

散乱理論と逆問題

筑波大学数学系 磯崎 洋

散乱理論と逆問題に関する話題について解説する。逆問題は茫漠とした広大な分野である。これを研究するには

- (1) 理論的にはどこまで分かるのか?
- (2) 現実はどうか?
- (3) 数学として何が面白いのか?

の3点に留意するのが肝要であろう。

1. SCHRÖDINGER 作用素

1.1. 散乱. 数学で散乱といえば通常次のことを意味している。非有界な領域上で波動現象を考える。有界な領域で媒質が変化しておれば波がその部分を通過するとき波形が乱される。この波形の変化は減衰しつつも無限遠まで到達する。無限遠での波は第一近似としてはあたかも媒質の変化がなかったかのように振舞う。これが漸近完全性である。しかしさらに精細な観察をすれば、媒質に関する情報が無限遠での波に含まれているであろう。これを調べるのが逆問題である。散乱の逆問題を考えるには時間に依存する波動方程式を調べる方法と、固有振動に注目して定常的な波動方程式の解の無限遠での性質を調べる方法とがある。現状では両者の得意な守備範囲が異なっている。以下では定常的方法を説明する。

1.2. 一般固有函数と S 行列. \mathbb{R}^n 上で Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta + V(x) \tag{1.1}$$

を考える。 $V(x)$ が速方で十分速く減少するときに次のような函数 $\psi(x, \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, が存在する: $\psi(x, \xi)$ は $(H - |\xi|^2)\psi = 0$ をみたし

$$\psi(x, \xi) \sim e^{ix \cdot \xi} + \frac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{(n-1)/2}} A(E, \theta, \omega), \quad r \rightarrow \infty,$$

($r = |x|, \theta = x/r, \omega = \xi/|\xi|, E = |\xi|^2$) という漸近挙動をもち、任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ は

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x, \xi) \tilde{f}(\xi) d\xi + \sum_j (f, \psi_j) \psi_j(x),$$

$$\tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x, \xi)} f(x) dx \tag{1.2}$$

と展開される。ここで ψ_j は H の離散スペクトルに対応する固有ベクトルである。 $V(x) = 0$ のときは $\psi(x, \xi) = e^{ix \cdot \xi}$ であり、(1.2) は Fourier の反転公式となる。従って (1.2) は一般化された Fourier 変換と呼ばれる。 $\psi(x, \xi)$ は一般化された固有関数と呼ばれ (以下、簡単のため単に固有関数と呼ぶ)、 $A(E, \theta, \omega)$ は散乱振幅と呼ばれる。

散乱理論と逆問題

1.3. S 行列. 量子力学的散乱実験は次のようにして行われる. 標的となる粒子を設置し, ω 方向からエネルギー E を持った粒子を単位時間あたり一個ずつ衝突させる. このとき θ 方向には $|A(E, \theta, \omega)|^2$ 個の粒子が散乱される. これは散乱断面積と呼ばれ物理的に観測される量である.

$$S(E)f(\theta) = f(\theta) - C(E) \int_{S^{n-1}} A(E, \theta, \omega) f(\omega) d\omega$$

という積分作用素を考えれば ($C(E)$ は適当な定数である), これは $L^2(S^{n-1})$ 上のユニタリ作用素になる. これを S 行列と呼ぶ. これは元の物理系と等価なものであろう, すなわち S 行列から元の Schrödinger 作用素 $H = -\Delta + V(x)$ が再構成できるであろうと信じられている.

1.4. 定常 Schrödinger 作用素の基本問題. ポテンシャル $V(x)$ が与えられたとして上のような固有函数の完全系と S 行列を求めることを順問題, 逆に S 行列から $V(x)$ を求める問題を逆問題と呼ぶ. これは散乱実験により粒子を決定するための理論的基盤を与えるものである. 1次元の順問題は長い歴史をもつ. 1次元の逆問題は 1950 年代に解かれた. 粒子数が 2 個の場合の高次元の順問題は 1960, 70 年代に詳しく研究された. 3 個以上の粒子からなる系の時間に関する挙動 (いわゆる漸近完全性の問題) は 1980 年代後半に詳しく研究された. 高次元における散乱の逆問題は 2 粒子系の場合でも完全には解決されていない.

2. 多次元逆問題に関する FADDEEV の理論

2.1. 高エネルギー Born 近似. ここでの話題の中心は 2 体系の高次元逆問題である. $n \geq 2$ のとき, 1.2 節で定義された散乱振幅は次のように書ける.

$$A(E; \theta, \omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sqrt{E}(\theta-\omega) \cdot x} V(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sqrt{E}\theta \cdot x} V(x) R(E+i0) \left(e^{i\sqrt{E}\omega \cdot y} V(y) \right) dx. \quad (2.1)$$

ここで $R(z) = (H - z)^{-1}$ である. $R_0(z) = (-\Delta - z)^{-1}$ とおけば $R(z) = R_0(z)(1 + VR_0(z))^{-1}$ と書ける. $E \rightarrow \infty$ のとき $R(E+i0) \rightarrow 0$ となることが分かっている. そこで $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して $\theta, \omega \in S^{n-1}$ を $\sqrt{E}(\theta - \omega) = \xi$ とするようを選びながら, $E \rightarrow \infty$ とすれば

$$\lim_{E \rightarrow \infty} A(E; \theta, \omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} V(x) dx$$

となる. よって高次元においては散乱振幅の高エネルギー極限から $V(x)$ が再構成できる. これを通常 Born 近似と呼んでいる. このことは一見, 高次元逆問題が容易であるかのような印象を与えるが, 実はこの議論は次のような点で不満足なものである. 高エネルギーにおいては非相対論的な Schrödinger 方程式による物理の記述が正しくない. また, 1次元の Gelfand-Levitan-Marchenko の理論では与えられた函数があるポテンシャルに対応する S 行列であるための必要十分条件が得られていたのだが, 上のような高エネルギー極限だけではそのような S 行列の特徴づけができない. ここに高次元逆散乱問題の大きな困難がある.

