

# 同変コホモロジーと Chevalley-Koszul 複体 (Equivariant cohomology and the Chevalley-Koszul complex)

大阪大学大学院 理学研究科 山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)  
Graduate School of Science, Osaka University

## 1 はじめに

$M$  をコンパクト連結 Lie 群  $G$  が作用する Lie 群,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  の Lie 代数とする.  $\{e_a\}$  を  $\mathfrak{g}$  の基底,  $v^a \in S\mathfrak{g}^*$  をその双対基底に対応する対称代数の生成元とするとき, Cartan 複体

$$(S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\text{inv}}, \quad 1 \otimes d - \sum_a v^a \otimes \iota(e_a)$$

が  $M$  の同変コホモロジーを与えることはよく知られている.  $\{c_j\}$  を  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  の primitive な生成元,  $\{p^j\}$  をその双対基底に Chevalley's transgression theorem によって対応する  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の生成元とすると, Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は次を主張した.

**主張 1.** より “小さい” 複体

$$(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \Omega(M)_{\text{inv}}, \quad 1 \otimes d - \sum_j p^j \otimes \iota(c_j)$$

が Cartan 複体と擬同型である. つまりこの複体は  $M$  の同変コホモロジーを与える. □

彼らがどのようにしてこの主張を発見したかを思い出す.  $\pi : P \rightarrow B$  を主  $G$ -束とすると, Chevalley と Koszul により, 複体

$$\Omega(B) \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, \quad d \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^\wedge(c_j),$$

は  $P$  の不変な微分形式による複体  $\Omega(P)_{\text{inv}}$  と擬同型であることが示されている. Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は次を主張した.

**主張 2.** 下に有界な DG(differential graded)  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の圏において、上の主張は成り立つ。

そして下に有界な DG  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群と  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の圏の間に成り立つ Koszul 双対性を用いれば、主張 2 から主張 1 が導かれることを彼らは見出した。ただし Maszczyk-Weber [6] が [2] の主張 2 の証明にギャップがあることを指摘し、新たに証明を与えた。しかし Alekseev-Meinrenken [1] によって新しい証明にもギャップがあることを指摘されたが、彼らは主張 1 に新たな証明を与え、その“小さい”複体を小 Cartan 複体と名付けた。[1] における証明は前の二つとは異なり、Koszul 双対性を用いずに直接主張 1 を示したのだが、次の二点で優れている。まず主張 1 を擬同型ではなく、ホモトピー同値まで示しているのである。次に  $G$  が作用する多様体の微分形式の空間の一般化として  $\mathfrak{g}$ -微分空間を定義して、任意の  $\mathfrak{g}$ -微分空間に対して主張 1 を示した。微分形式は下に有界な  $\mathfrak{g}$ -微分空間であるから、有界条件を外したのである。以上をまとめると Alekseev-Meinrenken が示したことは次である。

**主張 3** ([1, Theorem 4.2]). 任意の  $\mathfrak{g}$ -微分空間  $\mathcal{M}$  に対して、 $\mathcal{M}$  の小 Cartan 複体  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\text{inv}}$  は  $\mathcal{M}$  の Cartan 複体  $(S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}}$  と、DG  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群の圏において、ホモトピー同値である。

一方 Alekseev-Meinrenken [1] は主張 2 の一般化である次の主張 4 を述べ、主張 3 と 4 が Koszul 双対性により関係することを示した。  $W_{\mathfrak{g}} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  を Weil 代数とする。主  $G$ -束  $P \rightarrow B$  に対して  $\Omega(P)$  は、Chern-Weil 理論により、 $W_{\mathfrak{g}}$ -加群になることから、 $\Omega(P)$  の一般化として  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群を考える。そして任意の  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群  $\mathcal{N}$  に対して、彼らは複体

$$\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, \quad d \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota(c_j),$$

を導入し Chevalley-Koszul 複体と呼んだ。

**主張 4** ([1, Theorem 5.5]). 任意の  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群  $\mathcal{N}$  に対して、 $\mathcal{N}$  の Chevalley-Koszul 複体は  $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  と、DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の圏において、ホモトピー同値である。

しかし [1] の主張 4 の証明にはギャップがあることがわかった。本稿では主張 4 に新しい証明を与える。この主張と Koszul 双対性を使えば、下に有界な  $\mathfrak{g}$ -微分空間  $\mathcal{M}$  に対して、 $\mathcal{M}$  の小 Cartan 複体と Cartan 複体が擬同型であることが従う。ただし Koszul 双対性を使ったことにより、ホモトピーに関する情報と有界条件が失われていることがわかる。それを解消するため、本稿では有界条件を保つ Lefèvre [5] の圏同値を用いる。

DG  $(Sg^*)_{\text{inv}}$ -加群の圏  $\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}$  がモデル圏になることはよく知られている。モデル圏は, fibration, cofibration, そして弱同値と呼ばれる射からなる特別な3つのクラスをもつことを思い出すと, 例えば  $\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}$  においては, 弱同値のクラスとして擬同型からなるクラスを定義すればよい。さらに Lefèvre [5] は cocomplete DG  $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群の圏  $\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}$  がモデル圏になることを示した。  $\mathcal{C}$  をモデル圏とすると, そのホモトピー圏  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  とは弱同値のクラスでの局所化と定義する。 Lefèvre [5] は, モデル圏の強力な道具立てを用いて,  $\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}$  と  $\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}$  のホモトピー圏が同値であることを示した。つまり,

$$\text{Ho}(\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}) \simeq \text{Ho}(\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}).$$

