナブル C^rG ベクトル束構造の一意存在について考察する。

2. セミアルジェブリックベクトル束と Nash ベクトル束

$\mathbb{R}^n$ のセミアルジェブリック部分集合とは、$\{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0, h_1(x) > 0, \ldots, h_l(x) > 0\}, f_i, h_j \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ の形の集合の有限和となることである。セミアル

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 14P20, 57R22, 57S10, 57S15, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, デファイナブル群, デファイナブル C^r 群, デファイナブル C^rG ベクトル束, セミアルジェブリックベクトル束.

ジェブリック集合とは、ある$\mathbb{R}^n$のセミアルジェブリック部分集合のことである。A. Tarski [14]により、$\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <,)$のデファイナブル集合は、セミアルジェブリック集合となる。

ここでは、セミアルジェブリック写像は連続であると仮定する。

定義 2.1. セミアルジェブリックベクトル束$\eta = (E, p, X)$とは、全空間Eをセミアルジェブリック空間、底空間Xをセミアルジェブリック集合、射影$p : E \to X$をセミアルジェブリック写像とし、開被覆を有限セミアルジェブリック開被覆とし、貼り合わせ写像をセミアルジェブリック同相写像としたものである。

セミアルジェブリックカテゴリーにおいても、セミアルジェブリック束写像、セミアルジェブリック束同型写像、引き戻し束を考えることができる。セミアルジェブリックベクトル束は, $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$におけるデファイナブルベクトル束である。

定理 2.2 ([2]). $\eta = (E, p, X)$をセミアルジェブリック集合X上のベクトル束とする。このとき、セミアルジェブリックベクトル束同型を除いて、ただひとつのセミアルジェブリックベクトル束$\zeta = (E', p', X)$が存在して、ηとζはベクトル束同型となる。

次に普遍ベクトル束を定義する。

定義 2.3. nとkを$0 \le k \le n$を満たす整数とする。

$$G(n, k) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A^2 = A, {}^t A = A, trA = k\},$$

$$E(n, k) = \{(A, v) \in G(n, k) \times \mathbb{R}^n | Av = v\},$$

$$u : E(n, k) \to G(n, k), u((A, v)) = A,$$

$$\gamma(n, k) = (E(n, k), u, G(n, k))$$

と定義する。$\gamma(n, k) = (E(n, k), u, G(n, k))$は代数的ベクトル束となり、$n$と$k$に付随した普遍ベクトル束という。

定義 2.4. ランクkのセミアルジェブリックベクトル束$\eta = (E, p, X)$が強セミアルジェブリックとは、ある自然数nとあるセミアルジェブリック写像$f : X \to G(n, k)$が存在して、ηと$f^*(\gamma(n, k))$がセミアルジェブリック束同型となることである。

定理 2.5 ([2]). 任意のセミアルジェブリックベクトル束は、強セミアルジェブリックである。

次に Nash ベクトル束を考える。Nash は、セミアルジェブリックかつ C^ω ことである。このことは、セミアルジェブリックかつ C^∞ と同値である。

Nash 多様体は、C^ω 多様体であって、そのチャートの個数が有限個で、それらの貼り合わせ写像が Nash 写像であるものである。通常の C^∞ 多様体のように、Whitney の埋め込み定理は成立しない。Nash 多様体が、ある $\mathbb{R}^n$ に Nash 埋め込み可能のとき、アフィンという。セミアルジェブリックベクトル束と同様にして、Nash ベクトル束を考えることができる。

定義 2.6. *アフィン Nash 多様体 X 上のランク k の Nash ベクトル束 $\eta = (E, p, X)$ が強 Nash とは、ある自然数 n とある Nash 写像 $f : X \to G(n, k)$ が存在して、η と $f^*(\gamma(n, k))$ が Nash 束同型となることである。*

命題 2.7 ([2]). *$\mathbb{R}^2$ 上に強 Nash でない Nash ベクトル束が存在する。定理 2.5 の Nash 版は成立しない。*

