

## On existence of isovariant maps under Borsuk-Ulam type inequalities

京都府立医科大学大学院医学研究科 長崎生光 (Ikumitsu Nagasaki)  
Graduate School of Medical Science, Kyoto Prefectural University of Medicine  
京都産業大学理学部 牛瀧文宏 (Fumihito Ushitaki)  
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

### 1 序論

$m$  と  $n$  を、 $m \geq n$  なる関係を満たす、正の整数とする。このとき Borsuk-Ulam の定理が主張するところは、 $m$  次元球面  $S^m$  から  $\mathbb{R}^n$  への任意の連続写像  $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  に対して、ある  $a \in S^m$  が存在して、 $f(a) = f(-a)$  となることである。従って、これは一つの存在定理である。よく知られているように、この定理は群作用の言葉を用いると次のように書き換えられる。興味深いことに、この形で表した場合、その対偶をとると非存在定理となる。

**Proposition 1.1** (Borsuk-Ulam Theorem).  $S^m$  と  $S^n$  に位数 2 の巡回群  $C_2$  が対心的に作用しているとする。連続な  $C_2$  写像  $f: S^m \rightarrow S^n$  が存在すれば  $m \leq n$  である。

本稿では、このような群作用を持つ空間の間の同変写像や後に紹介する等変写像の存在から、群の作用する空間の次元に関する様々な不等式を導く形の定理を **Borsuk-Ulam 型定理** と呼ぶ。また、Borsuk-Ulam 型定理やその逆の形の定理に現れる、空間の次元に関する様々な不等式を **Borsuk-Ulam 型不等式** と呼ぶ。

今、 $G$  を群とし、 $X$  と  $Y$  を  $G$ -空間とする。この小論を通し、写像は連続であるとする。 $G$ -写像  $\varphi: X \rightarrow Y$  が存在すれば、 $x \in X$  と  $\varphi(x) \in Y$  のアイソトロピー部分群の間には常に  $G_x \subset G_{\varphi(x)}$  なる関係が成り立つ。 $G$ -写像  $\varphi: X \rightarrow Y$  が  $G$ -等変写像 ( $G$ -isovariant map) であるとは、任意の  $x \in X$  に対して、 $G_x = G_{\varphi(x)}$  が成り立つことを言う。これは、「 $X$  の同じ  $G$ -軌道上の二点  $x_1, x_2$  について、 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  が成り立つならば、 $x_1 = x_2$  が成り立つ」という条件と同値である。2つの  $G$ -等変写像  $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$  が  $G$ -ホモトピー同値であるとす

る。φ から ψ への  $G$ -ホモトピー  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  が  $G$ -等変写像であるとき、 $F$  を φ から ψ への  $G$ -等変ホモトピーといい、φ と ψ は  $G$ -等変ホモトピー同値であるという。

$X$  から  $Y$  への  $G$ -等変写像の  $G$ -等変ホモトピー類を  $[X, Y]_G^{\text{iso}}$  と書く。さて、「同変写像」を「等変写像」に置き換えても、Borsuk-Ulam 型の定理が成立することが、A. G. Wasserman により示されている。

**Proposition 1.2** (Isovariant Borsuk-Ulam Theorem; [5]).  $G$  を有限可解群とする。  $V, W$  を  $G$ -表現とする。  $G$ -等変写像  $f: V \rightarrow W$  が存在すれば、

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つ。

その後、等変写像と Borsuk-Ulam 型の不等式の間関係についての研究としては参考文献の [1] がある。続いて [2] において、有限群  $G$  に対し、自由  $\text{mod}|G|$  ホモロジー球面から  $G$ -表現球面への  $G$ -等変写像が存在すれば、Borsuk-Ulam 型の不等式が成立することが示された。同時にそれらの論文においては、Borsuk-Ulam 型定理の逆問題も考察された。[2] では  $G$  が  $n$  次巡回群  $C_n$  の場合について、以下の Theorem A と同じ Borsuk-Ulam 型の不等式から  $C_n$ -等変写像の存在を示し、それらの  $C_n$ -等変ホモトピー型での分類問題の解として、Hopf 型定理が示された。また [4] では、四元数群の場合に、Borsuk-Ulam 型の不等式を仮定して  $Q_8$ -等変写像の存在を示した。本稿の目的は、それらの結果を単位群を除く一般の有限群  $G$  に対して拡張して、考察を進める点にある。すなわち、 $G$  の  $SW$  への作用について、その特異集合を  $SW^{>1} = \bigcup_{\{1\} \neq H \leq G} SW^H$  で定義するとき、次の結果を得た。