が成り立つ。ここで DG 空間は下に有界であることを仮定していないことを注意しておく。

本稿では次を示す。

**主張 5.** 任意の  $g$ -differential  $Wg$ -module  $\mathcal{N}$  に対して, cocomplete DG  $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群の圏において, 弱同値  $\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}$  が存在する。

そして Lefèvre によって得られた圏同値により, 主張 3 と 5 が関係することを示す。特に, 主張 5 と Lefèvre の圏同値を使えば,  $g$ -微分空間  $\mathcal{M}$  (下に有界であることを仮定しない) に対して,  $\mathcal{M}$  の小 Cartan 複体と Cartan 複体が擬同型であることがわかる。

## 2 $g$ -微分空間

$(g, [\cdot, \cdot]_g)$  を標数 0 の体  $F$  上の Lie 代数とする。

**定義 2.1.**  $g$ -空間とは DG 空間  $(\mathcal{M}, d^{\mathcal{M}})$ , そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}} : g \rightarrow \text{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり, 以下の条件をみたすものとする:

- $\xi \in g$  に対して  $L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$  の次数はそれぞれ  $0, -1$ ,
- $[d^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$ ,
- $[L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_g)$ ,
- $[\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0$ .

□

**定義 2.2.**  $\mathcal{M}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分空間とするととき,  $\mathcal{M}_{\text{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$ ,  $\mathcal{M}_{\text{hor}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ , そして  $\mathcal{M}_{\text{basic}} := \mathcal{M}_{\text{inv}} \cap \mathcal{M}_{\text{hor}}$  とおく.  $\square$

$\wedge \mathfrak{g}^*$  を  $\mathfrak{g}^*$  の外積代数として, その次数を

$$(\wedge \mathfrak{g}^*)^i := \wedge^i \mathfrak{g}^*,$$

と定める. また  $S\mathfrak{g}^*$  を  $\mathfrak{g}^*$  の対称代数として, その次数を

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i \mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0$$

と定める.  $\{e_a\}$  を  $\mathfrak{g}$  の基底,  $\{e^a\}$  をその双対基底とする. 以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1 \mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1 \mathfrak{g}^*$$

と表すことにする.

**例 2.3.** (a)  $G$  を Lie 群,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  の Lie 代数, そして  $M$  を  $G$  が作用する多様体とする.  $\mathfrak{g}$ -微分空間の典型例は  $M$  上の微分形式からなる空間  $\Omega(M)$  である. ただしその Lie 微分と contraction は  $G$  の作用の infinitesimal generator によるものとする.

(b) 外積代数  $\wedge \mathfrak{g}^*$  は余随伴表現  $L^\wedge$ , contraction  $\iota^\wedge(\xi)$ , そして微分

$$d^\wedge := \frac{1}{2} \sum_a y^a L^\wedge(e_a)$$

を考えることにより  $\mathfrak{g}$ -微分空間になる.  $\square$

ここから  $\mathfrak{g}$  を簡約 Lie 代数と仮定する.  $\mathfrak{g}$  の外積代数  $\wedge \mathfrak{g}$  の次数は

$$(\wedge \mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i \mathfrak{g}, \quad (\wedge \mathfrak{g})^i := 0 \quad (i \geq 0)$$

と定める.  $\wedge \mathfrak{g}$  と  $\wedge \mathfrak{g}^*$  の間の非退化な pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を用いて, 微分  $\partial : \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \wedge \mathfrak{g}$  を

$$\langle d^\wedge X, Y \rangle = \langle X, \partial Y \rangle, \quad X \in \wedge \mathfrak{g}^*, \quad Y \in \wedge \mathfrak{g}.$$

によって定義する. 同様に contraction  $\iota^* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\wedge \mathfrak{g})$  を

$$\langle \xi \cdot X, Y \rangle = \langle X, \iota^*(\xi)Y \rangle, \quad X \in \wedge \mathfrak{g}^*, \quad Y \in \wedge \mathfrak{g}.$$

で定義する.  $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$  を Schouten 括弧とするととき, 微分  $\partial$  と  $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$  を考えれば ( $\wedge \mathfrak{g}$  ではなく)  $(\wedge \mathfrak{g})[1]$  が DG Lie 代数になることを注意しておく. ここで  $(\wedge \mathfrak{g})[1]$  は  $(\wedge \mathfrak{g})[1]^i := (\wedge \mathfrak{g})^{i+1}$  なる次数付き空間とする.

$(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  を  $\wedge \mathfrak{g}$  の随伴表現による不変部分空間とする.  $\mathfrak{g}$  は簡約 Lie 代数であるから,  $\wedge \mathfrak{g}$  と  $\wedge \mathfrak{g}^*$  の間の pairing は  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  と  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の間の非退化な pairing に制限される. これより  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の積が  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  の余積  $\Delta$  を導く.  $x \in (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  が primitive であるとは

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

を満たすこととする.  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  においても primitive な元を同様に定義する.  $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$  をそれぞれ  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}, (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の primitive な元からなる部分空間とすると, よく知られているように,  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  と  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の間の pairing は  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{P}^*$  の間の pairing に制限される. よって  $\mathcal{P}^*$  は  $\mathcal{P}$  の双対空間になるので,  $\{c_j\}$  を  $\mathcal{P}$  の基底,  $\{c^j\}$  をその双対基底とする.