定理 2.2 の Nash 版は成立する。

定理 2.8 ([2]). *X をアフィン Nash 多様体とする。*

(1) η を X 上のベクトル束とするとき、Nash ベクトル束同型を除いて、ただひとつの強 Nash ベクトル束 η' が存在して、η と η' がベクトル束同型となる。

(2) ζ を X 上のセミアルジェブリックベクトル束とするとき、Nash ベクトル束同型を除いて、ただひとつの強 Nash ベクトル束 ζ' が存在して、ζ と ζ' がセミアルジェブリックベクトル束同型となる。

定理 2.8 の部分的同変版が、[5] によりなされている。

3. デファイナブル G ベクトル束とデファイナブル $C^r G$ ベクトル束

定義 3.1. 実数体 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ の構造の拡張 $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, \dots)$ が順序極小構造とは、$\mathbb{R}$ の任意のデファイナブル部分集合が開区間 $(a, b), -\infty \le a < b \le \infty$ と点の有限和に限ることである。

$\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, \dots)$ を実数体 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ の順序極小拡張とする。実数体 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ の代わりに実閉体 $\mathcal{R}' = (R, +, \cdot, <)$ の順序極小拡張も考えることができるが、

ここでは、そこまで拡張して考えない。以下では、すべて$\mathcal{M}$上で考える。また、デファイナブル写像はすべて連続を仮定する。

$\mathcal{M}$は順序$<$を言語の中に含んでいるので、任意の開区間$(a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$は$\mathbb{R}$のデファイナブル集合である。また、等号$=$はいつでも言語に含まれていると考えるのが約束なので、$a \in \mathbb{R}$に対して、点$\{a\}$も$\mathbb{R}$のデファイナブル集合である。だから、順序極小とは、和$+$、積$\cdot$、順序$<$の他に関数・関係が加えられていても、$\mathbb{R}$のデファイナブル集合が増えないことを意味している。

例 3.2 ($\mathbb{R}$の順序極小拡張の例). *(1)* $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

(2) $\mathbf{R}_{exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, < e^x)$.

(3) $\mathbf{R}_S = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, \{x^t\}_{t \in S})$、ただし、$S$は$\mathbb{R}$の部分体で、$x^t = \begin{cases} a^t, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$とする。

(4) $\mathbf{R}_{an} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, (f))$、ただし、$f$は$f|[-1, 1]^k$で$C^\omega$で、その外で0となる関数すべてを代表して表している。

(5) $\mathbf{R}_{an,exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, (f), e^x)$

定理 3.3 ([12]). *(1)* $\mathcal{R}$の順序極小拡張は、非可算個無限個存在する。

(2) $\mathcal{R}$の極大な順序極小構造は存在しない。$\mathcal{R}$の順序極小構造に対して、適当な関数を付け加えて、その拡張となる順序極小構造を構成することができる。

定義 3.4. $0 \leq r \leq \omega$とする。C^r多様体がデファイナブルC^r多様体とは、その局所座標近傍系が有限で、その貼り合わせ写像がデファイナブルC^r写像となることである。

定理 3.5 ([9]). $0 \leq r < \infty$のとき、任意のデファイナブルC^r多様体Xは、ある$\mathbb{R}^n$にデファイナブルC^r埋め込み可能である。つまり、Xはアフィンである。

しかし、$\mathcal{M} = \mathcal{R}$で$r = \infty$とすると、デファイナブル$C^r$多様体は、Nash多様体となるので、上の定理において、$r = \infty$ととることができない。Nash多様体のときと違って、デファイナブルC^∞多様体は、デファイナブルC^ω多様体とは限らない。デファイナブルC^∞多様体とデファイナブルC^ω多様体については、未知の部分が多いので、今後の研究課題である ([11])。

定義 3.6. 群Gがデファイナブル群 *(デファイナブル C^r 群)* とは、Gがデファイナブル集合（デファイナブルC^r多様体）であって、群演算$G \times G \to G, G \to G$がデファイナブル写像（デファイナブル$C^r$写像*)*となることである。