2.2. Faddeev の Green 作用素. 1次元逆散乱問題の解決の重要な鍵は Gelfand-Levitan 方程式と呼ばれる Volterra 型の積分方程式であった. Faddeev は Gelfand-Levitan 理論を高次元化す

るために次のような Green 作用素を導入した：

$$\tilde{G}(\zeta)f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{e^{ix \cdot \xi}}{\xi^2 + 2\zeta \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.2)$$

ここで $\hat{f}(\xi)$ は f の Fourier 変換であり, $\zeta \in \mathbf{C}^n$ は $\zeta^2 = \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 = E > 0$ をみたす複素パラメータである. この Green 作用素は方程式 $(-\Delta - E)u = f$ において $u = e^{i\zeta \cdot x} v$ というゲージ変換をして得られる. (2.1) 式が示すように, 物理的な散乱振幅はグリーン作用素 $R(E + i0)$ で表示できる. そこで通常用いられる Green 作用素の代わりに Faddeev の Green 作用素を用いて作った散乱振幅を Faddeev の散乱振幅と呼ぼう. Faddeev は物理的な散乱振幅と Faddeev の散乱振幅の間に積分方程式が成立し, それが解けることを示した. この散乱振幅を用いて Faddeev は Gelfand-Levitan 方程式の高次元 analogue を導き, S 行列からポテンシャルを求める手続きを示した ([3]). この仕事は多次元逆問題が解けるための作用素の代数的からくりを見事に説明している. しかし途中の評価式が不足しているため議論に形式的なところがあって, この仕事をどこまで受け入れていいのかよく分からない. [7] は Faddeev の理論の解説であり, [9] においては今日の段階で Faddeev の議論を正当化できる部分の証明を与えている.

2.3. $\bar{\partial}$ -理論. Faddeev の散乱振幅は (2.2) から分るように, ζ という複素パラメータを含んでいる. それを $A_F(\sqrt{E}; \theta, \omega, \zeta)$ と書こう. さらに $\xi = \sqrt{E}(\theta - \omega)$ とおいて $A_F(\sqrt{E}; \theta, \omega, \zeta)$ を $T(\xi, \zeta)$ と書く. Nachman [17], Khenkin-Novikov [15] は $T(\xi, \zeta)$ が ζ の函数としては

$$\mathcal{V}_\xi = \{\zeta \in \mathbf{C}^n; |\zeta| > C, \text{Im} \zeta \neq 0, \xi^2 + 2\xi \cdot \zeta = 0\}$$

という複素多様体上の函数とみなされ, この上で

$$\bar{\partial}_\zeta T(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^n A_j(\xi, \zeta) d\bar{\zeta}_j,$$

$$A_j(\xi, \zeta) = -(2\pi)^{1-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} T(\xi - \eta, \zeta + \eta) T(\eta, \zeta) \eta_j \delta(\eta^2 + 2\zeta \cdot \eta) d\eta$$

という方程式を満たしていることを示した. さらに \mathcal{V}_ξ 上の Bochner-Martinelli 型の積分公式を用いれば $K(\zeta, \zeta_0)$ を \mathcal{V}_ξ 上の適当な微分形式として

$$\hat{V}(\xi) = T(\xi, \zeta_0) + \int_{\partial \mathcal{V}_\xi} T(\xi, \zeta) K(\zeta, \zeta_0) + \int_{\mathcal{V}_\xi} \sum_{j=1}^n A_j(\xi, \zeta) d\bar{\zeta}_j \wedge K(\zeta, \zeta_0) \quad (2.3)$$

というポテンシャルの積分表示が得られる. これは次のような意味でも興味深い: \mathbf{R}^n 上の函数 $V(x)$ に対して $V(x) \rightarrow T(\xi, \zeta)$ という fibred space $\mathbf{R}^n \times \mathcal{V}_\xi$ 上の函数を対応させる変換が存在し, (2.3) という反転公式が成り立つ. これは非線形の積分変換の反転公式である.

2.4. 境界値逆問題. EIT (Electrical Impedance Tomography) と呼ばれる医学・工学上の技術がある. \mathbf{R}^n 内に有界な電気伝導体 Ω を考える. $\gamma(x)$ を Ω の電気伝導度とし, $u(x)$ を電位ポテンシャルとすれば

$$\nabla \cdot (\gamma(x) \nabla u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.4)$$

が成り立つ. $u(x)|_{\partial\Omega}$ は物体表面での電位であり, $\gamma(x) \partial u / \partial n|_{\partial\Omega}$ (n は境界の単位外法線ベクトル) は物体表面での電流である. (2.4) に対する境界値逆問題は次のようなものである. 境界デー

タの集合

$$\left\{ \left(u \Big|_{\partial\Omega}, \gamma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} \right); \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 \text{ in } \Omega \right\} \quad (2.5)$$

から $\gamma(x)$ を再構成せよ.

