数理解析研究所講究録
第 1575 巻 2008 年 22-39

部分群複体のホモトピー同値性について
On the homomotopy equivalence of the subgroup complex

和歌山工業高等専門学校一般科目　藤田亮介 (Ryousuke Fujita)
General Education, Wakayama National College of Technology

1　はじめに

G を 1 つの有限群とする。部分群複体という概念は、1970 年代に K.Brown が G の非自明な p-部分群複体 $|S_p(G)|$ に関するホモロジカルなシローの定理を発見したことに起因する。その後、Quillen は 1978 年の論文 [12] で、$|S_p(G)|$ のホモトピー性質に言及し次の予想を提起した。

「G の p-部分群複体 $|S_p(G)|$ が可縮であれば、G には非自明な正規 p-部分群が存在する」

ここで、$S_p(G)$ とは G の非自明な p-部分群全体の集合であり、包含関係で順序を定義して長さ n の順序列を n-単体として通常のユークリッド空間に埋め込むことにより、$S_p(G)$ に単体的複体構造を入れたものである。その幾何学的実現を $|S_p(G)|$ と記している。以下、簡単のため $|S_p(G)|$ を $S_p(G)$ と記す。部分群複体研究者の多くは有限群論研究者であり、そのモチベーションは澤辺正人氏（千葉大学）によれば「非可換有限単純群、特に 26 個の散在群の特徴付け」にあり、この方面への研究 (有限群のコホモロジー理論) としては K.Brown をはじめとして、Thévenaz, Webb らによる有限群のコホモロジー分解定理がある。一方、部分群複体のトポロジー的性質に関する研究は 1980 年代より Stanley, Garsia, Björner, Walker[3, 15, 19] らの組み合せ論研究者により始められた。彼らの手法は、部分群複体を抽象化した順序複体 (order complex) を考えて、そこでトポロジーを展開するものである。特に可縮に関する種々の定理が発見された。

私は特殊な G-順序集合に付随する幾何学的加群に興味があり、その研究に従事してきた。その過程の中で G-CW-複体間の連続写像に対して Lefschets 数で定義される Lefschetz 加群を定義し、その構造定理を発見した。これとは別に、$S_p(G)$ とホモトピー同値になる集合 $B_p(G)$ に対して、各次元のホモロジー群の（表現環の中での）交代和で定義される（偶然にも同名の）Lefschetz 加群 $L_G(B_p(G))$ という概念がある（2005 年の岡山大学での日本数学会代数分科会での澤辺氏の特別講演を聴いて知った）。ここで、$B_p(G)$ とは次で定義されるものである：$B_p(G)=\{G \text{ の } p\text{-部分群 } P \mid P=O_p(N_G(P))\}$（$O_p(G)$ は G の最大の正規 p-部分群を表す）。澤辺氏とのディスカッションを通して、2 つの Lefschetz 加群は概念的にはほぼ同じものであるという知見を得るに至った。$B_p(G)$ はその定義からわかるように、Sylow p-部分群全体を含む 1 つの（G の p-部分群の）部分群族 (collection) である。そもそも $B_p(G)$ は有限群のコホモロジー分解定理を得るために Bouc により、ホモトピー同値性を保つ、$S_p(G)$ より小さい部分群族として導入されたものである。$B_p(G)$ の他にも、よく知られた部分群族として Quillen による $A_p(G)=\{P \mid P \text{ は非自明な } G \text{ の elementary abelian } p\text{-部分群}\}$ がある。さらに、Thévenaz と Webb は 1991 年の論文 [18] で、これら 3 つの部分群複体が同変ホモトピー同値になることを示した。こういった部分群複体に対する Lefschetz 加群に関する澤辺氏による研究は有限群の表現論の議論である。一方、これら 3 つの部分群複

体の一般化 (拡張) や、そのトポロジー的性質の解明として注目したいのは Lucido による「ベキ零部分群複体」の研究 [10] である。彼女の研究はベキ零部分群複体を考察対象とし、その連結性や可縮性について言及しており、Quillen の結果の拡張になっている。

本稿では部分群複体のホモトピー同値性に関する研究と最新の結果を紹介する。

2 ことばの定義

Def 2.1. A G-**poset** is a partially ordered set together with a G-action which preserve the partial order(i.e. $a < b$ implies $ga < gb$). G-poset X から次のように G-複体を構成する: The n-simplices are the totally ordered subsets : $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. We say that a poset X is **contractible** if $|X|$ is contractible. 「はじめに」に登場した $S_p(G), A_p(G)$ はともに conjugation により G 作用が与えられ、G-複体になる。それぞれ、**Brown complex, Quillen complex** とも呼ばれている。

Prop 2.2. If f, f' are maps of posets such that for all $x \in X, f(x) \leq f'(x)$, then $f \simeq f'$.