デファイナブルC^r群、Nash群に関して以下の定理が知られている。

定理 3.7. *(1)* $0 \leq r < \infty$ のとき、任意のデファイナブル群は、デファイナブル C^r 群同型を除いて、ただひとつのデファイナブル C^r 群構造をもつ。

(2) セミアルジェブリック群は、Nash 群同型を除いて、ただひとつの Nash 群構造をもつ。

G をデファイナブル群（デファイナブル C^r 群）とする。G 表現写像とは、G から $O_n(\mathbb{R})$ への群準同型写像で、デファイナブル写像（デファイナブル C^r 写像）となるものである。G 表現写像から導かれた G 作用をもった $\mathbb{R}^n$ を G 表現という。ここでは、直交表現のみを考える。

定義 3.8. *(1)* G をデファイナブル群とする。デファイナブル G 集合とは、ある G 表現の G 不変デファイナブル部分集合のことである。

(2) G をデファイナブル C^r 群とする。デファイナブル C^rG 多様体 (X, ϕ) とは、デファイナブル C^r 多様体 X とデファイナブル C^r 作用 $\phi : G \times X \to X$ の組のことである。以下、ϕ を省略して、X と書いて、デファイナブル C^rG 多様体を表すものとする。

デファイナブル C^rG 多様体は、[10], [8] などにおいて研究されている。

以下の定義は、定義 2.3 の同変版である。

定義 3.9. G をデファイナブル群（デファイナブル C^r 群)、Ω を n 次元 G 表現とし、$B : G \to O_n(\mathbb{R})$ をその表現写像とする。$M(\Omega)$ を $n \times n$ 行列全体の集合で、$(g, A) \in G \times M(\Omega) \to B(g)AB(g)^{-1} \in M(\Omega)$ という G 作用をもっているとする。任意の自然数 k に対して、$\gamma(\Omega, k) = (E(\Omega, k), u, G(\Omega, k))$ を以下のように定義する。

$$G(\Omega, k) = \{A \in M(\Omega) | A^2 = A, {}^t A = A, trA = k\},$$

$$E(\Omega, k) = \{(A, v) \in G(\Omega, k) \times \Omega | Av = v\},$$

$$u : E(\Omega, k) \to G(\Omega, k) : u((A, v)) = A,$$

このとき、$\gamma(\Omega, k)$ は代数的 G ベクトル束となり、Nash G ベクトル束にもなっている。これを G と Ω に付随した普遍 G ベクトル束という。

定義 3.10. *(1)* デファイナブルベクトル束 $\eta = (E, p, X)$ とは、全空間 E をデファイナブル空間、底空間 X をデファイナブル集合、射影 $p : E \to X$ をデファイナブル写像とし、開被覆を有限デファイナブル開被覆とし、貼り合わせ写像をデファイナブル同相写像としたものである。

(2) $0 \le r \le \omega$ とする。デファイナブル C^r ベクトル束 $\eta = (E,p,X)$ とは、全空間 E と底空間 X をデファイナブル C^r 多様体、射影 $p : E \to X$ をデファイナブル C^r 写像とし、開被覆を有限デファイナブル開被覆とし、貼り合わせ写像をデファイナブル C^r 微分同相写像としたものである。

定義 3.11. *(1)* G をデファイナブル群とする。デファイナブルベクトル束 $\eta = (E,p,X)$ がデファイナブル G ベクトル束とは、全空間 E をデファイナブル G 空間、底空間 X をデファイナブル G 集合、射影 $p : E \to X$ をデファイナブル G 写像とし、任意の $x \in X, g \in G$ に対して、$p^{-1}(x) \to p^{-1}(gx), y \to gy$ が線形同型写像となることである。