$u(x)|_{\partial\Omega}$ を与えれば, (2.4) に対する Dirichlet 問題の解は一意的に定まる. そこで $u(x)|_{\partial\Omega}$ に $\gamma(x)\partial u/\partial n|_{\partial\Omega}$ を対応させる写像 Λ_γ を Dirichlet-Neumann 写像という. Λ_γ から $\gamma(x)$ を求める問題を通常, 境界値逆問題と呼んでいる. 勿論 Neumann-Dirichlet 写像を用いる定式化も考えられる. $v = \sqrt{\gamma(x)}u$ とおけば v は Schrödinger 方程式

$$-\Delta v + qv = 0, \quad q = \frac{\Delta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}$$

を満たす. 境界値逆問題とコンパクト台をもつポテンシャルに対する逆散乱問題とは同値である. すなわち D-N 写像 から散乱振幅を構成することが出来, 逆も可能である. 境界値逆問題にも Faddeev の Green 関数は有効であった ([21], [17], [15]). (2.2) のような Green 関数を用いるということは $e^{ix \cdot k}$ という指数的に増加する Helmholtz 方程式の解を用いることを意味する. 実はこの関数は Calderón が境界値逆問題を定式化して先駆的な結果を出した時に用いられている.

2.5. 境界条件の問題. 現実的には EIT の数学的定式化の際には境界条件が重要である. 実際には物体表面におく電極は有限の大きさであり, また電極間にある程度の距離をおかなければ周波数の高い波を使うことはできない. D-N 写像は無限に小さい電極を連続的に並べることに相当するが, この意味では現実から隔たりがあり, 実際のデータとくい違いがある. より実際的な定式化として, gap model, shunt model, complete electrode model 等が提唱されている. 最後の model が最も現実のデータと符合するとされているが, そこでは電極と物体表面との間の作用を考慮するため Robin 境界条件が用いられている ([20]). このことから境界値逆問題の数学的定式化は, 現実と対比させながらさらに研究する余地があるように思われる.

2.6. Gelfand の逆問題. しかし D-N 写像は理論的に重要なものであることは間違いない. 1次元の境界値逆問題で次の定理 (Borg-Levinson) が知られている. Dirichlet 問題

$$-u'' + V(x)u = \lambda u, \quad (0 < x < 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ と正規化された固有ベクトルの微分の境界値 $\varphi_1'(0), \varphi_2'(0), \dots$ から $V(x)$ が定まる. この事実の高次元化が Gelfand の逆問題と呼ばれるもので, \mathbb{R}^n の有界領域 Ω での Dirichlet 問題

$$(-\Delta + V(x))u = \lambda u, \quad (x \in \Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ と正規化された固有ベクトルの境界での法線微分 $\partial\varphi_1/\partial n, \partial\varphi_2/\partial n, \dots$ から $V(x)$ が定まることが知られている. この事実は一般の Riemann 多様体上の境界値逆問題に対しても成立する ([1]). 実はこの境界スペクトルデータの組 $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots, \partial\varphi_1/\partial n, \partial\varphi_2/\partial n, \dots$ を与えることと上の Dirichlet 問題に対する Dirichlet-Neumann 写像

$$\Lambda_V(\lambda)f = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega},$$

$$(-\Delta + V(x) - \lambda)u = 0, \quad (x \in \Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f$$

をすべてのエネルギー λ に対して与えることは同等である。実際 $\Lambda_V(\lambda)$ は形式的には

$$\Lambda_V(x, y; \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}(y)}{\lambda_j - \lambda}$$

という積分核をもっている。D-N 写像は多様体上の波動方程式の散乱に関する逆問題においても重要である ([18])。

2.7. 一つのエネルギーからの逆散乱. 2.1 節で述べたように現実問題としては Schrödinger 方程式の逆散乱問題に高エネルギーのデータを用いない方がよい。Faddeev の Green 函数を用いる方法のすぐれた副産物として、入射粒子が一つの固定したエネルギーをもつ場合の逆散乱問題への応用があげられる ([17], [15])。この手法は層状媒質における波動の逆散乱問題 ([6], [7])、原子核物理における光学模型に対する逆散乱問題 ([14]) などの物理的に重要な問題に応用することができる。これらの問題では前に述べた高エネルギー Born 近似が通用しないのである。(しかし例えば実際の電磁波の散乱問題においては High frequency Born approximation がよく使われており、かなりの精度がある。)

前者が扱うのは \mathbb{R}^n においてある平面を境に 2 つの媒質が接しており、しかも波の伝播速度がそれぞれの媒質において異なった定数であるという状況が不連続に擾動された場合の逆散乱問題である。大気や海洋中ではこの様な状況が実際に起こる。また地球内部は層状構造をしているため、地震波に対する逆問題を考える第一ステップとしてもこの問題は重要である。