Def 2.3. We say a poset X is **conically contractible** if there exists a map of posets $f : X \to X$ and an element $x_0 \in X$ such that for all $x \in X, x \leq f(x) \geq x_0$.

$\Longrightarrow$ 上の定義から直ちに「X が conically contractible ならば、X は **contractible** である」ことがわかる ($\because$ Prop 2.2)。次の事実もよく使われる:

Prop 2.4. If X is a poset with a greatest element 1(or a least element 0), then X is contractible.

Let X be a poset. そのとき $X_{\leq x} = \{y \in X \mid y \leq x\}$ とおく。同様に、$X_{<x}, X_{\geq x}, X_{>x}$ を定義しておく。これらは X の subposets である。

Prop 2.5. $X_{\leq x}, X_{\geq x}$ は contractible である。

3 $S_p(G)$ のホモトピー同値性

Given a map $f : X \to Y$ of posets and an element y of Y, we define subposets of X as follows:

$$f/y = \{x \in X \mid f(x) \leq y\}$$
$$y\backslash f = \{x \in X \mid f(x) \geq y\}$$

Rem 3.1. $f/y = f^{-1}(Y_{\leq y}), \quad y\backslash f = f^{-1}(Y_{\geq y})$

Prop 3.2. **(Quillen)** 各 $y \in Y$ に対して、f/y (or $y\backslash f$) が contractible であるとせよ。そのとき、f はホモトピー同値である。

Prop 3.3. $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$ はホモトピー同値である

Proof. $i : \mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{S}_p(G)$ を包含写像とする。任意の $P \in \mathcal{S}_p(G)$ に対して、$i/P = \{P' \in \mathcal{A}_p(G) \mid i(P') \leq P\} = \mathcal{A}_p(P)$ であるので、nontrivial p-group P に対して、$\mathcal{A}_p(P)$ が contractible であることを示せばよい。p 群 P に対しては、その中心 $C_P(P)$ の位数が p で割り切れるので、位数が p である部分群 $B \subset C_P(P)$ が存在する ($C_P(P)$ がアーベル群であることに注意せよ)。この B を使って、$f : \mathcal{A}_p(P) \to \mathcal{A}_p(P); A \mapsto AB$ と定義する。この写像の well-defined 性をチェックしよう。調べるのは AB が $\mathcal{A}_p(P)$ の元になることである。$B \subset C_P(P)$ だから $B \triangleleft P$ である。よって、AB は P の部分群である。また $x \in AB$ に対して、$x = ab\,(a \in A, b \in B)$ とかける。$x^p = (ab)^p = a^p b^p = 1$ となるので、任意の元の位数は 1 または p である。さらに、$y \in AB$ をとると、$y = cd\,(c \in A, d \in B)$ とかけるから、

$$xy = (ab)(cd) = a(bc)d = a(cb)d = c(ab)d = cd(ab) = yx$$

となる。以上より $AB \in \mathcal{A}_p(P)$ であることがわかった。$A \leq AB \geq B$ であるから $\mathcal{A}_p(P)$ は contractible である。 □

Cor 3.4. G が nontrivial normal p-部分群を持つならば、$\mathcal{S}_p(G)$ は contractible である。したがって、$\mathcal{A}_p(G)$ も contractible である。

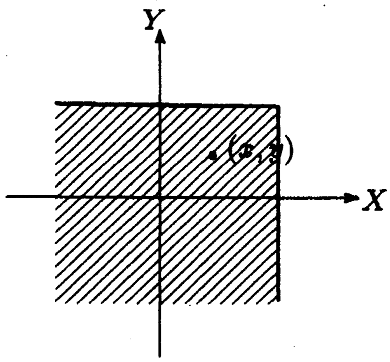
Proof. G の nontrivial normal p-部分群を N とする。そのとき、$f : \mathcal{S}_p(G) \to \mathcal{S}_p(G); P \mapsto PN$ と定義する。PN は G の部分群であり、PN の位数については、$|PN| = \dfrac{|P||N|}{|P \cap N|}$ が成り立つから、p のベキになることがわかる。すなわち、PN は G の p 部分群である。したがって、この写像は well-defined である。$P \leq PN \geq N$ であるから $\mathcal{S}_p(G)$ は contractible である。 □

Def 3.5. A subset S of a poset X will be called *closed* if $x' \leq x \in S$ implies $x' \in S$. Then we easily see that X is closed iff 「$x \in S \Longrightarrow X_{\leq x} \subset S$」.

