数理解析研究所講究録
第 1573 巻 2007 年 118-123

行列の特異値を求めるアルゴリズムに含まれた離散可積分系に対する中心多様体理論アプローチ

岩崎 雅史，中村 佳正
京都府立大学人間環境学部，京都大学大学院情報学研究科/科学技術振興機構
E-mail: imasa@kpu.ac.jp

Abstract. 力学系の局所的な解挙動を調べる際，中心多様体理論が有効である．本稿では，離散戸田方程式と離散ロトカ・ボルテラ系に関連する中心多様体について報告する．大域的に 2 つの離散可積分系の解は上 2 重対角行列の特異値に収束することが示されている．ところが，局所的な解挙動について厳密な議論はなされていない．離散ロトカ・ボルテラ系は，任意に選択できるパラメータによって中心多様体の存在を保証でき，中心多様体上の理論によって指数収束性が示される．一方，離散戸田方程式に関連する中心多様体が常に存在するとは限らないことも明らかとなる．

Keywords : 中心多様体, 離散可積分系, 行列の特異値
Mathematical Subject Classification (2000) : 37N30, 39A11, 65F15

1. はじめに

数値計算アルゴリズムと関わりの深い可積分系は少なくない．ラックス形式をもつ可積分系は，固有値・特異値を求めるアルゴリズムと結び付くことが知られている [3, 12, 15, 16]．例えば，有限次元戸田方程式は古典的な QR アルゴリズムと関連する [11]．戸田方程式の t から $t+1$ への時間発展は，対称 3 重対角行列 T の指数関数 $\exp(T)$ に対する QR アルゴリズムの 1 ステップと一致する．QR アルゴリズムに対する研究成果より戸田方程式の大域的な解挙動については明らかである．戸田方程式の局所的な解挙動については，中心多様体理論を利用した議論されている [2]．

可積分系特有の離散化 [4] を使えば，固有値・特異値を求めるアルゴリズムが定式化できる．戸田方程式の時間離散版は，固有値・特異値計算で利用されるルティスハウザの qd アルゴリズムそのものである [13]．生物の個体数変動を記述したロトカ・ボルテラ系の離散化 [5, 14] からも dLV (discrete Lotka-Volterra) と名付けられた新しい特異値計算アルゴリズムが定式化される [6, 7]．

力学系の局所収束性および数値安定性は中心多様体の存在によって判断できる [1]．本稿では，離散戸田方程式 (qd アルゴリズムの漸化式) と離散ロトカ・ボルテラ系に関連する中心多様体，および，その存在性から導かれる局所的な性質について報告する．離散戸田方程式と離散ロトカ・ボルテラ系に関する中心多様体についてはそれぞれ §2, §3 に述べる．特に，離散ロトカ・ボルテラ系に含まれる任意パラメータ $\delta > 0$ は中心多様体の存在を確実なものとする．一方，離散戸田方程式に関連する中心多様体は常に存在するとはいえない．§4 では，中心多様体上の定理を利用して散戸田方程式と離散ロト

カ・ボルテラ系の局所的な解挙動を示す. dLV アルゴリズムが qd アルゴリズムよりも優れた局所収束性をもつことを明らかにする.

2. 離散戸田方程式に関連する中心多様体

本節では, 離散戸田方程式

$$\begin{cases} q_k^{(n+1)} + e_{k-1}^{(n+1)} = q_k^{(n)} + e_k^{(n)}, & (k=1,2,\ldots,m) \\ q_k^{(n+1)} e_k^{(n+1)} = q_{k+1}^{(n)} e_k^{(n)}, & (k=1,2,\ldots,m-1) \end{cases} \tag{1}$$

$$e_0^{(n)} \equiv 0, \quad e_m^{(n)} \equiv 0, \quad (n=0,1,\ldots)$$

に関連する中心多様体についての補助定理および定理を報告する. 詳細については文献 [9] を参照されたい. ただし, $q_k^{(n)}$, $e_k^{(n)}$ は離散時間 n における q_k, e_k の値をそれぞれ表す. 離散戸田方程式によって $\{q_k^{(n)}, e_k^{(n)}\}$ から $\{q_k^{(n+1)}, e_k^{(n+1)}\}$ へと変換されると見なすことができる. 初期値が $q_k^{(0)} > 0$ かつ $e_k^{(0)} > 0$ ならば, $n \to \infty$ のとき $q_k^{(n)}$, $e_k^{(n)}$ はそれぞれ定数 $c_k > 0$, 0 に収束する [13].