$L^S(\xi)$  は余随伴表現を  $S\mathfrak{g}^*$  の次数 0 の derivation に拡張したものとして, その不変部分空間を  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  と表す. Chevalley's transgression theorem によって  $c^j$  に対応する  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の元を  $p^j$  と表す (例えば [1] 参照).  $\deg p^j = \deg c^j + 1$  であることを注意しておく.

### 3 Chevalley-Koszul 複体

$\mathfrak{g}$ -微分代数とは次数付き結合代数  $\mathcal{A}$  であり,  $\mathfrak{g}$ -微分空間の構造を持ち  $d, L(\xi)$  そして  $\iota(\xi)$  がその積に関して derivation になるものとする.  $\mathfrak{g}$ -微分  $\mathcal{A}$ -加群とは  $\mathfrak{g}$ -微分空間  $\mathcal{N}$  であり,  $\mathfrak{g}$ -微分空間の準同型写像  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  をもつものとする.

**例 3.1.** Weil 代数  $W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  において, Lie 微分として  $L^W(\xi) := L^S(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^\wedge(\xi)$ , contraction として  $1 \otimes \iota^\wedge(\xi)$ , そして微分として

$$d^W := \sum_a (1 \otimes y^a) L^W(e_a) - 1 \otimes d^\wedge + \sum_a y^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$$

を定めれば  $\mathfrak{g}$ -微分代数となる. □

任意の  $\mathfrak{g}$ -微分  $W\mathfrak{g}$ -加群  $\mathcal{N}$  に対して, horizontal projection

$$P_{\text{hor}} := \prod_a \iota^\mathcal{N}(e_a) y^a : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{hor}}$$

が構成できる. 定義から  $P_{\text{hor}}$  は  $S\mathfrak{g}^*$  の作用と  $L^\mathcal{N}(\xi)$  と可換である.  $d_{\text{hor}} := P_{\text{hor}} \circ d^\mathcal{N}$  とすると,  $d_{\text{hor}}$  は derivative であり, 任意の  $x \in \mathcal{N}_{\text{hor}}$  に対して,  $d_{\text{hor}} x = (d - \sum_a y^a L^\mathcal{N}(e_a)) x \in \mathcal{N}_{\text{hor}}$  が成り立つことを注意しておく. また  $\mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  上の次数 0 の自己準同型写像

$$\alpha := \sum_a \iota^\mathcal{N}(e_a) \otimes y^a, \quad \beta := \sum_a y^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$$

を定める.  $\alpha, \beta$  は nilpotent であるから  $e^\alpha, e^\beta$  は有限和となる.

[1] における Proposition 5.3 にはギャップがあるので, 次のように修正する.

**命題 3.2.**  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W\mathfrak{g}$ -加群とする.  $\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  を

$$1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a) - \sum_a (1 \otimes y^a) L(e_a), \quad (1)$$

を微分とする DG 空間と考える. ここで  $L(\xi) := L^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^\wedge(\xi)$ . このとき

$$e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} : \mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathcal{N}, \quad x \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta|(|x|+1)} \eta \cdot x$$

は DG 空間の同型写像になる. □

証明. まず

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^\alpha)(1 \otimes \iota^\wedge(\xi)) &= 1 \otimes \iota^\wedge(\xi) + [\alpha, 1 \otimes \iota^\wedge(\xi)] + \frac{1}{2}[\alpha, [\alpha, 1 \otimes \iota^\wedge(\xi)]] + \dots \\ &= \iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

同様に

$$\text{Ad}(e^{-\beta})(\iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1) = \iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^\wedge(\xi).$$

よって

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\beta}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\alpha}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \\ \iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^\wedge(\xi) & & \downarrow 1 \otimes \iota^\wedge(\xi) \\ \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\beta}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\alpha}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \end{array}$$

が可換であることがわかる.  $\bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker(1 \otimes \iota^\wedge(\xi)) = \mathcal{N} \otimes \mathbb{F} = \mathcal{N}$  に注意すると, 2つの同型写像

$$\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \xrightarrow{e^{-\beta}} (\mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{hor}} \xrightarrow{e^{-\alpha}} \mathcal{N}$$

を得る.  $(\mathcal{N} \otimes \mathfrak{g}^*)_{\text{hor}}$  において,  $e^{-\alpha} = \prod_a (1 - \iota^\mathcal{N}(e_a) \otimes y^a)$  は

$$1 \otimes \prod_a (1 - y^a \iota^\wedge(e_a)) = 1 \otimes \prod_a \iota^\wedge(e_a) y^a = 1 \otimes P_{\text{hor}}^\wedge$$

と一致する. これから  $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}(x \otimes \eta) = (-1)^{|\eta|(|x|+1)} \eta \cdot x$  であることがわかる. □

$$K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) := (\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$$