後者が扱うのは原子核物理学における多体系の逆散乱問題である。この場合にはたくさんの散乱状態が生ずるのだが多体 Schrödinger 方程式を具体的に解くのは不可能であるため何らかの近似法を導入する必要が起こる。光学模型は複素ポテンシャルを導入することによって必要なチャネルだけを取り出そうとする近似法であるが、実際の実験データをよく再現し、今日では原子核物理の基礎的知識として用いられている。実際の問題では相互作用がエネルギーにも依存するため固定したエネルギーからの逆散乱問題を考えることが重要になる。

3. 逆問題と双曲空間

3.1. 双曲空間への埋め込み. 双曲空間が多次元の逆問題を考える手段になり得る、ということが [10] によって指摘された。 \mathbb{R}^n での Schrödinger 方程式

$$(-\Delta + q(x))u = 0 \quad (3.1)$$

の解 u に対して $v = x_n^{(n-2)/2} u$ とおけば、 v は

$$\left(-x_n^2 \Delta_x + (n-2)x_n \partial_n - \frac{n(n-2)}{4} + x_n^2 q(x)\right)v = 0 \quad (3.2)$$

を満たす。ここで $\partial_n = \partial/\partial x_n$ である。

$$H_0 = -x_n^2 \Delta + (n-2)x_n \partial_n$$

は双曲空間の上半空間モデル \mathbb{H}^n の Laplace-Beltrami 作用素である。よってユークリッド空間における Schrödinger 方程式 (3.1) は双曲空間における Schrödinger 方程式 (3.2) とみなすことができる。このことから次のような境界値逆問題の解法が生まれる。 \mathbb{R}^n 内の有界領域 Ω 上で (3.1) に対する境界値逆問題を考える。 $\Omega \subset \subset \mathbb{R}_+^n$ と思ってよい。以下では \mathbb{H}^n の点を (x, y) , $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y > 0$, と表す。

(Step 1) 変換 $v = y^{(n-2)/2}u$ により \mathbf{H}^n における境界値問題

$$(H_0 + \tilde{q})v = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = f \quad \text{on } \partial\Omega$$

($\tilde{q} = y^2q - n(n-2)/4$) を考える.

(Step 2) \mathbf{R}^{n-1} に rank $n-1$ の Lattice Γ をとり \mathbf{H}^n に平行移動として作用させる. $\mathcal{M} = \Gamma \backslash \mathbf{H}^n$ を商多様体とする. このとき Γ を十分大きくとれば Ω は \mathcal{M} の一つの coordinate patch に含まれているとしてよい.

(Step 3) パラメータ $\theta \in \mathbf{R}^{n-1}$ をとり $u = e^{ix \cdot \theta} v$ とおけば u は

$$(H_0(\theta) + \tilde{q})u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = e^{ix \cdot \theta} f \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (3.3)$$

$$H_0(\theta) = -y^2(\partial_y^2 + (\partial_x + i\theta)^2) + (n-2)y\partial_y$$

をみます.

(Step 4) $E > n(n-2)/4$ を任意にとり, Ω 上で $V = \tilde{q} + E$, Ω^c 上で $V = 0$ とおく. \mathcal{M} においても境界値逆問題と逆散乱問題は同値である. よって (3.3) に対する Dirichlet-Neumann 写像 $\Lambda(\theta)$ から $H_0(\theta) + V$ に対する物理的散乱振幅 $A(\theta)$ を作るができる.

(Step 5) $A(\theta)$ は θ に関して解析的であることが分かる. そこで θ を虚軸方向に沿って無限遠に近づければ V の Fourier 変換が得られる.

$H_0(\theta)$ は Floquet 理論 (これは周期的な係数をもつ Schrödinger 作用素に関する基本的な理論である) に現れる作用素であることに注意しよう. 商多様体を考える効用は Step 5 で現れる. \mathcal{M} での $H_0(\theta)$ の Green 作用素は変形 Bessel 関数で書かれるのだが, θ に関しては分岐点をもっている. Lattice Γ が discrete であることにより, θ をこれらの分岐点を避けて解析接続できることが重要である. 以上が [10] の主な内容である.

最後の V の Fourier 変換を求める step は $n \geq 3$ の場合にのみ適用できる. 実は 2 次元の Schrödinger 作用素の固定したエネルギーに対する逆散乱問題はユークリッド空間の場合でも未解決である.

3.2. $\bar{\partial}$ -理論. \mathbf{H}^n での $H_0(\theta)$ の Green 作用素は, 上に述べた分岐点の影響によりある $\bar{\partial}$ 方程式をみたすことが示される. これにより (2.3) に類似したポテンシャルの表示公式が得られる ([12]). \mathbf{H}^3 の場合には多様体 \mathcal{V}_ξ に相当するものは複素平面 \mathbf{C} になり, 通常一般化された Cauchy の公式だけでよい.

3.3. 双曲等長写像. 双曲空間の一つの特徴として豊富な等長写像をもっていることがあげられる. $\mathbf{H}^3 = \mathbf{R}_+^3 \ni (x_1, x_2, x_3)$ を quaternion で表示する:

$$z = x_1 1 + x_2 i + x_3 j = \begin{pmatrix} x_1 + ix_3 & x_2 \\ -x_2 & x_1 - ix_3 \end{pmatrix}.$$

$\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{C})$ に対して作用

$$z \rightarrow \beta \cdot z = (az + b)(cz + d)^{-1}$$

は \mathbf{H}^3 の等長写像を与える. これは測地線を測地線に写す. \mathbf{H}^3 の測地線は $\{x_3 = 0\}$ に中心を持つ半円, または $\{x_3 = 0\}$ に垂直な直線である. このことが逆問題で有効な働きをする.