ここで, 離散戸田変数 $q_k^{(n)}$ とその $n \to \infty$ における平衡点 c_k との残差を $\bar{q}_k^{(n)}$ とする. つまり, $\bar{q}_k^{(n)} := q_k^{(n)} - c_k$ とする. そのとき, $\{\bar{q}_k^{(n)}, e_k^{(n)}\}$ から $\{q_k^{(n+1)}, e_k^{(n+1)}\}$ への変換に関して次の補助定理が得られる.

Lemma 2.1 $\tilde{b}_k = \tilde{b}_k(\bar{q}^{(n)}, e^{(n)})$ を $\bar{q}^{(n)} := (\bar{q}_1^{(n)}, \bar{q}_2^{(n)}, \ldots, \bar{q}_m^{(n)})^\top \in \boldsymbol{R}^m$ および $e^{(n)} := (e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \ldots, e_{m-1}^{(n)})^\top \in \boldsymbol{R}^{m-1}$ のある関数とする. $|\bar{q}_k^{(n+1)}| < c_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ ならば, 離散戸田方程式 (1) において $q_k^{(n)} = \bar{q}_k^{(n)} + c_k$ とすると, $\bar{q}_k^{(n+1)}$, $e_k^{(n+1)}$ はそれぞれ

$$\begin{cases} \bar{q}_k^{(n+1)} = -\alpha_{k-1} e_{k-1}^{(n)} + \bar{q}_k^{(n)} + e_k^{(n)} - \tilde{b}_{k-1}, & (k=1,2,\ldots,m) \\ e_k^{(n+1)} = \alpha_k e_k^{(n)} + \tilde{b}_k, & (k=1,2,\ldots,m-1) \end{cases} \tag{2}$$

と表現できる. ただし, $\tilde{b}_0 \equiv 0$ かつ $\alpha_k := c_{k+1}/c_k$ とする. また, $\tilde{b}_k$ および その 1 階偏導関数 $\nabla_{(\bar{q}^{(n)}, e^{(n)})} \tilde{b}_k$ は原点 $(\bar{q}^{(n)}, e^{(n)}) = (0,0)$ において 0 となる. つまり,

$$\begin{cases} \tilde{b}_k(0,0) = 0, \quad \nabla_{(\bar{q}^{(n)}, e^{(n)})} \tilde{b}_k(0,0) = 0, \quad (k=1,2,\ldots,m-1) \\ \nabla_{(\bar{q}^{(n)}, e^{(n)})} := \left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{q}_1^{(n)}}, \dfrac{\partial}{\partial e_1^{(n)}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial \bar{q}_{m-1}^{(n)}}, \dfrac{\partial}{\partial e_{m-1}^{(n)}}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{q}_m^{(n)}} \right)^\top. \end{cases} \tag{3}$$

さらに, $c_1 > c_2 > \cdots > c_m > 0$ を仮定し, 変数 $r^{(n)} := (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \ldots, r_m^{(n)})^\top$ を導入する. ただし, $r_k^{(n)} = r_k^{(n)}(\bar{q}^{(n)}, e^{(n)})$ とする. そのとき, $\{r^{(n)}, e^{(n)}\}$ と $\{r^{(n+1)}, e^{(n+1)}\}$ が満たす関係式は次の補助定理で与えられる.

Lemma 2.2 $A := I \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$, $B := \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}) \in \boldsymbol{R}^{(m-1)\times(m-1)}$, $a := (a_1, a_2, \cdots, a_m)^\top \in \boldsymbol{R}^m$, $b := (b_1, b_2, \cdots, b_{m-1})^\top \in \boldsymbol{R}^{m-1}$ とする. そのとき, (2) より

$$\begin{cases} r^{(n+1)} = A r^{(n)} + a(r^{(n)}, e^{(n)}), \\ e^{(n+1)} = B e^{(n)} + b(r^{(n)}, e^{(n)}) \end{cases} \tag{4}$$

が得られる. ただし, 原点 $(r^{(n)}, e^{(n)}) = (0,0)$ における a, b および $Da = \nabla_{(r^{(n)}, e^{(n)})} a^\top$, $Db = \nabla_{(r^{(n)}, e^{(n)})} b^\top$ はそれぞれ以下を満たす.