**Theorem A** .  $G$  を有限群、 $M$  を自由  $G$ -作用をもつ  $m$ -次元弧状連結  $C^\infty$  閉多様体であるとする。  $W$  を  $G$  の忠実なユニタリー表現とする。不等式

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1} \tag{1}$$

がなりたてば、 $M$  から  $G$ -表現球面  $SW$  への  $G$ -等変写像  $f: M \rightarrow SW$  が存在する。ただし、 $SW^{>1} = \emptyset$  の場合は  $\dim SW^{>1} = -1$  とおく。  $\square$

続いて、上の定理で存在が保証された  $G$ -等変写像の  $G$ -等変ホモトピー類がただ一つしか存在しない場合について、その十分条件を Borsuk-Ulam 型の不等式で与えたのが次の結果である。

Theorem B . Theorem A の条件の下、

$$\dim M + 1 < \dim SW - \dim SW >^1$$

が成り立てば、 $M$  から  $SW$  への任意の  $G$ -等変写像は  $G$ -等変ホモトピー同値である。  $\square$

(1) 式で等号が成立している場合については、等変写像の分類問題が生じる。これに関しては、多様体  $M$  が向き付け可能で、 $G$  の  $M$  への作用が向きを保つ場合について、[2] で用いた多重写像度 (multi-degree) を一般化することにより解決される見通しであるが、本稿では述べない。この小論の続く節は次のような内容で構成される。2 節で同変障害理論に関して、必要な箇所を文献 [3] より引用する。3 節で定理 A を証明し、4 節では定理 B を証明する。

## 2 同変障害理論の復習

Theorem A と Theorem B の証明には同変障害理論を用いる。読者の便宜のため、この小論の設定のもとで使用する諸概念を簡単にまとめておく。記号や命題は文献 [3] のものを元にして引用である。

$G$  を有限群とする。まず、同変コホモロジー群を導入することから始める。 $(X, A)$  を相対  $G$ -CW 複体で  $X \setminus A$  上に  $G$  が自由に作用しているものとする。すなわち、各  $n \geq 0$  に対して、 $X_n$  は  $X_{n-1}$  に軌道型  $G(= G/\{e\})$  の  $n$ -胞体 (これらは自由  $n$ -胞体 ともいわれる) を接着することで得られ、 $X_0 \supset A$  であり、 $n < 0$  に対しては  $X_n = A$  となっている。 $C_*(X, A)$  を次のチェイン複体とする。

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{d} H_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

ただし、ホモロジー群は整数係数特異ホモロジー群で、上の  $d$  は三対  $(X_{n+1}, X_n, X_{n-1})$  のホモロジー完全系列の中の境界準同型写像である。

$X$  上の  $G$ -作用で  $X_n$  は不変であって、これは  $H_n(X_n, X_{n-1})$  上の  $G$ -作用を誘導する。従って  $H_n(X_n, X_{n-1})$  は左  $\mathbb{Z}G$ -加群になり、 $C_*(X, A)$  はこのような加群の集まりで構成されるチェイン複体となる。 $\pi$  を  $\mathbb{Z}G$ -加群とする。このとき、

$$C_G^*(X, A; \pi) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X, A); \pi)$$

は同変チェーン複体である。そのコホモロジー群を  $\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi)$  と表す。 $\mathbb{Z}G$ -加群  $\pi$  を  $X/G \setminus A/G$  上の局所係数系  $\{\pi\}$  として捉えることで、同型

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi) \cong H^*(X/G, A/G; \{\pi\})$$