Let X, Y be posets. Then we view the direct product $X \times Y$ as a poset by

$$(x, y) \leq (x', y') \iff 「x \leq x' \text{ and } y \leq y'」.$$

Let Z be a closed subset of $X \times Y$. $p_1 : Z \to X$, $p_2 : Z \to Y$ を projection から誘導される poset map とする。さらに $Z_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in Z\}$ とおく。



左図で、$X = Y = \mathbf{R}$ として、通常の順序で poset と考える。
斜線部分を Z とする。このとき、
$(x, y) \in Z$ をとると、$X \times Y_{\leq (x,y)} \subset Z$
したがって、Z は $X \times Y$ の closed set である。

Prop 3.6. 各 $x \in X$ に対して、Z_x が contractible であるならば、$p_1 : Z \to X$ はホモトピー同値である。

Proof. 証明の流れは「Z_x と $x\backslash p_1$ がホモトピー同値になること示し、$x\backslash p_1$ も contractible になることから、$p_1 : Z \to X$ のホモトピー同値性を結論づける」ことである。$u : Z_x \to x\backslash p_1; y \mapsto (x, y)$, $v : x\backslash p_1 \to Z_x; (x', y) \mapsto y$ とすると、$vu(y) = y$, $uv(x', y) = (x, y) \leq (x', y)(\because\ x\backslash p_1 = \{(x', y) \mid p_1(x', y) = x' \geq x\})$ したがって、Z_x と $x\backslash p_1$ はホモトピー同値である。Z_x が contractible であるから、$x\backslash p_1$ も contractible になり、直ちに $p_1 : Z \to X$ はホモトピー同値である。 □

Cor 3.7. 各 $x \in X, y \in Y$ に対して、Z_x, Z_y が contractible であるならば、X, Y はホモトピー同値である。

G-poset X の不動点集合に対して、$|X|^G = |X^G|$ が成り立つ。
$\mathcal{A}_p(G)$ への G-action を内部自己同型によって定める。このとき、

$$|\mathcal{A}_p(G)|^G \neq \emptyset \Longleftrightarrow G \text{ が nontrivial } \textbf{normal } p\text{-torus をもつ}$$

Prop 3.8. $\mathcal{A}_p(G)$ **が** G **不動点を持てば、それは可縮である。**

Proof. $\mathcal{A}_p(G)^G \neq \emptyset$ であるから、$|\mathcal{A}_p(G)^G| = |\mathcal{A}_p(G)|^G \neq \emptyset$ である。よって、G が nontrivial normal p-torus H をもつ。ゆえに、G に nontrivial p-subgroup の存在が示せたから、Cor 3.4 より $\mathcal{A}_p(G)$ は可縮である。 □

Def 3.9. Let H be a p-subgroup of G. We let $S_p(G)_{>H}$ be the subposet of $S_p(G)$ consisting of subgroups $> H$. $\Longrightarrow S_p(G) = S_p(G)_{>\{1\}}$

Prop 3.10. $S_p(G)_{>H}$ は $S_p(N_G(H)/H)$ とホモトピー同値である。

Proof. K を H を含む G の p-部分群とする (このような部分群の存在はシローの定理より保障されている)。$N_K(H) = N_G(H) \cap K \supset H$ に注意せよ。包含写像 $\iota : S_p(N_G(H))_{>H} \to S_p(G)_{>H}$ と写像 $r : S_p(G)_{>H} \to S_p(N_G(H))_{>H}; K \mapsto N_K(H)$ により、$r \circ \iota = id$, $\iota r(K) \leq K$ となるので、$\iota \simeq r$ である。さらに、$S_p(N_G(H))_{>H} \cong S_p(N_G(H)/H)$ であるから、$S_p(G)_{>H}$ は $S_p(N_G(H)/H)$ とホモトピー同値である。
(注意) $S_p(N_G(H))_{>H} = \{N_K(H) \mid K$ は H を含む G の p-部分群$\}$ であり、$N_{N_K(H)}(H) = N_K(H)$ である!! □

4 ホモロジカルなシローの定理

Let G be a finite group whose order is divisible by p, and let P be a Sylow p-subgroup of G. We consider the restriction of the action of G on $|S_p(G)|$ given by conjugation to the subgroup P.

Def 4.1. 複体 K に対して、次の集合 K' が複体の条件を満たすとき、この集合 K' を K の**重心細分 (barycentric subdivision)** という;

$$K' = \{s' = (s_0, s_1, \cdots, s_k) \mid s_i \in K,\ s_0 \subset \cdots \subset s_k\}$$

G-複体 K に対して、その重心細分 K' もまた G-複体になる。なぜならば、$s' = (s_0, s_1, \cdots, s_k) \in K'$ をとると、$gs' = (gs_0, gs_1, \cdots, gs_k)$ で、各 $gs_i \in K$ かつ $gs_0 \subset \cdots \subset gs_k$ であるので $gs' \in K'$ となるからである。