とする。  $d_{\mathfrak{g}}$  を微分 (1) の  $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  への制限とする。つまり

$$d_{\mathfrak{g}} = 1 \otimes d^{\wedge} + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^{\wedge}(e_a).$$

$K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  は微分を  $d_{\mathfrak{g}}$ ,  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群構造を  $(-1)^{|\cdot|}(1 \otimes \iota^{\wedge}(c))$  とする DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群と考える。ここで  $\iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$  を代数の準同型写像  $\iota^{\mathcal{M}} : \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$  に拡張しておく。一方  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とすれば、 $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  は DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群になる。ただし  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群構造は  $\iota^{\mathcal{N}}(c)$  とする。  $\alpha, \beta$  は  $L(\xi)$  と可換であるから、  $e^{\alpha}, e^{\beta}$  も  $L(\xi)$  と可換である。よって  $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}$  の  $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  への制限が DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の同型写像であることがわかる。つまり  $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}$  の制限も同じ記号で書くと、

$$d^{\mathcal{N}} \circ e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} = e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ d_{\mathfrak{g}} \quad (2)$$

が成り立つ。

**定義 3.3.**  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とする。  $\mathcal{N}$  の Chevalley-Koszul 複体とは DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群

$$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) := \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, \quad \tilde{d}_{\mathfrak{g}} := d^{\mathcal{N}} \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^{\wedge}(c_j),$$

である。ただし  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群構造は  $1 \otimes \iota^{\wedge}(c)$  と定める。  $\square$

$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  と  $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  を結び付けるため、Alekseev-Meinrenken [1] に倣って、ある Maurer-Cartan-型方程式を考える。  $(\wedge \mathfrak{g})^{-} := \bigoplus_{i>0} \wedge^i \mathfrak{g}$  とするとき、Alekseev-Meinrenken は次を示した ([1, Theorem 3.6] 参照):

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge \mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j \quad (3)$$

は次数 0 の canonical な解  $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^{-})_{\text{inv}}$  が存在する。ここで  $\wedge \mathfrak{g}$  における微分  $\partial$ , Schouten 括弧  $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$  を

$$\partial(p \otimes y) := p \otimes \partial y, \quad [p \otimes y, p' \otimes y']_{\wedge \mathfrak{g}} := pp' \otimes [y, y']_{\wedge \mathfrak{g}}.$$

と定義することにより  $(S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^{-})_{\text{inv}}$  上に拡張する。以下では (3) の解  $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^{-})_{\text{inv}}$  をひとつ固定しておく。また  $f = \sum_i f'_i \otimes f''_i \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^{-})_{\text{inv}}$  に対して、  $(N_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  上に  $\iota(f)$  を

$$\iota(f)(x \otimes \eta) := \sum_i f'_i x \otimes \iota^{\wedge}(f''_i) \eta.$$

で定義する。  $f$  は nilpotent であるから、  $e^{\iota(f)} : (N_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \rightarrow K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  は有限和であることを注意しておく。

$K'_g(\mathcal{N}) := (\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge g^*)_{\text{inv}}$  は微分,  $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群構造を, それぞれ

$$d'_g := e^{-\iota(f)} \circ d_g \circ e^{\iota(f)}, \quad (-1)^{|c|} (1 \otimes \iota^\wedge(c)).$$

と定めた DG  $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群と考える.

ここで

$$e^{-\iota(f)} \circ (1 \otimes d^\wedge) \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes d^\wedge - \iota(\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge g}) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a)$$

となる ([1, Lemma 2.2] 参照). (3) の解  $f$  を用いれば

$$e^{-\iota(f)} \circ (1 \otimes d^\wedge) \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes d^\wedge - \iota(\sum_j p^j \otimes c_j - \sum_a v^a \otimes e_a) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a).$$

であり,  $K_g(\mathcal{N})$  の微分が  $d_g = 1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$ , であったことを思い出せば,

$$\begin{aligned} e^{-\iota(f)} \circ d_g \circ e^{\iota(f)} &= d_g - \iota(\sum_j p^j \otimes c_j - \sum_a v^a \otimes e_a) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a) \\ &= 1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_j p^j \otimes \iota^\wedge(c_j) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a) \end{aligned} \quad (4)$$

が成り立つことがわかる.

次の写像

$$\tilde{i}: \tilde{K}_g(\mathcal{N}) \hookrightarrow K'_g(\mathcal{N}) \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta|} z \otimes \eta.$$

を定義する.  $x \in \mathcal{N}_{\text{basic}}$  に対しては  $d_{\text{hor}}x = d^{\mathcal{N}}x$  であることに注意すれば

$$d'_g \circ \tilde{i} = \tilde{i} \circ \tilde{d}_g \quad (5)$$

がわかる. よって  $\tilde{i}$  はコチェイン写像である. さらに  $\tilde{i}$  は DG  $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の準同型写像であることがわかる.