3.4. 包含物の同定問題. 境界値逆問題 (2.4) の例として医療における問題がある. 人体内の組織の電気伝導度は異方性があるのだが, 簡単のために等方性としよう. これは $\gamma(x)$ がスカラー函数であることを意味している. D-N 写像から $\gamma(x)$ を求める問題は, 人体表面に電極をおいたときの電流, 電圧のデータから内部の電気伝導度を求めることに相当する. 現実の問題には種々の variation がある. たとえば乳癌の細胞の電気伝導度は周囲の正常な組織の4倍くらいになることが知られている. このような問題においては腫瘍の位置を特定することが重要である. しかも現実的には人体表面の一部分に電極をおいて計測データを求めることが行われている. そこで次のような問題を考えよう.

\mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) 内の有界領域 Ω の正常な場合の電気伝導度 $\gamma_0(x)$ が分かっているものとする. Ω のある一部分 Ω_1 において電気伝導度が周囲よりも大きいとする: $\gamma_1(x) > \gamma_0(x)$. 境界のある一部分にのみ台をもつデータからの計測によって Ω_1 の位置が特定できるか?

この問題に関しては Ikehata [5] の重要な貢献がある. それは複素函数論における Mittag-Leffler 函数を利用して2次元の場合に Ω_1 の位置を特定する algorithm である. 上に述べた双曲等長写像を利用して, この問題を3次元の場合にも論ずることができるようになった. 論文 [4] において2, 3次元共通に適用できる次のような結果を得た. Λ, Λ_0 を $\gamma(x), \gamma_0(x)$ に対する D-N 写像としよう. x_0 を Ω の凸包の外部にとり, $B(x_0, R) = \{|x - x_0| < R\}$ とする. このとき次の定理が成り立つ.

定理 3.1 大きいパラメータ $\tau > 0$ を含む函数 $u_\tau(x)$ で次の性質を持つものが存在する.

- (1) u_τ は方程式 $\nabla \cdot (\gamma_0(x) \nabla u_\tau) = 0$ を満たす.
- (2) $u_\tau(x)$ は $x \in B(x_0, R)$ のときは τ に関して指数的に増大し, $x \notin B(x_0, R)$ のときは τ に関して指数的に減少する.
- (3) $f_\tau = u_\tau|_{\partial\Omega}$ とおく. $B(x_0, R) \cap \Omega_1 = \emptyset$ のときは $0 \leq ((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)_{\partial\Omega} < e^{-\delta\tau}$, $\exists \delta > 0$ であり, $B(x_0, R) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ のときは $((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)_{\partial\Omega} > e^{-\delta\tau}$ である.

f_τ は $B(x_0, R)$ の外では指数的に減少しているから数値計算上は0と考えてよい. よって局所的なデータからの計測値 $((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)_{\partial\Omega}$ によって球 $B(x_0, R)$ と Ω_1 が交わるか否かを判定できることになる. また上の定理は $\gamma_1(x) < \gamma_0(x)$ ($x \in \Omega_1$) の場合でも (適当な修正の下に) 同様に成立する.

上の函数 $u_\tau(x)$ は近似的に次のように表される. Ω を \mathbb{R}^3 の上半空間の中におき, $x_0 = 0$ とする. また $\gamma_0(x) = 1$ とする. このとき