$s' \cap gs' \ni s$ をとる (重心細分の各頂点は元の複体の単体である)。$G_{s'} \ni g$ に対して、$(s, gs) \subset gs'$ である。複体の条件から (s, gs) はまた K' の単体になる。したがって、重心細分の定義より $s \subset gs$ または $s \supset gs$ である。いずれの場合にも s と gs が同じ次元であることに注意すると、$s = gs$ がわかる。つまり、任意の G-複体 K の重心細分 K' は **admissible** であることがわかる。$|K| = |K'|$ であることから、複体 K の幾何学的実現を考える場合は最初から K を admissible と仮定してよい。

Lem 4.2. $|S_p(G)|$ の P 作用による特異集合 $(= \{x \in |S_p(G)| \mid P_x \neq \{e\}\})$ は contractible である。

Proof. $|S_p(G)|$ をその重心細分 $|Y|$ で置き換える。$|Y|$ の P 作用による特異集合が contractible であることを示す。

$$\bigcup_H |Y|^H = \bigcup_H |Y^H| = \left|\bigcup Y^H\right|$$

$Y' = \bigcup Y^H$ とおく。ここで H は $S_p(P)$ を渡る。Y' が contractible になることを以下示す。$Z = \{(H, y) \mid y \in Y^H\} \subset S_p(P) \times Y'$ は closed subset である。各 $H \in S_p(P), y \in Y'$ に対して、$Z_H = Y^H, Z_y = S_p(P_y)$ に注意せよ。各 $H \in S_p(P), y \in Y'$ に対して、Z_H, Z_y が contractible であることを示せば、Cor3.6 より $S_p(P)$ と Y' がホモトピー同値になる。さらに、$S_p(P)$ は最大元 P を持つことより可縮であるゆえ、Y' も可縮になって証明は終わる。したがって、示すのは Z_H, Z_y がともに contractible であること。まず、Y' の定義から、任意の $y \in Y'$ に対して P_y は nontrivial p-group、ゆえに $Z_y = S_p(P_y)$ は contractible である。次に、$|Z_H| = |Y^H| = |S_p(G)^H|$ であって、$|S_p(G)^H|$ は conically contractible であるから、contractible である。($\longleftarrow H \in S_p(P)$ であり、$Q \leq QH \geq H$) □

$\mathcal{S}_p(G)$ は simplicial complex だから、そのオイラー数 $\chi(\mathcal{S}_p(G))$ が考えられる。

The 4.3. (Brown) $\chi(|S_p(G)|) \equiv 1$ mod the order of the Sylow group P

Proof. 前 Lem の記号をそのまま使う。$|Y'|$ は contractible であるから

$$\chi(|S_p(G)|) = \chi(|Y|) = 1 + \chi(|Y|, |Y'|)$$

さらに、$|Y| \backslash |Y'|$ への P 作用は free であるから、$\chi(|Y|, |Y'|)$ は the order of the Sylow group P で割り切れる。 □

(追記) Brown の「ホモロジカルなシローの定理」の証明は、Quillen の方法とは別に、David Gluck, Tomoyuki Yoshida によって証明されている。彼らの方法は「Burnside ring のべき等元公式」を応用するものである：

David Gluck, *Idempotent formula for the Burnside algebra with application to the p-subgroup simplical complex*, Illinois J.Math **25** (1981), 63-67.

Tomoyuki Yoshida, *Idempotent of Burnside Rings and Dress Induction Theorem*, J. Algebra **80**(1983), 90–105.

5 メービウス関数について

有限poset$P$に対して、$I(P)=\{(x,y)\in P\times P\,|\,x\leq y\}$とおく。さらに、集合$I(P)$から$\mathbb{Q}$への関数$f:I(P)\to\mathbb{Q}$の全体を$A_{\mathbb{Q}}(P)$で表す。関数$f,g\in A_{\mathbb{Q}}(P), a\in\mathbb{Q}$に対して、和$f+g\in A_{\mathbb{Q}}(P)$, スカラー倍$af\in A_{\mathbb{Q}}(P)$を

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)\quad((x,y)\in I(P))$$
$$(af)(x,y)=af(x,y)\quad((x,y)\in I(P))$$

で定義すると、$A_{\mathbb{Q}}(P)$は$\mathbb{Q}$上のベクトル空間になる。さらに、次のように積を定義する。

$$(fg)(x,y)=\sum_{x\leq z\leq y}f\ (x,z)g(z,y)$$

Prop 5.1. $A_{\mathbb{Q}}(P)$は環になり、さらに任意の$f,g\in A_{\mathbb{Q}}(P), a\in\mathbb{Q}$に対して、$a(fg)=(af)g=f(ag)$である。すなわち、$A_{\mathbb{Q}}(P)$は$\mathbb{Q}$上の多元環である。

Proof. $A_{\mathbb{Q}}(P)$に属する元δを次のように定義する;

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & (x=y)\\ 0 & (x<y)\end{cases}$$