が成立する。

さて、 $Y$  を弧状連結で  $n$ -単純な  $G$ -空間とする。すなわち、 $\pi_1(Y, y)$  が  $\pi_n(Y, y)$  に自明に作用する空間である。ただし、 $n \geq 1$  とする。 $Y$  についての上記の仮定より基点つきのホモトピー類を自由ホモトピー類に写す自然な写像  $\pi_n(Y, y) \rightarrow [S^n, Y] = \pi_n(Y)$  は全単射である。従って、 $Y$  上の  $G$ -作用は  $\pi_n(Y)$  上の  $G$ -作用を矛盾なく定義し、その結果、 $\pi_n(Y)$  は  $\mathbb{Z}G$ -加群となる。よって、同型

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_n(Y)) \cong H^*(X/G, A/G; \{\pi_n(Y)\})$$

が成り立つ。これに加えて、 $G$  が  $\pi_n(Y)$  に自明に作用するなら、

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_n(Y)) \cong H^*(X/G, A/G; \pi_n(Y))$$

が成り立つ。同変障害理論により、次の事柄が成り立つ。

**Proposition 2.1** ([3]).  $G$  を有限群とする。 $(X, A)$  を相対  $G$ -CW 複体で  $X \setminus A$  上に  $G$  が自由に作用しているもの、 $Y$  を  $n$ -単純な  $G$ -空間とする。このとき、次が成り立つ。

1.  $\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_{* - 1}(Y)) = 0$  であれば、任意の  $G$ -写像  $f: A \rightarrow Y$  は  $G$ -写像  $F: X \rightarrow Y$  に拡張する。
2.  $G$ -写像  $f: A \rightarrow Y$  が二つの  $G$ -写像  $F, F': X \rightarrow Y$  に拡張し、 $\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_*(Y)) = 0$  であるとする。このとき、 $F$  と  $F'$  は  $G$ -ホモトピー同値である。

### 3 $G$ -等変写像の存在

この節では、Theorem A の証明を行う。 $G$  を有限群、 $M$  を自由  $G$ -作用をもつ  $m$  次元弧状連結  $C^\infty$  閉多様体とする。また、 $W$  を忠実なユニタリー  $G$ -表現空間とする。

$$SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$$

とおく。Theorem A では  $\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$  を仮定しているので、 $\dim SW - \dim SW^{>1} \geq 1$  であって、特に  $SW_{\text{free}} \neq \emptyset$  である。不動点集合を抜いたので、 $G$  の  $SW_{\text{free}}$  への作用は自由である。 $M$  への  $G$ -作用は自由であることを仮定しているので、 $M$  から  $SW$  への等変写像の存在問題は、 $M$  から  $SW_{\text{free}}$  への  $G$ -写像の存在問題に帰着される。このとき、この障害は  $\mathfrak{H}_G^*(M, \pi_{*-1}(SW_{\text{free}}))$  にある。ここで、

$$k = \dim SW - \dim SW^{>1}$$

とおく。 $G$  の各部分群  $H$  に対して、 $SW^H$  は球面であり、ここではユニタリー表現を考えていることより、 $SW^H \subsetneq SW$  であれば、 $\dim SW - \dim SW^H \geq 2$  である。今、 $SW_{\text{free}} \neq \emptyset$  であるから、 $k \geq 2$  となる。定義より  $SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$  であって、従って取り除く空間の余次元が 2 以上あるので、 $SW_{\text{free}}$  は弧状連結である。さらに、次が成り立つ。

**Lemma 3.1.** 上で定義した  $SW_{\text{free}}$  は  $(k-2)$ -連結である。

**Proof.**  $d \leq k-2$  であるような  $d$  に対して、 $\pi_d(SW_{\text{free}}) = 0$  を証明する。 $\varphi: S^d \rightarrow SW_{\text{free}}$  を考えると、

$$(d+1) + \dim SW^{>1} < \dim SW$$

であれば、 $\varphi$  は null homotopic である。したがって、 $d \leq k-2$  のとき、 $\pi_d(SW_{\text{free}}) = 0$  である。□

Theorem A の証明を完成させるに当たり、まず  $k > 2$  の場合を考えよう。このとき、Lemma 3.1 より、 $SW_{\text{free}}$  は単連結になる。従って、 $SW_{\text{free}}$  は全ての正の整数  $q$  に対して  $q$ -単純である。よって

$$\mathfrak{H}_G^*(M, \pi_{*-1}(SW_{\text{free}})) \cong H^*(M/G; \{\pi_{*-1}(SW_{\text{free}})\})$$