定義から  $e^{\iota(f)}: K'_g(\mathcal{N}) \rightarrow K_g(\mathcal{N})$  は DG  $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の同型写像であるから, 写像  $\Psi$  を次の合成

$$\tilde{K}_g(\mathcal{N}) \xrightarrow{\tilde{i}} K'_g(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{\iota(f)}} K_g(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}} \mathcal{N}_{\text{inv}},$$

とすれば,  $\Psi$  はコチェイン写像である. 実際, (2) と (5) によって

$$\begin{aligned} \Psi \circ \tilde{d}_g &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} \circ \tilde{d}_g \\ &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ d'_g \circ \tilde{i} \\ &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ d_g \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} \\ &= d^{\mathcal{N}} \circ e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} = d^{\mathcal{N}} \circ \Psi. \end{aligned}$$



明らかに  $\Psi$  は  $DG(\wedge\mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の準同型写像である。  $\Psi$  は  $z \otimes \eta$  を  $(-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota(f)}\eta) \cdot z$  にうつすので、  $\Psi$  は [1] で定義されたものと似ている。しかし、ともに3つの写像の合成なのだがそのうちの2つが異なるため、これら2つは異なることを注意しておく。

さらに次を得るが、この証明は [1] の Theorem 4.2 の証明と平行である。

**定理 3.4.**  $\mathfrak{g}$  を簡約 Lie 代数、  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とする。このとき

$$\Psi: \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota(f)}\eta) \cdot z$$

は  $DG(\wedge\mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群としてホモトピー同値写像である。  $\square$

証明.  $e^{\iota(f)}: K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  と  $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}: K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}$  は同型写像であるから、  $\tilde{i}: \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  がホモトピー同値写像であることを示せばよい。つまり  $\tilde{i}$  の homotopy inverse  $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  を構成すればよい。

$\mathfrak{g}$  は簡約 Lie 代数であるから、  $\mathfrak{g}$  上に不変な内積  $B$  を定める。  $B$  によって定まる同型写像を  $B^{\sharp}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$  として、  $\wedge\mathfrak{g}^*$  の Casimir 作用素  $\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge}$  を  $\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge} := \sum_a L^{\wedge}(B^{\sharp}(e^a)) \circ L^{\wedge}(e_a)$  と定義する。よく知られているように  $\wedge\mathfrak{g}^* = \ker(\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge}) \oplus \text{im}(\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge})$ ,  $\ker(\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge}) = (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  である。さらに  $\mathcal{L}_0$  を  $1 \otimes \text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge} \in \text{End}(\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge\mathfrak{g}^*)$  の  $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  への制限とすると  $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) = \ker(\mathcal{L}_0) \oplus \text{im}(\mathcal{L}_0)$ ,  $\ker(\mathcal{L}_0) = \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  である。  $\Pi_0$  を  $\text{im}(\mathcal{L}_0)$  に沿った  $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  から  $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  への射影、  $\mathcal{G}_0$  を  $\mathcal{L}_0$  に関する Green 作用素とする。つまり  $\mathcal{G}_0 \circ \Pi_0 = 0$ ,  $\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0 \circ \mathcal{L}_0 = 1 - i \circ \Pi_0$ 。ここで  $i: \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \hookrightarrow K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  は自然な包含写像とする。

$K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  上で

$$h := \sum_a 1 \otimes L^{\wedge}(B^{\sharp}(e^a)) \circ L^{\wedge}(e_a)$$

を考える。そして  $\mathcal{L} := [d'_{\mathfrak{g}}, h]$  とおく。明らかに  $\mathcal{L}$  はコチェイン写像である。さらに  $\ker \mathcal{L} = \ker \mathcal{L}_0$  であることが次のようにわかる:  $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{(j)}$  を  $\wedge^j \mathfrak{g}$  の全ての元の contraction で 0 になる元からなる部分空間とすると、filtration

$$0 = (\wedge\mathfrak{g}^*)_{(0)} \subset (\wedge\mathfrak{g}^*)_{(1)} \subset \cdots \subset (\wedge\mathfrak{g}^*)_{(\dim \mathfrak{g}+1)} = \wedge\mathfrak{g}^*$$

を得る。さらに  $L^{\wedge}(\xi)((\wedge\mathfrak{g}^*)_{(j)}) \subset (\wedge\mathfrak{g}^*)_{(j)}$  であるから  $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})_{(j)} := (\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{(j)})_{\text{inv}}$  は well-defined. よって filtration

$$0 = K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})_{(0)} \subset K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})_{(1)} \subset \cdots \subset K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})_{(\dim \mathfrak{g}+1)} = K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$$

を得る. (4) より  $\mathcal{L}$  において  $[1 \otimes d^\wedge, h]$  以外の全ての項は filtration の次数を少なくとも 1 つ下げることがわかる.  $K'_g(\mathcal{N})$  において

$$[1 \otimes d^\wedge, h] = \sum_a 1 \otimes L^\wedge(B^\sharp(e^a))L^\wedge(e_a) = 1 \otimes \text{Cas}_g^\wedge = \mathcal{L}_0,$$

であるから  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + R$  と表すことができる. ただし  $R$  は filtration の次数を下げる.  $h \circ i \circ \Pi_0 = 0$  から  $\mathcal{L} \circ i \circ \Pi_0 = 0$  を得るが, さらに

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L} \circ (1 - i \circ \Pi_0) \\ &= \mathcal{L}_0 \circ (1 - i \circ \Pi_0) + R \circ (1 - i \circ \Pi_0) \\ &= \mathcal{L}_0 + R \circ \mathcal{G}_0 \circ \mathcal{L}_0 \\ &= (1 + R \circ \mathcal{G}_0) \circ \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

が成り立つ.  $R \circ \mathcal{G}_0$  は filtration の次数を下げるので,  $1 + R \circ \mathcal{G}_0$  は可逆. よって  $\ker(\mathcal{L}) = \ker(\mathcal{L}_0) = \tilde{K}_g(\mathcal{N})$ . 以上のことにより  $K'_g(\mathcal{N}) = \ker(\mathcal{L}) \oplus \text{im}(\mathcal{L})$ ,  $\ker(\mathcal{L}) = \tilde{K}_g(\mathcal{N})$  を得る.