このとき、

$$(f\delta)(x,y)=\sum_{x\leq z\leq y}f\ (x,z)\delta(z,y)=f(x,y),$$
$$(\delta f)(x,y)=\sum_{x\leq z\leq y}\delta(x,z)f(z,y)=f(x,y)$$

であるから$f\delta=\delta f=f$, すなわち、δは$A_{\mathbb{Q}}(P)$のおける(乗法に関する)単位元になる。 □

Def 5.2. $A_{\mathbb{Q}}(P)$を有限poset Pに付随する**隣接代数(adjoining algebra)**という。

Prop 5.3. 隣接代数$A_{\mathbb{Q}}(P)$に属する元fが$A_{\mathbb{Q}}(P)$の可逆元(単元)であるための必要十分条件は、任意の$x\in P$で$f(x,x)\neq 0$となることである。

Proof. (必要性) 等式$fg=gf=\delta$を満たす$g\in\mathbb{Q}$が存在すると仮定すれば、$(fg)(x,x)=f(x,x)g(x,x)=\delta(x,x)=1$が任意の$x\in P$で成り立つ。特に$f(x,x)\neq 0$である。(十分性) 任意の$x\in P$で、$f(x,x)\neq 0$であれば、$g\in A_{\mathbb{Q}}(P)$を帰納的に
(i) $g(x,x)=f(x,x)^{-1}\quad(x\in P)$
(ii) $x<y$のとき、$g(x,y)=-f(x,x)^{-1}\sum_{x<z\leq y}f\ (x,z)g(z,y)$
で定義する。すると、$f(x,x)g(x,x)=\delta(x,x)=1$であって、さらに$x<y$のとき、

$$\begin{aligned}(fg)(x,y)&=\sum_{x\leq z\leq y}f\ (x,z)g(z,y)\\&=f(x,x)g(x,y)+\sum_{x<z\leq y}f\ (x,z)g(z,y)\\&=0\end{aligned}$$

したがって、$A_{\mathbb{Q}}(P)$ において $fg=\delta$ が成立する。同様にして、$h \in A_{\mathbb{Q}}(P)$ を帰納的に

(i)' $h(y,y) = f(y,y)^{-1} \quad (y \in P)$

(ii)' $x < y$ のとき、$h(x,y) = -\left(\sum_{x \leq z < y} h(x,z)f(z,y)\right) f(y,y)^{-1}$

で定義する。すると、$h(y,y)f(y,y) = \delta(y,y) = 1$ であって、さらに $x < y$ のとき、

$$
\begin{aligned}
(hf)(x,y) &= \sum_{x \leq z \leq y} h(x,z)f(z,y) \\
&= \sum_{x \leq z < y} h\ (x,z)f(z,y) + h(x,y)f(y,y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって、$A_{\mathbb{Q}}(P)$ において $hf=\delta$ が成立する。以上より、$fg = hf = \delta$ である。さらに、$g = \delta g = (hf)g = h(fg) = h\delta = h$ である。よって、$fg = gf = \delta$ を得る。すなわち、$f \in A_{\mathbb{Q}}(P)$ は可逆元で、$g(=h)$ がその逆元である。 □

Def 5.4. 有限 poset P の**ゼータ関数 (zeta function)** とは、任意の $(x,y) \in I(P)$ に対して、$\zeta(x,y) = 1$ となる隣接代数 $A_{\mathbb{Q}}(P)$ の元 ζ のことである。

Ex 5.5. $\zeta^2(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} \zeta(x,z)\zeta(z,y) = \sum_{x \leq z \leq y} 1 = \sharp\{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$

Ex 5.6. $\zeta^3(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} \zeta(x,z)\zeta^2(z,y) = \sum_{x \leq z \leq y} (\sum_{z \leq w \leq y} 1) = \sharp\{(z,w) \in P \times P \mid x \leq z \leq w \leq y\}$

$\Longrightarrow$ $k > 0$ が整数のとき、$\zeta^k(x,y) =$ (長さ k の重複鎖 $x = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_k = y$ の個数)

Ex 5.7. 関数 $\zeta - \delta \in A_{\mathbb{Q}}(P)$ を考える。このとき、

$$
(\zeta - \delta)(x,y) = \begin{cases} 1 & (x < y) \\ 0 & (x = y) \end{cases}
$$

である。このとき、

$$
\begin{aligned}
(\zeta - \delta)^2(x,y) &= \sum_{x \leq z \leq y} (\zeta - \delta)\ (x,z)(\zeta - \delta)(z,y) \\
&= \sum_{x < z < y} 1 \\
&= \sharp\{z \in P \mid x < z < y\}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ $k > 0$ が整数のとき、$(\zeta - \delta)^k(x,y) =$ (長さ k の鎖 $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = y$ の個数)