(2) G をデファイナブル C^r 群、$0 \le r \le \omega$ とする。デファイナブル C^r ベクトル束 $\eta = (E,p,X)$ がデファイナブル C^rG ベクトル束とは、全空間 E と底空間 X をデファイナブル C^rG 多様体、射影 $p : E \to X$ をデファイナブル C^rG 写像とし、任意の $x \in X, g \in G$ に対して、$p^{-1}(x) \to p^{-1}(gx), y \to gy$ が線形同型写像となることである。

定義 3.12. *(1)* G をデファイナブル群とする。ランク k のデファイナブル G ベクトル束 $\eta = (E,p,X)$ が強デファイナブルとは、ある G 表現 Ω とデファイナブル G 写像 $f : X \to G(\Omega,k)$ が存在して、η と $f^*(\gamma(\Omega,k))$ がデファイナブル G ベクトル束同型となることである。

(2) G をデファイナブル C^r 群、$0 \le r \le \omega$ とする。アフィンデファイナブル C^rG 多様体 X 上のランク k のデファイナブル C^rG ベクトル束 $\eta = (E,p,X)$ が強デファイナブルとは、ある G 表現 Ω とデファイナブル C^rG 写像 $f : X \to G(\Omega,k)$ が存在して、η と $f^*(\gamma(\Omega,k))$ がデファイナブル C^rG ベクトル束同型となることである。

本稿における結果は、以下である。これは、[6] の一部である。

定理 3.13. G をコンパクトデファイナブル群、$\eta = (E,p,X)$ をランク k のデファイナブル G 集合上の G ベクトル束とする。

(1) ([1], [13]). ある G 表現 Ω とある連続 G 写像 $f : X \to G(\Omega,k)$ が存在して、η と $f^*(\gamma(\Omega,k))$ が G ベクトル束同型となる。

(2) ([6]) デファイナブル G ベクトル束同型を除いて、ただひとつの強デファイナブル G ベクトル束 ζ が存在して、η と ζ は G ベクトル束同型となる。

定理 3.14. G をコンパクトデファイナブル C^r 群、$\eta = (E,p,X)$ をアフィンデファイナブル C^rG 多様体 X 上のデファイナブル G ベクトル束とし、$0 \le r < \infty$ とする。

(1) ([7]). η は強デファイナブルである。

(2) ([6]). デファイナブル C^rG ベクトル束同型を除いて、ただひとつの強デファイナブル C^rG ベクトル束 ζ が存在して、η と ζ はデファイナブル G ベクトル束同型となる。

系 3.15. G をコンパクトデファイナブル C^r 群、$\eta=(E,p,X)$ をアフィンデファイナブル C^rG 多様体 X 上の G ベクトル束とし、$0 \leq r < \infty$ とする。このとき、デファイナブル C^rG ベクトル束同型を除いて、ただひとつの強デファイナブル C^rG ベクトル束 ζ が存在して、η と ζ は G ベクトル束同型となる。

References

[1] M. F. Atiyah, *K-theory*, Benjamin, 1967.
[2] J. Bochnak, M. Coste and M.F. Roy, *Géométie algébrique réelle*, Erg. der Math. und ihrer Grenzg., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
[3] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
[4] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.
[5] T. Kawakami, *Algebraic G vector bundles and Nash G vector bundles*, Chinese J. Math. **22(3)** (1994), 275–289.
[6] T. Kawakami, *Definable C^r fiber bundles and definable C^rG vector bundles*, preprint.
[7] T. Kawakami, *Definable G-fiber bundles and definable C^rG-fiber bundles*, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **1343** (2003), 31-45.
[8] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.
[9] T. Kawakami, *Every definable C^r manifold is affine*, Bull. Korean Math. Soc. **42** (2005), 165-167.
[10] T. Kawakami, *Imbedding of manifolds defined on an o-minimal structures on* $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$, Bull. Korean Math. Soc. **36** (1999), 183–201.
[11] T. Kawakami, *Some open problems in o-minimal expansions of the field of real numbers*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **57** (2007), 1-7.
[12] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.
[13] G. Segal, *Equivariant K-theory*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34** (1968), 129–151.
[14] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2nd edition. revised, Berkeley and Los Angeles (1951).