が成り立つ。 $q \leq k-1$  の場合は Lemma 3.1 より  $\pi_{q-1}(SW_{\text{free}}) = 0$  であるから、 $\mathfrak{H}_G^q(M, \pi_{q-1}(SW_{\text{free}})) = 0$  である。 $q \geq k$  のときは、仮定の不等式を使う。それによると、 $\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1} = k$  であるので、

$$\dim M \leq k-1 < q$$

が成り立つ。よって、 $q \geq k$  なる  $q$  に対しても、 $H^q(M/G; \{\pi_{q-1}(SW_{\text{free}})\}) = 0$  が示された。以上より、 $\mathfrak{H}_G^*(M, \pi_{*-1}(SW_{\text{free}})) = 0$  が示された。

$k = 2$  のときは、 $\dim M \leq 1$  となるので、このとき単位群以外の群が自由に作用できる弧状連結な閉多様体を考えると、 $M$  は  $S^1$  に微分同相であって、 $G$  は有限巡回群である場合に限られる。このとき、次が成立する。

**Lemma 3.2** ([2]).  $G$  が有限巡回群で  $k = 2$  のとき、 $\pi_1(SW_{\text{free}})$  は可換である。従って、 $SW_{\text{free}}$  は 1 単純である。  $\square$

よって、 $q \geq 2$  に対して  $\mathfrak{H}_G^q(M, \pi_{q-1}(SW_{\text{free}}))$  が定義されるが、これらは全て消えている。

以上より、 $G$  を任意の有限群とすると、自由な  $G$ -作用をもつ  $m$  次元多様体  $M$  から、自由な  $G$ -作用をもつ  $SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$  への  $G$ -写像の存在が証明された。これは  $M$  から  $SW$  への  $G$ -等変写像が存在することを意味する。

#### 4 Borsuk-Ulam 型不等式で等号が成り立っていない場合

この節では、Theorem B の証明を行う。 $M$  への  $G$ -作用は自由であるから、

$$[M, SW]_G^{\text{isov}} = [M, SW_{\text{free}}]_G$$

が成り立つ。したがって、不等式

$$\dim M + 1 < \dim SW - \dim SW^{>1} = k$$

が成り立っているとき、 $[M, SW_{\text{free}}]_G$  の構造を決定する。 $M$  から  $SW_{\text{free}}$  への写像の  $G$ -ホモトピー型による分類には  $\mathfrak{H}_G^*(M; \pi_*(SW_{\text{free}}))$  に障害が現れる。

$k \geq 2$  であったが、 $k = 2$  のときは  $\dim M = 0$  となるので、このとき単位群以外の群が自由に作用できる弧状連結な閉多様体は存在しない。したがって、 $k > 2$  の場合を考えればよい。このとき前節で示したように、 $SW_{\text{free}}$  は全ての正の整数  $q$  に対して  $q$ -単純である。よって、

$$\mathfrak{H}_G^*(M, \pi_*(SW_{\text{free}})) \cong H^*(M/G; \{\pi_*(SW_{\text{free}})\})$$

が成り立つ。 $q \leq k - 2$  のときは、Lemma 3.1 より  $\pi_q(SW_{\text{free}}) = 0$  であるので、 $\mathfrak{H}_G^*(M; \pi_*(SW_{\text{free}})) = 0$  である。 $q \geq k - 1$  なる  $q$  に対しては、コホモロジーの次元が  $M/G$  の次元を超えてしまうので、 $H^q(M/G; \{\pi_q(SW_{\text{free}})\}) = 0$  が示される。

従って、 $\mathfrak{H}_G^*(M; \pi_*(SW_{\text{free}})) = 0$  となり、これが求める結果である。

## 参考文献

- [1] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743–757.
- [2] I. Nagasaki, and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free  $C_n$ -manifolds to representation spheres*, in preparation.
- [3] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.
- [4] F. Ushitaki, *Isovariant maps and Borsuk-Ulam type Theorems*, Proceedings of 34th Symposium on Transformation Groups, ed. by T.Kawakami, Wing Co. Ltd. (2007), 84–93.
- [5] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991), 155–161.