Def 5.8. 有限 poset P のゼータ関数は可逆元である。その逆元 ζ^{-1} を $\mu = \mu_P$ で表し、P の**メービウス関数 (Möbius function)** という。等式 $\mu\zeta = \delta$ から μ を帰納的に定義す

ると、
(i) $\mu(x,x)=1 \quad (x\in P)$
(ii) $x<y$ のとき、$\mu(x,y)=-\sum_{x\le z<y}\mu(x,z)$
となる。

(注 1) (ii) は次のようにしてもよい。$x<y$ のとき、$\mu(x,y)=-\sum_{x<z\le y}\mu(z,y)$
(注 2) (i), (ii) をまとめて、μ を次のように定義してもよい。

$$\sum_{x\le z\le y}\mu(x,z)=\sum_{x\le z\le y}\mu(z,y)=\begin{cases}1 & (x=y)\\ 0 & (x\neq y)\end{cases}$$

The 5.9. 有限 poset P があったとき、$P\hat{}=P\cup\{0\hat{},1\hat{}\}$ において、$0\hat{}$ と $1\hat{}$ を結ぶ長さ i の鎖 $0\hat{}=x_0<x_1<\cdots<x_i=1\hat{}$ の個数を c_i で表す。このとき、

$$\mu_{P\hat{}}(0\hat{},1\hat{})=c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots$$

が成立する。

Proof. まず、$c_0=0, c_1=1$ であることに注意せよ。$\mu=\zeta^{-1}$ であるから、

$$\begin{aligned}\mu_{P\hat{}}(0\hat{},1\hat{})&=(\delta+(\zeta-\delta))^{-1}(0\hat{},1\hat{})\\&=(\delta-(\zeta-\delta)+(\zeta-\delta)^2-\cdots)(0\hat{},1\hat{})\\&=\delta(0\hat{},1\hat{})-(\zeta-\delta)(0\hat{},1\hat{})+(\zeta-\delta)^2(0\hat{},1\hat{})-\cdots\end{aligned}$$

である。ここで、$(\zeta-\delta)^i(0\hat{},1\hat{})$ は $0\hat{}$ と $1\hat{}$ を結ぶ長さ i の鎖 $0\hat{}=x_0<x_1<\cdots<x_i=1\hat{}$ の個数 c_i と一致するから、望む式を得る。 □

Def 5.10. 有限 poset P の**メービウス数 (Möbius number)** とは、$\mu_{P\hat{}}(0\hat{},1\hat{})$ のことである。これを $\mu(P)$ とかく。

Notation 5.11. 有限集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ で、通常の順序を考えて得られる poset を、$\underline{n}$ とかく。また、$\{1,2,\cdots,n\}$ の全ての部分集合からなる有限集合上に、包含関係による順序を考えて得られる poset を、B_n とかく。さらに、正の整数 n の約数全体に、整除関係による順序を考えて得られる poset を、D_n とかく。つまり、$i\le j \iff i\,|\,j$ である。

Prop 5.12. 順序集合 $\underline{2}$ の n 個の直積は B_n と順序同型である。

Proof. $\underline{2}$ の n 個の直積を P とおく。集合 P に属する任意の元 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ に対して、B_n の元 $\{i\in[n]\,|\,e_i=2\}$ を対応させる写像を θ とする。すなわち、

$$\theta: P\to B_n\ ;\ (e_1,e_2,\cdots,e_n)\mapsto\{i\in[n]\,|\,e_i=2\}$$

とする。このとき、$(e_1,e_2,\cdots,e_n)\le(e'_1,e'_2,\cdots,e'_n)$ とすると、$j\in\theta((e_1,e_2,\cdots,e_n))$ ならば $2=e_j\le e'_j$ より、$e'_j=2$ となるから $\theta((e_1,e_2,\cdots,e_n))\subset\theta((e'_1,e'_2,\cdots,e'_n))$ である。次に θ が単射であることを示す。$(e_1,e_2,\cdots,e_n)\neq(e'_1,e'_2,\cdots,e'_n)$ とすると、$e_j\neq e'_j$

となるような j がある。$e_j = 1, e'_j = 2$ とする ($e_j = 2, e'_j = 1$ の場合も以下の議論は同様である)。このとき、$j \notin \theta((e_1, e_2, \cdots, e_n))$ であるが、$j \in \theta((e'_1, e'_2, \cdots, e'_n))$ となるゆえ、$\theta((e_1, e_2, \cdots, e_n)) \neq \theta((e'_1, e'_2, \cdots, e'_n))$ である。さらに、$\underline{2}$ の n 個の直積, B_n の各々の元の個数はともに 2^n である。以上により、θ は順序を保つ全単射である。逆写像 θ^{-1} は、$S \in B_n$ に対して $e_j = \begin{cases} 2 & (j \in S) \\ 1 & (j \notin S) \end{cases}$ と定めることにより、$(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in P$ を対応させる写像である。このとき、$S \subset S' \in B_n$ ならば、θ^{-1} の定義から $\theta^{-1}(S) \leq \theta^{-1}(S')$ である。すなわち、逆写像 θ^{-1} も順序を保つ。よって、P と B_n は順序同型である。 □