$\mathcal{G}$  を  $\mathcal{L}$  に関する Green 作用素, i.e.,  $\mathcal{G} \circ i \circ \Pi = 0$ ,  $\mathcal{G} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{G} = 1 - i \circ \Pi$  とする. ここで  $\Pi$  は  $\text{im}(\mathcal{L})$  に沿った  $K'_g(\mathcal{N})$  から  $\tilde{K}_g(\mathcal{N})$  への射影とする.  $\mathcal{G}$  はコチェイン写像であるから,  $H := h \circ \mathcal{G}$  は  $[d'_g, H] = 1 - i \circ \Pi$  を満たす. よって  $\tilde{\Pi}: K'_g(\mathcal{N}) \rightarrow \tilde{K}_g(\mathcal{N})$  を

$$\tilde{\Pi}(z \otimes \eta) := (-1)^{|\eta|} \Pi(z \otimes \eta)$$

と定義すれば  $1 - \tilde{i} \circ \tilde{\Pi} = 1 - i \circ \Pi = [d'_g, H]$  が成り立つ. ゆえに  $\tilde{\Pi}$  が求める準同型写像である.  $\square$

## 4 小 Cartan 複体

### 4.1 小 Cartan 複体

**定義 4.1.**  $\mathcal{M}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分空間とする.  $\mathcal{M}$  の Cartan 複体とは  $\text{DG}(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群

$$C_g(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}}, \quad d_g^C := 1 \otimes d^{\mathcal{M}} - \sum_a v^a \otimes \iota^{\mathcal{M}}(e_a),$$

であり, そのコホモロジー  $H_g(\mathcal{M}) := H(C_g(\mathcal{M}), d_g^C)$  が  $\mathcal{M}$  の同変コホモロジーの Cartan モデルと呼ばれる.  $\square$

**注意 4.2.**  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  とする.  $G$  をコンパクト連結 Lie 群,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  の Lie 代数, そして  $M$  を  $G$  が作用している多様体とする. このとき古典的な結果として  $H_g(\Omega(M))$  は  $M$  の同変 (Borel) コホモロジーと同型である.  $\square$

**定義 4.3.**  $\mathcal{M}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分空間とする.  $\mathcal{M}$  の小 Cartan 複体とは DG  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\text{inv}}, \quad \tilde{d}_{\mathfrak{g}}^C := 1 \otimes d^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j),$$

であり, そのコホモロジー  $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \tilde{d}_{\mathfrak{g}}^C)$  が同変コホモロジーの小 Cartan モデルと呼ばれる.  $\square$

Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は  $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$  と  $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$  が擬同型であると主張した. Maszczyk-Weber [6] により [2] におけるその証明にはギャップが指摘されたが, Alekseev-Meinrenken [1] は次を示した.

**定理 4.4** ([1, Theorem 4.2]).  $\mathfrak{g}$  を簡約 Lie 代数,  $\mathcal{M}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分空間とする. 方程式 (3) の任意の解  $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\text{inv}}$  に対して, 合成写像

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は DG  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群としてホモトピー同値写像である. 特に, これは同型写像  $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$  を導く.  $\square$

[2], [6], そして [1] において指摘されているように, この定理と Koszul 双対性を使えば, 下に有界な  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群  $\mathcal{N}$  に対して,  $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  と  $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  が擬同型であることがわかる. 逆に, 定理 3.4 と Koszul 双対性を使えば, 下に有界な  $\mathfrak{g}$ -微分空間  $\mathcal{M}$  に対して,  $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$  と  $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$  が擬同型であることがわかる. これより, Koszul 双対性を使えば, ホモトピーの情報と有界条件を失うことがわかる. そのため本稿では, Lefèvre [5] によって得られた有界条件を保つ圏同値を用いる.

## 4.2 Lefèvre の圏同値

この節では Lefèvre [5] によって得られた結果を復習する. [4] に良い解説があることを注意しておく.