$$\begin{cases} a(0,0) = 0, \quad Da(0,0) = 0, \\ b(0,0) = 0, \quad Db(0,0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Lemma 2.2 を中心多様体理論 [1] と比較すると，離散戸田方程式 (1) に含まれる写像 $\psi_{Toda}^{(n)} : (r^{(n)}, e^{(n)}) \mapsto (r^{(n+1)}, e^{(n+1)})$ に関する定理が導出される．

Theorem 2.1 離散戸田方程式 (1) において $q_k^{(n)} = q_k^{(n)}(r^{(n)}, e^{(n)})$ とする．$|q_k^{(n+1)} - c_k| < c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ ならば，写像 $\psi_{Toda}^{(n)} : (r^{(n)}, e^{(n)}) \mapsto (r^{(n+1)}, e^{(n+1)})$ は (4) を満たす．さらに，$\psi_{Toda}^{(n)}$ に対する中心多様体 $h_{Toda} : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^{m-1}$ が存在する．

Theorem 2.1 より，写像 $\psi_{Toda}^{(n)}$ に対する中心多様体 h_{Toda} が常に存在するとは限らないことに注意したい．ある $n = n_0$ において $|q_k^{(n+1)} - c_k| < c_k$ が満たされたとしても $|q_k^{(n+2)} - c_k| < c_k$ が成立するかは定かではない．つまり，$n > n_0$ なる離散時間 n において h_{Toda} の存在は常に保証できるわけではない．

3. 離散ロトカ・ボルテラ系に関連する中心多様体

本節では，離散ロトカ・ボルテラ系

$$\begin{cases} u_k^{(n+1)}(1 + \delta u_{k-1}^{(n+1)}) = u_k^{(n)}(1 + \delta u_{k+1}^{(n)}), & (k = 1, 2, \ldots, 2m-1) \\ u_0^{(n)} \equiv 0, \quad u_{2m}^{(n)} \equiv 0, & (n = 0, 1, \ldots,) \end{cases} \tag{6}$$

に関連した中心多様体の存在性について結果のみ述べる．詳細については §2 と同様 [9] を参照されたい．ここで，離散間隔 δ は正の定数，$u_k^{(n)}$ は離散時間 n における u_k の値を示す．離散ロトカ・ボルテラ系 (6) は生物数理学に登場するロトカ・ボルテラ系の離散時間版である．離散ロトカ・ボルテラ系 (6) を利用して上 2 重対角行列の特異値を求めることができる [6, 7]．大域的に $n \to \infty$ のとき $u_{2k-1}^{(n)} \to t_k$, $u_{2k}^{(n)} \to 0$ は証明済みである．ただし $t_k > 0$ はある定数である．ここで，新たに変数 $\bar{u}_{2k-1}^{(n)} := u_{2k-1}^{(n)} - t_k$ を導入する．そのとき，$\{\bar{u}_{2k-1}^{(n)}, u_{2k}^{(n)}\}$ から $\{\bar{u}_{2k-1}^{(n+1)}, u_{2k}^{(n+1)}\}$ を与える漸化式に関して次の補助定理が得られる．

Lemma 3.1 離散ロトカ・ボルテラ系 (6) において $u_{2k-1}^{(n)} = \bar{u}_{2k-1}^{(n)} + t_k$ とする．また，$\tilde{f}_k = \tilde{f}_k(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)})$, $\tilde{g}_k = \tilde{g}_k(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)})$ は $\bar{u}^{(n)} := (\bar{u}_1^{(n)}, \bar{u}_3^{(n)}, \ldots, \bar{u}_{2m-1}^{(n)})^\top \in \boldsymbol{R}^m$, $u^{(n)} := (u_2^{(n)}, u_4^{(n)}, \ldots, u_{2m-2}^{(n)})^\top \in \boldsymbol{R}^{m-1}$ の関数とする．$\max_k |\bar{u}_{2k-1}^{(n+1)}| < \delta^{-1}$ かつ $\max_k |u_{2k}^{(n+1)}| < \delta^{-1}$ ならば，$\{\bar{u}_{2k-1}^{(n+1)}\}_{k=1,2,\ldots,m}$, $\{u_{2k}^{(n+1)}\}_{k=1,2,\ldots,m-1}$ はそれぞれ $\bar{u}^{(n)}$, $u^{(n)}$ を使って