Prop 5.13. $\mu_{B_n}(0^\wedge, 1^\wedge) = (-1)^n$, すなわち、$\mu(B_n) = (-1)^n$ である。

Proof. 全順序集合 $\underline{2}$ のメービウス関数は $\mu(1,1) = \mu(2,2) = 1$ であるから、$\mu(1,2) = -1$ である。$\underline{2}$ の n 個の直積を P とおく。$0^\wedge = (1, 1, \cdots, 1), 1^\wedge = (2, 2, \cdots, 2)$ であることに注意して計算すると、

$$\mu_{B_n}(0^\wedge, 1^\wedge) = \mu_P((1, 1, \cdots, 1), (2, 2, \cdots, 2)) = \overbrace{\mu_{\underline{2}}(1,2) \cdot \mu_{\underline{2}}(1,2) \cdots \mu_{\underline{2}}(1,2)}^{n\text{ 個}} = (-1)^n$$

である。 □

Prop 5.14. 整数 $n > 0$ の素因数分解表示を $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ (ただし、$p_1, p_2, \cdots, p_s$ は相違なる素数で、各 $n_i > 0$) とする。このとき D_n は $\underline{n_1 + 1} \otimes \underline{n_2 + 1} \otimes \cdots \otimes \underline{n_s + 1}$ と順序同型である。

Proof. $P = \underline{n_1 + 1} \otimes \underline{n_2 + 1} \otimes \cdots \otimes \underline{n_s + 1}$ とおく。集合 P に属する任意の元 $(t_1, t_2, \cdots, t_s)$ に対して、D_n の元 $p_1^{t_1 - 1} p_2^{t_2 - 1} \cdots p_s^{t_s - 1}$ を対応させる写像を θ とする。すなわち、

$$\theta : P \to D_n \ ; \ (t_1, t_2, \cdots, n_s) \mapsto p_1^{t_1 - 1} p_2^{t_2 - 1} \cdots p_s^{t_s - 1}$$

とする。これは順序を保つ全単射 (単射であることと、$|P| = |D_n| = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdots (n_s + 1)$ であることより OK) であり、逆写像 θ^{-1} は、$m \in D_n$ に対して、$m \,|\, n$ より $m = p_1^{m_1 - 1} p_2^{m_2 - 1} \cdots p_s^{m_s - 1}$ (ただし、各 $m_i \in \underline{n_i + 1}$) と一意的にかけるので、$(m_1, m_2, \cdots, m_s) \in \underline{n_1 + 1} \otimes \underline{n_2 + 1} \otimes \cdots \otimes \underline{n_s + 1}$ を対応させる写像である。明らかに θ^{-1} も順序を保つので、P と D_n は順序同型である。 □

Cor 5.15. 整数 $n (> 0)$ が相違なる s 個の素数の積のとき、D_n は B_s と順序同型である。

Proof. 整数 $n > 0$ の素因数分解表示を $n = p_1 p_2 \cdots p_s$ (ただし、$p_1, p_2, \cdots, p_s$ は相違なる素数) とする。このとき、$D_n \cong \overbrace{\underline{2} \otimes \underline{2} \otimes \cdots \otimes \underline{2}}^{s\text{ 個}} \cong B_s$ である。 □

Prop 5.16. 整数 $n (> 0)$ に対して、

$$\mu_{D_n}(0^\wedge, 1^\wedge) = \begin{cases} (-1)^s & (n \text{ が相違なる } s \text{ 個の素数の積のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

Proof. 整数 $n > 0$ の素因数分解表示を $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ (ただし、$p_1, p_2, \cdots, p_s$ は相違なる素数で、各 $n_i > 0$) とする。このとき D_n は $P = \underline{n_1 + 1} \otimes \underline{n_2 + 1} \otimes \cdots \otimes \underline{n_s + 1}$ と順序同型であった。一般に、$\underline{n}$ のメービウス関数は、$1 \leq i \leq j \leq n$ のとき、

$$\mu_{\underline{n}}(i,j) = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ -1 & (i = j-1 \text{ のとき}) \\ 0 & (i < j-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。$0\hat{} = (1,1,\cdots,1), 1\hat{} = (n_1+1, n_2+1, \cdots, n_s+1)$ であるから、

$$\mu_{D_n}(0\hat{}, 1\hat{}) = \overbrace{\mu_P(1, n_1+1)\mu_P(1, n_2+1)\cdots\mu_P(1, n_s+1)}^{s\text{ 個}} = \begin{cases} (-1)^s & (\text{各 } n_i = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ここで、「各 $n_i = 1$ のとき」とは、n が相違なる s 個の素数の積となるときを意味する。 □