$A$  を augmented DG 代数とし,  $d^A$  を微分,  $\mu^A : A \otimes A \rightarrow A$  を積, そして  $\varepsilon^A : A \rightarrow \mathbb{F}$  を augmentation とする.  $C$  を cocomplete augmented DG 余代数とし,  $d^C$  を微分,  $\Delta^C : C \rightarrow C \otimes C$  を余積, そして  $\varepsilon^C : \mathbb{F} \rightarrow C$  を augmentation とする. ここで余代数  $C$  が cocomplete であるとは,  $C$  が

$$C \rightarrow C^{\otimes n} \rightarrow (C/\mathbb{F})^{\otimes n}, \quad n \geq 2,$$

の kernel の和集合と一致することとする. ただし最初の写像は余積を  $n$  回繰り返したもの, 最後の写像は標準的な射影とする.  $\tau : C \rightarrow A$  を

twisting cochain とする. つまり次数 1 の  $\mathbb{F}$ -線型写像であり,

$$d^A \circ \tau + \tau \circ d^C = \mu^A \circ (\tau \otimes \tau) \circ \Delta^C, \quad \varepsilon^A \circ \tau \circ \varepsilon^C = 0$$

を満たすものとする. DG 右  $A$ -加群  $L$  に対して,  $1 \otimes \Delta^C$  を余積,

$$d^L \otimes 1 + 1 \otimes d^C + (\mu^L \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (1 \otimes \Delta^C).$$

を微分とする cocomplete DG 右  $C$ -余加群  $L \otimes C$  を構成し,  $L \otimes_{\tau} C$  と表すことにする. このとき,  $\text{Mod } A$  を DG 右  $A$ -加群の圏,  $\text{Comc } C$  を cocomplete DG 右  $C$ -余加群の圏とすると, 関手

$$? \otimes_{\tau} C : \text{Mod } A \rightarrow \text{Comc } C$$

を得ることがわかる. 同様にして, cocomplete DG 右  $C$ -余加群  $M$  に対して,

$$d^M \otimes 1 + 1 \otimes d^A - (1 \otimes \mu^A) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (\Delta^M \otimes 1).$$

を微分とする DG 右  $A$ -加群  $M \otimes A$  が構成でき,  $M \otimes_{\tau} A$  と表す. このとき関手

$$? \otimes_{\tau} A : \text{Comc } C \rightarrow \text{Mod } A.$$

を得る. Lefèvre は  $(? \otimes_{\tau} C, ? \otimes_{\tau} A)$  が随伴関手の組であることを示した ([5, Lemme 2.2.1.2] 参照).

以下では  $\tau : C \rightarrow A$  は acyclic であると仮定する. つまり adjunction morphism  $(A \otimes_{\tau} C) \otimes_{\tau} A \rightarrow A$  が擬同型写像であるとする. よく知られているように,  $\text{Mod } A$  は擬同型写像を弱同値, 全射準同型写像を fibration と定めるとモデル圏になる. Lefèvre は次を示した.

**定理 4.5** ([5, Théorème 2.2.2.2]). (a)  $\text{Comc } C$  は  $f \otimes_{\tau} A$  が擬同型となる射  $f$  を弱同値, 単射準同型写像を cofibration と定めるとモデル圏になる.

(b) 関手  $? \otimes_{\tau} C, ? \otimes_{\tau} A$  は quasi-inverse equivalence

$$\text{Ho}(\text{Mod } A) \rightleftarrows \text{Ho}(\text{Comc } C),$$

を導く. ここでモデル圏  $\mathcal{C}$  に対して, ホモトピー圏  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  とは弱同値のクラスによる局所化とする.  $\square$

$A = (Sg^*)_{\text{inv}}, C = (\wedge g^*)_{\text{inv}}$  とする. よく知られた結果を 2 つ復習する. まず  $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$  における primitive な元からなる部分空間  $\mathcal{P}^*$  に対して,  $(\wedge g^*)_{\text{inv}} \cong \wedge \mathcal{P}^*$  が成り立つ. 次に  $\tilde{\mathcal{P}}^* := \mathcal{P}^*[-1]$  を transgression により

$(Sg^*)_{\text{inv}}$  の部分空間と同一視すると,  $(Sg^*)_{\text{inv}} \cong S\tilde{P}^*$  が成り立つ. 以上に注意して,

$$\tau : (\wedge g^*)_{\text{inv}} \cong \wedge P^* \rightarrow P^* \rightarrow S\tilde{P}^* \cong (Sg^*)_{\text{inv}}$$

と定義する. ここで  $\wedge P^* \rightarrow P^*$  は自然な射影,  $P^* \rightarrow S\tilde{P}^*$  は transgression とする. このとき  $\tau$  は acyclic twisting cochain になる. よって定理 4.5(b) により,  $? \otimes_{\tau} (\wedge g^*)_{\text{inv}}, ? \otimes_{\tau} (Sg^*)_{\text{inv}}$  は圏同値

$$\text{Ho}(\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}) \simeq \text{Ho}(\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}) \quad (6)$$

を導くことがわかる.