$$u_\tau(x) \simeq \sqrt{\frac{y_3}{x_3}} e^{\tau(-y_1 + iy_3)}, \quad (3.4)$$

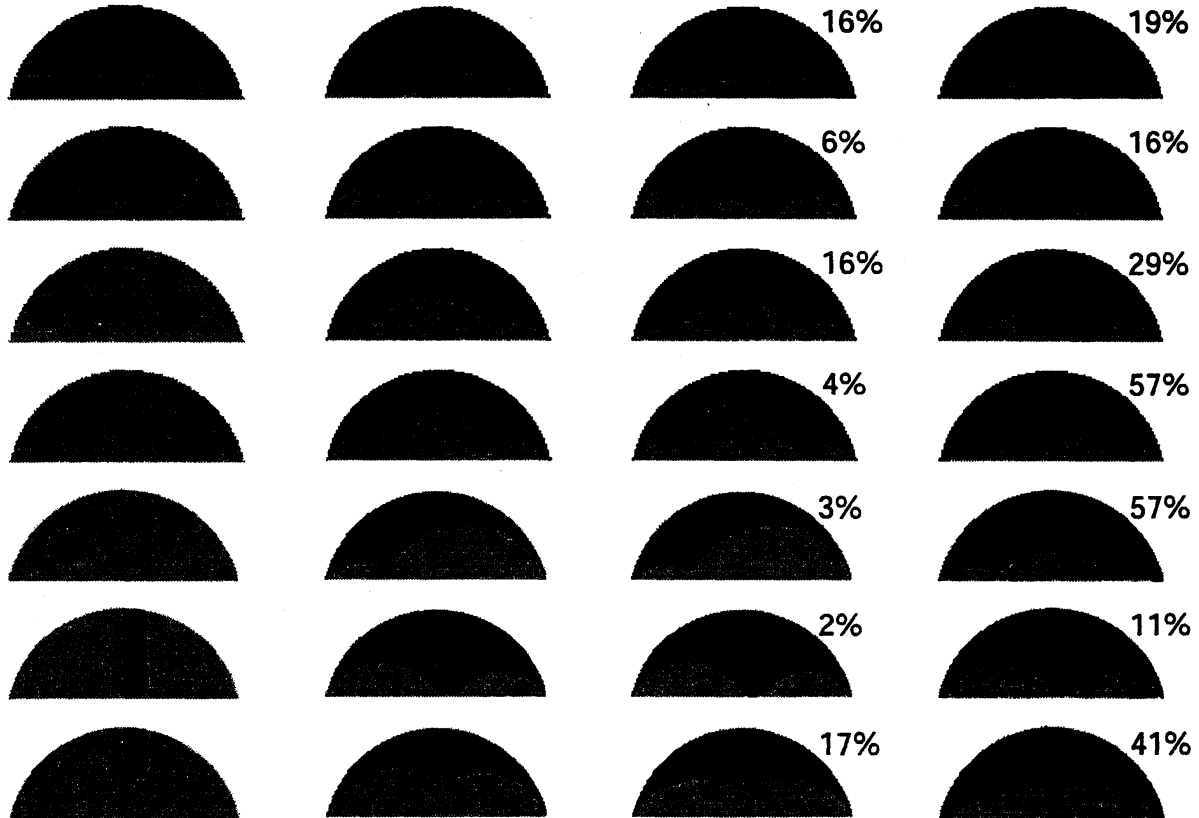
$$y_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2}{(x_1 + R)^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad y_3 = \frac{2x_3R}{(x_1 + R)^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

このことを用いれば次のような包含物探索のアルゴリズムが考えられる.

- (1) 物体 Ω を上半空間 \mathbb{R}_+^3 に置く.
- (2) (3.4) の右辺の函数を2次形式 $Q(\tau) = ((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)$ に代入する.
- (3) 原点中心, 半径 R の球 B_R を描く.
- (4) B_R が Ω_1 に交われば, $Q(\tau)$ は τ と共に指数的に増大するであろう. B_R が Ω_1 に交わらなければ, $Q(\tau)$ は τ と共に指数的に減少するであろう.

散乱理論と逆問題

このようにして x_0 を中心とし包含物に接する球面が得られる. x_0 を動かして得られる球面族の包絡面が包含物の形を近似しているであろう. このアルゴリズムに基づいて2次元の場合の数値計算を行った. それを以下に図示しよう.



左側の縦列のように半円の中に包含物があるとする. 灰色の部分 (正常部分, あるいは背景部分) の電気伝導度が 1, 黒色の部分 (包含物) の電気伝導度が 4 である. 半円の直線部分 (これを前縁部と呼ぶ) のみに台を持つ境界データを与えて, 境界値問題 (2.4) を有限要素法で解いた解を使い, 前記のアルゴリズムを用いて包含物までの距離を計算した. 縦 2 列目の灰色部分は前縁部に中心をもつ円の族による包絡線の囲む領域である. これが包含物の非存在を幾何学的に推定できる最大の領域である. 左から 3 列目は数値計算による推定 (ノイズのないとき) である. 一番右の列は 0.01 パーセントのノイズをいれたときの数値計算結果である. 3, 4 列の右肩の数字は 2 列目の領域からの誤差である. 浅いところにある包含物は同定しやすいが, 深いところにある包含物は同定しにくい. これは EIT の物理的特性である.

定理 3.1 の証明のアイデアは $x_0 = 0$ となるように Ω を上半空間に埋め込むことにある. 3.3 節で述べた双曲等長変換により, 原点中心半径 R の半球を $\{x_3 = 0\}$ に垂直な平面 $\{x_2 = 0\}$ に変換できる. このとき双曲空間における Schrödinger 方程式 (3.2) は不変である. ゲージ変換により複素パラメータ θ を含んだ方程式 (3.3) を考える. $\theta = (0, i\tau)$ と取る. 微分作用素 $H_0(\theta)$ のグリーン函数を変形 Bessel 函数を用いて書ける. このグリーン函数を用いて (3.3) の解を構成する. ゲージ変換をし直せば, 平面 $\{x_2 = 0\}$ の片側で指数的に増大し, 反対側で指数的に減少する Schrödinger 方程式の解を構成できる. この解を双曲等長写像で元に戻せばよい.

2 次形式 $((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)_{\partial\Omega}$ を評価するには次の Kang-Seo-Sheen [16] による補題を使う.

補題 $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ とし w を次の境界値問題の解とする.