$$\begin{cases} \bar{u}_{2k-1}^{(n+1)} = -\delta t_k \beta_{k-1} u_{2k-2}^{(n)} + \bar{u}_{2k-1}^{(n)} + \delta t_k u_{2k}^{(n)} + \tilde{f}_k(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)}), \\ u_{2k}^{(n+1)} = \beta_k u_{2k}^{(n)} + \tilde{g}_k(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)}) \end{cases} \tag{7}$$

のように表現できる．ただし，$\beta_k := (1 + \delta t_{k+1})/(1 + \delta t_k)$ とする．関数 $\tilde{f}_k$, $\tilde{g}_k$ およびその偏導関数 $\nabla_{(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)})} \tilde{f}_k, \nabla_{(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)})} \tilde{g}_k$ は以下を満たす．

$$\begin{cases} \tilde{f}_k(0,0) = 0, \quad \nabla_{(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)})} \tilde{f}_k(0,0) = 0, \\ \tilde{g}_k(0,0) = 0, \quad \nabla_{(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)})} \tilde{g}_k(0,0) = 0, \\ \nabla_{(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)})} := \left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{u}_1^{(n)}}, \dfrac{\partial}{\partial u_2^{(n)}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial \bar{u}_{2m-3}^{(n)}}, \dfrac{\partial}{\partial u_{2m-2}^{(n)}}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{u}_{2m-1}^{(n)}} \right)^\top. \end{cases} \tag{8}$$

Lemma 3.1 より次の補助定理が与えられる．

Lemma 3.2 $v^{(n)} := (v_1^{(n)}, v_3^{(n)}, \ldots, v_{2m-1}^{(n)})^\top \in \boldsymbol{R}^m$, $v_{2k-1}^{(n)} = v_{2k-1}^{(n)}(\bar{u}^{(n)}, u^{(n)})$, $t_1 > t_2 > \cdots > t_m$ とすると

$$\begin{cases} v^{(n+1)} = Fv^{(n)} + f(v^{(n)}, u^{(n)}), \\ u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + g(v^{(n)}, u^{(n)}). \end{cases} \tag{9}$$

ただし，$F := \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$, $G := \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}) \in \boldsymbol{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ とする．関数 f, g およびそのヤコビ行列 $Df = \nabla_{(v^{(n)},u^{(n)})} f^\top$, $Dg = \nabla_{(v^{(n)},u^{(n)})} g^\top$ は原点において 0 である．つまり，$f(0,0) = 0$, $g(0,0) = 0$ かつ $Df(0,0) = 0$, $Dg(0,0) = 0$ が成立する．

中心多様体の存在条件 [1] と Lemmas 3.1, 3.2 を比較すると，離散ロトカ・ボルテラ系 (6) に関連した写像 $\psi_{LV}^{(n)} : (v^{(n)}, u^{(n)}) \mapsto (v^{(n+1)}, u^{(n+1)})$ についての定理が導かれる．

Theorem 3.1 離散ロトカ・ボルテラ系 (6) において $u_{2k-1}^{(n)} = u_{2k-1}^{(n)}(v^{(n)}, u^{(n)})$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ とする． $\max_k |\bar{u}_{2k-1}^{(n+1)}| < \delta^{-1}$ かつ $\max_k |u_{2k}^{(n+1)}| < \delta^{-1}$ ならば，写像 $\psi_{LV}^{(n)} : (v^{(n)}, u^{(n)}) \mapsto (v^{(n+1)}, u^{(n+1)})$ は (9) のように定義され，$\psi_{LV}^{(n)}$ に対する中心多様体 $h_{LV} : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^{m-1}$ が存在する．

ここで，ある定数 $M > 0$ に対して $0 < \max_k |u_k^{(n)}| < M$ となることに注意したい [7]. いかなる n においても $\min_k |\bar{u}_{2k-1}^{(n+1)}| < \delta^{-1}$ かつ $\min_k |u_{2k}^{(n+1)}| < \delta^{-1}$ となる離散間隔 δ が存在する．つまり，離散ロトカ・ボルテラ系 (6) の任意パラメータ δ をうまく設定すれば，写像 $\psi_{LV}^{(n)}$ に対する中心多様体はいかなる n においても確実に存在する．離散戸田方程式 (1) に関連する写像 $\psi_{Toda}^{(n)}$ と比べて，中心多様体の存在性について明らかな違いが確認される