### 4.3 Chevalley-Koszul 複体との関係

$\Delta$  を  $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$  の余積とすると,  $\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}$  は  $1 \otimes \Delta$  を余積とする cocomplete DG  $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群になる. 一方, 定理 3.4 の用語を用いて, 写像  $\Upsilon : \mathcal{N}_{\text{inv}} \rightarrow \tilde{K}_g(\mathcal{N})$  を合成写像

$$\mathcal{N}_{\text{inv}} \xrightarrow[\sim]{e^{\beta} \circ e^{\alpha}} K_g(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{-\iota(f)}} K'_g(\mathcal{N}) \xrightarrow{\tilde{\Pi}} \tilde{K}_g(\mathcal{N})$$

として定義する. このとき合成写像

$$\mathcal{N}_{\text{inv}} \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \xrightarrow{1 \otimes \Delta} \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \xrightarrow{\Psi \otimes 1} \mathcal{N}_{\text{inv}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}.$$

は  $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  の余積となることがわかる. よって  $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  は cocomplete DG  $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群になる.  $\Upsilon \circ \Psi = 1$  が成り立つことに注意すると,  $\Psi, \Upsilon$  は DG  $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群の準同型写像になることがわかる. さらに定理 3.4 より  $\Psi, \Upsilon$  が擬同型であることも従う. 以下では  $\Psi, \Upsilon$  が  $\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}$  において弱同値であることを示す.

filtered  $C$ -余加群  $M$  が admissible であるとは, filtration  $\{M^i\}$  が exhaustive, かつ  $M^0 = 0$  を満たすとする. Lefèvre は次を示した.

**補題 4.6** ([5, Lemme 2.2.2.5]). cocomplete augmented DG 余代数  $C$  が  $C^0 = \mathbb{F}$  である exhaustive filtration  $\{C^i\}$  をもつならば, admissible filtered DG  $C$ -余加群の間の擬同型は弱同値になる.  $\square$

$C^j := \bigoplus_{i \leq j} (\wedge^i g^*)_{\text{inv}}$  とすれば,  $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$  上に exhaustive filtration

$$\mathbb{F} = C^0 \subset C^1 \subset \dots \subset C^{\dim g} = (\wedge g^*)_{\text{inv}}$$

を得る.  $P$  を  $(\wedge g)_{\text{inv}}$  の primitive な元からなる部分空間として,  $F^j$  を  $\wedge^j P$  の全ての元の contraction で 0 になる元からなる  $\tilde{K}_g(\mathcal{N})$  の部分空間とする. このとき  $\tilde{K}_g(\mathcal{N})$  上に exhaustive filtration

$$0 = F^0 \subset F^1 \subset \dots \subset F^{\dim P+1} = \tilde{K}_g(\mathcal{N})$$

を得る. 同様に  $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  上にも  $(F')^0 = 0$  である exhaustive filtration  $\{(F')^j\}$  を得る. よって, filtered  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -余加群  $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ ,  $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  はともに admissible. 定義から  $\Psi, \Upsilon$  が filtration を保つことは従うので, 補題 4.6 により次が成り立つ.

**定理 4.7.**  $\mathfrak{g}$  を簡約 Lie 代数,  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とする. このとき

$$\Psi : \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|} (e^{\iota(f)} \eta) \cdot z$$

は cocomplete DG  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -comodules としての弱同値である.  $\square$

これと定理 4.5 (a) から, 任意の  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群  $\mathcal{N}$  に対して, DG  $(S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}}$ -加群としての擬同型写像

$$\Psi \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}} : \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}} \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}}, \quad (7)$$

を得る. ここで, 簡単のため,  $\otimes_{\tau}$  の代わりに  $\otimes$  と表す.

$\sim$  を  $\text{Mod } (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}}$  における擬同型を表すことにすると, 任意の  $\mathfrak{g}$ -微分空間  $\mathcal{M}$  に対して

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) &\cong \mathcal{M}_{\text{inv}} \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}} \\ &\sim (W_{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}} \\ &\sim (W_{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{M})_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}} \\ &\cong (S_{\mathfrak{g}^*} \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}} \\ &\sim (S_{\mathfrak{g}^*} \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \\ &= C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで最初の  $\sim$  は  $W_{\mathfrak{g}}$  の acyclicity から導かれ, 次の  $\sim$  は擬同型写像 (7) から得られ, そして最後の  $\sim$  は圏同値 (6) からわかる.  $\mathcal{M}_{\text{inv}}$  上の余積は  $\gamma := \sum_j \iota^{\mathcal{M}}(c_j) \otimes c^j$  を用いて

$$\mathcal{M}_{\text{inv}} = \mathcal{M}_{\text{inv}} \otimes \mathbb{F} \xrightarrow{e^{\gamma}} \mathcal{M}_{\text{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}},$$

と定義すれば, 関手  $? \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}}$  は  $\mathcal{M}_{\text{inv}}$  を  $\mathcal{M}_{\text{inv}} \otimes (S_{\mathfrak{g}^*})_{\text{inv}}$  にうつすが, その微分は  $d^{\mathcal{M}} \otimes 1 - \sum_j \iota^{\mathcal{M}}(c_j) \otimes p^j$  となることを注意しておく. 以上のことにより, 任意の  $\mathfrak{g}$ -微分空間  $\mathcal{M}$  に対して (ここで下に有界な仮定は必要ではない),  $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$  と  $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$  は擬同型であることがわかる. 逆に, この主張と圏同値 (6) を用いれば直ちに定理 4.7 が従う.

## 参考文献

- [1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 3, 479–521.
- [2] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.
- [3] V. Guillemin, S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag, 1999.
- [4] B. Keller, *A-infinity algebras, modules and functor categories*, math.RT/0510508.
- [5] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les  $A_\infty$  catégories*, math.CT/0310337.
- [6] T. Maszczyk, A. Weber, *Koszul duality for modules over Lie algebras*, Duke Math. J. 112 (2002), no. 3, 511–520.