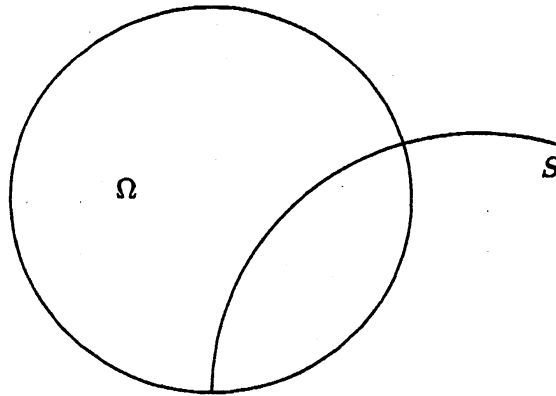
$$(1) \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\gamma_0(x) \nabla w) = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = f & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

このとき

$$(2) \quad \left(\frac{\gamma_0(\gamma_1 - \gamma_0)}{\gamma_1} \nabla w, \nabla w \right)_{\Omega_1} \leq ((\Lambda - \Lambda_0)f, f)_{\partial\Omega},$$

$$(3) \quad ((\Lambda - \Lambda_0)f, f)_{\partial\Omega} \leq ((\gamma_1 - \gamma_0) \nabla w, \nabla w)_{\Omega_1}.$$

3.5. **Horosphere 境界値問題 と Barber-Brown algorithm.** $n \geq 3$ の場合は 1980 年代後半にこの問題の解の一意性と理論的な再構成手続きが示されたのだが ([21], [17], [15]), それは境界値逆問題を散乱の逆問題に変換するものであり, 実際の数値計算とはかなりの距離がある. 一方 1980 年代の前半に英国の技術者 Barber と Brown によって $\gamma(x)$ を求める algorithm が提唱されていた. それは計算コストが小さい割には良い精度の解を与え, 現在のところ商業的に実際に用いられているただ一つのアプローチである. さらに興味深いことにこの問題は双曲幾何学に関係があることが Santosa-Vogelius [19] によって指摘されていた.



彼らの議論を簡単に振り返ろう. 2次元単位円板 $\Omega = \{|x| < 1\}$ を考え, $\gamma(x)$ は定数 $\gamma_0 > 0$ に殆ど近いものであるとしよう:

$$\gamma(x) = \gamma_0 + \epsilon \gamma_1(x) + \dots$$

点 $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \partial\Omega$ を任意にとり $\omega^\perp = (-\omega_2, \omega_1)$ とおく.

$$u_0(x) = \frac{\omega^\perp \cdot x}{(\omega^\perp \cdot x)^2 + (1 - \omega \cdot x)^2}$$

は $x = \omega$ に特異点をもつ $\Delta u = 0$ の解である. 方程式 $\nabla \cdot (\gamma(x) \nabla u) = 0$ の解として

$$u(x) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) + \dots$$

という形のものを想像する. Barber-Brown algorithm は $\gamma_1(x)$ が近似的につぎのように書けることを主張するものである:

$$\gamma_1(x) \approx \int_{S^1} \varphi(x, \omega) \rho_1 d\omega.$$

ここで $\varphi(x, \omega)$ は $u_1(x)$ から計算されたある函数であり, ρ_1 は適当な密度である. Santosa と Vogelius は $\varphi(x, \omega)$ が大体次ぎのようなものであることに気がついた:

$$\varphi(x, \omega) \approx K \left(\int_S \gamma_1(x) \rho_2 d\sigma \right).$$

ここで K はある convolution 作用素であり, S は $\partial\Omega$ に直交する円である. 上の2つを合わせれば

$$\gamma_1 \approx R^* K R \gamma_1, \quad Rf = \int_S f(x) \rho_2 d\sigma \quad (3.4)$$

という式が成り立つ. ここで Ω を Poincaré disc と見做せば S は測地線であり, (3.4) は Poincaré disc 上での Radon 変換の反転公式と類似している. Berenstein-Tarabushi [2] は Barber-Brown のアルゴリズムを分析し, それが実際に Poincaré disc 上の Radon 変換の反転公式とみなせることを論じた.

これらの仕事は円板上の境界値逆問題が双曲幾何と関係していることを示唆しているように思われる. しかしこれ以上の解析, 特に3次元の場合, あるいは線形化しない元の問題 (2.4) との関係等は未知のまま残されていた.

論文 [13] は双曲空間の方法により Barber-Brown algorithm を次のようにして正当化しようというものである. 3次元球 Ω の中で Schrödinger 方程式 $(-\Delta + q(x))u = 0$ に対する境界値逆問題を考える. $\partial\Omega$ に直交する球面 S を考える. このとき

定理 3.2 (1) 大きいパラメータ $\tau > 0$ を含む $\partial\Omega$ 上の擬微分作用素 $P(\tau)$ が存在し, 境界値問題

$$(-\Delta + q)u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = P(\tau)u + f \quad \text{on } \partial\Omega$$

は一意解 $u(\tau)$ をもつ. 一般化された Dirichlet-Robin 写像 (GRD map) を

$$\mathcal{R}_q(\tau) : f \rightarrow u|_{\partial\Omega}$$

によって定義する.

(2) 境界データ $f(\tau)$ と点列 $\{\tau_n\}$ が存在し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\mathcal{R}_q(\tau_n) - \mathcal{R}_0(\tau_n))f(\tau_n), f(-\tau_n))_{\partial\Omega} = i \int_{S \cap \Omega} q(x) dS$$

が成り立つ.

(3) \mathbf{H}^3 の Disc model での Radon 変換の反転公式によって $q(x)$ を計算できる.