4. 局所的な解挙動

離散戸田方程式 (1) および離散ロトカ・ボルテラ系 (6) の局所的な解挙動は，§2, §3 の結果を踏まえて中心多様体理論 [1] を活用すれば明確にできる．ここで，

$$\mathcal{T}(x,y) = (\mathcal{A}x + \zeta(x,y), \mathcal{B}y + \chi(x,y)), \quad x \in \boldsymbol{R}^m, \quad y \in \boldsymbol{R}^{m-1} \tag{10}$$

となる写像 $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}^{2m-1} \to \boldsymbol{R}^{2m-1}$ を考える．ただし，$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ はそれぞれ固有値の絶対値が 1 および 1 以下になる正方行列，ζ, χ はそれぞれ原点 $(x,y) = (0,0)$ において

$$\begin{cases} \zeta(0,0) = 0, \quad D\zeta(0,0) = 0, \\ \chi(0,0) = 0, \quad D\chi(0,0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

を満たす $\boldsymbol{C}^2$ 級関数とする．ただし，$D\zeta$, $D\chi$ は ζ, χ のヤコビ行列とする．このとき，$\mathcal{T}$ に対する中心多様体 h が存在する．一般的に，写像に対する中心多様体を正確に見つけるのは難しいが，次の定理を利用すれば近似的に与えられる．

Theorem 4.1 (Carr) 写像 $\phi : \boldsymbol{R}^{\ell_1} \to \boldsymbol{R}^{\ell_2}$ は $\boldsymbol{C}^1$ 級で $\phi(0) = 0$, $D\phi(0) = 0$ とする．さらに ϕ に対する作用素を以下のように定義する．

$$M\phi(x) = \phi(\mathcal{A}x + \zeta(x, \phi(x))) - \mathcal{B}\phi(x) - \chi(x, \phi(x)). \tag{12}$$

ある $p > 1$ に対して $x \to 0$ のとき $M\phi(x) = O(|x|^p)$ ならば，中心多様体 h は $x \to 0$ のとき $h(x) = \phi(x) + O(|x|^p)$ で与えられる．

§2, §3 の補助定理で示したように，ある条件のもとで離散戸田方程式 (1) および離散ロトカ・ボルテラ系 (6) は

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = \mathcal{A}x^{(n)} + \zeta(x^{(n)}, y^{(n)}), \\ y^{(n+1)} = \mathcal{B}y^{(n)} + \chi(x^{(n)}, y^{(n)}) \end{cases} \tag{13}$$

のように変形できる．(13) における離散時間 n から $n+1$ への発展は，写像 $\mathcal{T}$: $(x^{(n)}, y^{(n)}) \mapsto (x^{(n+1)}, y^{(n+1)})$ によって実現されると解釈できる．(13) の解挙動は $x^{(n)}$ が十分小さいとき以下に示す 2 つの定理によって捉えられる．

Theorem 4.2 (Carr) (13) の局所的な解挙動は，$\mathcal{T}$ に対する中心多様体 h 上のフロー

$$z^{(n+1)} = \mathcal{A}z^{(n)} + \zeta(z^{(n)}, h(z^{(n)})). \tag{14}$$

によって支配される．

Theorem 4.3 (Carr) (13) の零解の安定性は (14) の零解の安定性と等価である．ここで，(13) の解 $(x^{(n)}, y^{(n)})$ が十分小さな初期値 $(x^{(0)}, y^{(0)})$ をもち，(14) の零解が安定だとする．そのとき，いかなる n においても $|x^{(n)} - z^{(n)}| \leq \kappa\varepsilon^n$ かつ $|y^{(n)} - h(z^{(n)})| \leq \kappa\varepsilon^n$ となる (14) の解 $z^{(n)}$ が存在する．ただし，κ, ε は $0 < \kappa$, $0 < \varepsilon < 1$ を満たす定数とする．

離散ロトカ・ボルテラ系 (6) に関する中心多様体の存在は，任意パラメータ δ の適切な設定により常に保証でき，Theorem 4.1 – 4.3 より離散ロトカ・ボルテラ系 (6) の局所的な解挙動について次の定理が導出される．