Disc model の双曲空間での Radon 変換は

$$Rf(\xi) = \int_{\xi} f(x) dS(x)$$

(ξ は境界 $\{|x| = 1\}$ に直交する球面) であり, $K = SO(3)$, $g \in SO(2, 1)$, $g \cdot o = x$, o は原点, η は o を通る平面として R の共役作用素は

$$R^* \varphi(x) = \int_{x \in \xi} \varphi(\xi) d\mu(\xi) = \int_K \varphi(gk \cdot \eta) dk,$$

である. このとき Radon 変換の反転公式とは

$$f = -\frac{1}{2\pi} (1 + \Delta_g) R^* R f,$$

であった. ただし Δ_g は \mathbf{H}^3 の Laplace-Beltrami 作用素である.

作用素 $P(\tau)$, 境界データ $f(\tau)$, 点列 $\{\tau_n\}$ はポテンシャル $q(x)$ によらずに具体的に表示できる.

定理 3.2 の証明のアイデアは Ω を次のようにとることである :

$$\Omega = \left\{ (x_1 + R)^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{R}{\delta} \right)^2 < \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \right\}.$$

これは $\{x_3 = 0\}$ に接する \mathbf{R}_+^3 中の球, 即ち \mathbf{H}^3 のホロ球である. 3.3 節の双曲等長写像を適当にとればこの球を半空間 $\{x_3 > \delta\}$ に写像できる. そこで Schrödinger 方程式 $(H_0 + q)u = 0$ を半空間 $\{x_3 > \delta\}$ で考えればよい. 以下, 前と同様にゲージ変換をほどこして複素パラメータ θ を導入する. 半空間 $\{x_3 > \delta\}$ での $H_0(\theta)$ に対するグリーン函数を用いて求める解 u を構成する.

REFERENCES

- [1] M. Belishev and Y. Kurylev, To the reconstruction of a Riemannian manifold via its spectral data (BC-method), *Comm. in P. D. E.* 17 (1992), 767-804.
- [2] C. A. Berenstein and E. C. Tarabusi, Integral geometry in hyperbolic spaces and electrical impedance tomography, *SIAM. J. Appl. Math.* 56 (1996), 755-764.
- [3] L. D. Faddeev, Inverse problems of quantum scattering theory, *J. Sov. Math.* 5 (1976), 334-396.
- [4] T. Ide, H. Isozaki, S. Nakata, S. Siltanen and G. Uhlmann, Proving for electrical inclusions with complex spherical waves, to appear in *C.P.A.M.*
- [5] M. Ikehata, Mittag-Leffler's function and extracting from Cauchy data, *Contemporary Mathematics (Inverse Problems and Spectral Theory, ed. H. Isozaki)* 348 (2004), 41-52.
- [6] H. Isozaki, Inverse scattering theory for wave equations in stratified media, *J. Diff. Eq.* 138 (1997), 19-54.
- [7] 磯崎 洋, 散乱理論における逆問題, 龍谷大学科学技術共同研究センター (1997).
- [8] 磯崎 洋, 量子力学的散乱理論における逆問題, *数学* 50 (1998), 163-180.
- [9] H. Isozaki, Inverse spectral theory, *Topics in the Theory of Schrödinger Operators*, eds. H. Araki and H. Ezawa, World Scientific (2003), 93-143.
- [10] H. Isozaki, Inverse spectral problems on hyperbolic manifolds and its applications to inverse boundary value problems in Euclidean space, *Amer. J. of Math.* 126 (2004), 1261-1313.
- [11] H. Isozaki, Inverse problems and hyperbolic manifolds, *Contemporary Mathematics* 348, *Inverse Problems and Spectral Theory*, ed. H. Isozaki, A.M.S. Providence Rhode Island (2004), 181-197.
- [12] H. Isozaki, The $\bar{\partial}$ -theory for inverse problems associated with Schrödinger operators on hyperbolic spaces, to appear in *Publ. RIMS Kyoto Univ.* Vol 43, No 1 (2007).
- [13] H. Isozaki, Inverse boundary value problems in the horosphere — A link between hyperbolic geometry and electrical impedance tomography, to appear in *Inverse Problems and Imaging* Vol 1, No1 (2007), 55-82.
- [14] H. Isozaki, H. Nakazawa and G. Uhlmann, Inverse scattering problem in nuclear physics, *J. Math. Phys.* 45 (2004), 2613-2632.
- [15] G. M. Khenkin and R. G. Novikov, The $\bar{\partial}$ -equation in the multi-dimensional inverse scattering problem, *Russ. Math. Survey* 42 (1987), 109-180.
- [16] H. Kang, J. K. Seo and D. Sheen, *The inverse conductivity problem with one measurement : stability and estimation of size*, *SIAM J. Math. Anal.* 28 (1997), 1389-1405.
- [17] A. Nachman, Reconstruction from boundary measurements, *Ann. Math.* 128 (1988), 531-576.
- [18] A. Sa Barreto, Radiation fields, scattering, and inverse scattering on asymptotically hyperbolic manifolds, *Duke Math. J.* 129 (2005), 407-480.
- [19] F. Santosa and M. Vogelius, A back projection algorithm for electrical impedance tomography, *SIAM. J. Appl. Math.* 50 (1990), 216-243.
- [20] E. Somersalo, M. Cheney and D. Isaacson, Existence and uniqueness for electrode models electric current computed tomography, *SIAM. J. Appl. Math.* 52 (1992), 1023-1040.
- [21] J. Sylvester and G. Uhlmann, A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, *Ann. Math.* 125 (1987), 153-169.