Theorem 4.4 離散ロトカ・ボルテラ系 (6) の解 $(u_{2k-1}^{(n)}, u_{2k}^{(n)})$ は，$(u_{2k-1}^{(n_*)} - t_k, u_{2k}^{(n_*)})$ が十分小さいと見なせる離散時間 $n = n_*$ 以降，指数的に $(t_k, 0)$ へ近づく．

離散戸田方程式 (1) に関しても $|q_k^{(n+1)} - c_k| < c_k$ が成立する場合に限れば，Theorem4.4 と同様の結果が得られる．詳しくは [9] を参照されたい．

5. まとめ

本稿では，中心多様体理論の視点から離散戸田方程式と離散ロトカ・ボルテラ系の局所的な解挙動を調べた．まず，2 つの離散可積分系に関連する中心多様体の存在性について，それぞれ §2, §3 で示した．§4 では，大域的な収束性解析 [6, 7, 13] で理解できない離散可積分系の局所的な性質を中心多様体理論によって明らかにした．

具体的には，離散ロトカ・ボルテラ系の解挙動は離散戸田方程式よりも穏やかであることが分かった．Theorem 4.4 で示した離散ロトカ・ボルテラ系の性質は，コンピュータ上で動作する数値計算アルゴリズムの定式化において有効となる．離散時間 n が大きくなるにつれて確実に収束点との残差は減少し，突然の大幅増加を心配する必要がない．したがって，離散ロトカ・ボルテラ系に基づく dLV アルゴリズムは特異値を求める信頼性の高いアルゴリズムと結論付けられる．

中心多様体理論は dLV 以外のアルゴリズムの局所解析にも有効である．mdLVs アルゴリズム [8] やマルチシフト QR アルゴリズム [10] に関する結果については，別論文にて報告する．

参考文献

[1] Carr J., *Applications of Centre Manifold Theory.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[2] Chu M. T., The generalized Toda flow, the QR algorithm and the center manifold theory. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* **5** (1984), 187–201.

[3] Chu M. T., On the continuous realization of iterarive processes. *SIAM Review* **30** (1988), 375–397.

[4] Hirota R., Nonliear partial difference equations I–V. *J. Phys. Soc. Japan* **43** (1977), 1423–1433, 2074–2078, 2079–2086, **45** (1978), 321–332, **46** (1979), 312–319.

[5] Hirota R., Converved quantities of random-time Toda equation. *J. Phys. Soc. Japan* **20** (1997), 283–284.

[6] Iwasaki M. and Nakamura Y., On a covergence of solution of the discrete Lotka-Volterra system. *Inverse Problems* **18** (2002), 1569–1578.

[7] Iwasaki M. and Nakamura Y., An application of the discrete Lotka-Volterra system with variable step-size to singular value computation. *Inverse Problems* **20** (2004), 553–563.

[8] Iwasaki M. and Nakamura Y., Accurate computation of singular values in terms of shifted integrable schemes. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **23** (2006), 239–259.

[9] Iwasaki M. and Nakamura Y., Center Manifold approach to discrete integrable systems related to eigenvalues and singular values. submitted.

[10] 宮田考史, 岩崎雅史, 山本有作, 張紹良, 対称行列向けマルチシフト QR 法及び漸近的収束性解析. 第 36 回数値解析シンポジウム講演予稿集 (2007), 93–96.

[11] Moser J. K., Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential – An integrable system – in : *Dynamical Systems. Theory and Applications*, J. Moser ed., Lec. Notes in Phys., **38** Springer-Verlag, Berlin, 1975, pp. 467–497.

[12] 中村佳正, 可積分系の機能数理. 裳華房 (2006)

[13] Rutishauser H., *Lectures on Numerical Mathematics.* Birkhäuser, Boston, 1990.

[14] Spiridonov V. and Zhedanov A., Discrete-time Volterra chain and classical orthogonal polynomials. *J. Phys. A* **30** (1997), 8727–8737.

[15] Watkins D. S., Isospectral flows. *SIAM Review* **26** (1984), 379–391.

[16] Watkins D. S. and Elsner L., Self-similar flows. *Lin. Alg. Appl.* **110** (1998), 213–242.