Prop 5.17. $p, q \in D_n$ $(p \leq q)$ のとき、

$$\mu_{D_n}(p,q) = \begin{cases} 1 & (p = q \text{ のとき}) \\ (-1)^s & (q/p \text{ が相違なる } s \text{ 個の素数の積のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

Proof. D_n の閉区間 $[p,q] \cong D_{q/p}$(順序同型) であるゆえ、$\mu_{D_n}(p,q) = \mu_{D_{q/p}}(0\hat{}, 1\hat{})$ である。よって、望む等式を得る。 □

(注) この $\mu_{D_n}(p,q)$ が古典的な整数論におけるメービウス関数である。

メービウス関数 μ を、次のように $P \times P$ まで拡張しておく。

$$\mu_{P\times P}(x,y) = \begin{cases} \mu(x,y) & ((x,y) \in I(P)) \\ 0 & ((x,y) \notin I(P)) \end{cases}$$

この $\mu_{P\times P}$ を改めて、P 上のメービウス関数として μ とかく。

Prop 5.18. $\eta = \zeta - \delta$ とおくとき、$\mu(x,y) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \eta^k(x,y) \quad (x, y \in P)$ である。ただし、$\eta^0 = \delta$ とする。

Proof. $A_{\mathbb{Q}}(P)$ において、δ は単位元で、$\mu = \zeta^{-1}$ であるから、

$$\begin{aligned} \mu(x,y) &= \zeta^{-1}(x,y) \\ &= (\delta + (\zeta - \delta))^{-1}(x,y) \\ &= (\delta - (\zeta - \delta) + (\zeta - \delta)^2 - \cdots)(x,y) \\ &= \delta(x,y) - (\zeta - \delta)(x,y) + (\zeta - \delta)^2(x,y) - \cdots \\ &= \eta^0(x,y) - \eta^1(x,y) + \eta^2(x,y) - \cdots \\ &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \eta^k(x,y) \end{aligned}$$

□

Prop 5.19. 有限 poset P に対して、$\chi(P) = \sum_{x,y\in P} \mu(x,y)$ である。

Proof. まず順序複体 P の k-単体とは長さ k の鎖 (chain) であることを注意せよ。$\eta = \zeta - \delta$ とおくと、$k \geq 1$ のとき $\eta^k(x,y)$ は x, y を結ぶ長さ k の鎖の個数に一致する。$\eta^0(x,y) = \delta(x,y) =$ (Kronecker のデルタ), つまり、$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases}$ であるから、$\sum_{x,y\in P} \eta^0(x,y)$ は P の頂点 (0-単体) の個数を表す。α_k を k-単体の個数とする。$\mu(x,y) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\eta^k(x,y) \quad (x, y \in P)$ が成り立つから、

$$
\begin{aligned}
\sum_{x,y\in P} \mu(x,y) &= \sum_{x,y\in P} \left(\sum_{k\geq 0}(-1)^k\eta^k(x,y)\right) \\
&= \sum_{x,y\in P} \left(\eta^0(x,y) + \sum_{k>0}(-1)^k\eta^k(x,y)\right) \\
&= \sum_{x,y\in P} \left(\delta(x,y) + \sum_{k>0}(-1)^k\eta^k(x,y)\right) \\
&= \sum_{x,y\in P} \delta(x,y) + \sum_{x,y\in P} \left(\sum_{k>0}(-1)^k\eta^k(x,y)\right) \\
&= \sum_{x,y\in P} \delta(x,y) + \sum_{k>0} \left(\sum_{x,y\in P}(-1)^k\eta^k(x,y)\right) \\
&= \alpha_0 + \sum_{k>0} \left(\sum_{x,y\in P}(-1)^k\eta^k(x,y)\right) \\
&= \alpha_0 + \sum_{k>0}(-1)^k \left(\sum_{x,y\in P}\eta^k(x,y)\right) \\
&= \sum_{k\geq 0}(-1)^k\alpha_k \\
&= \chi(P)
\end{aligned}
$$

□

Prop 5.20. P が最小元 0 をもつときは $\chi(P) = 1$ である。さらに $\chi(P\backslash\{0\}) = 1 - \sum_{x\in P} \mu(x)$ が成り立つ。

Proof. P が最小元 0 をもつときは P は可縮になるので、$\chi(P) = 1$ である。前命題より、$\chi(P) = \sum_{x,y\in P} \mu(x,y)$ であり、

$$
\sum_{x,y\in P} \mu(x,y) = \sum_{0\leq x\in P} \mu(0,x) + \sum_{x,y\in P\backslash\{0\}} \mu(x,y)
$$

よって、$1 = \sum_{0 \le x \in P} \mu(0,x) + \sum_{x,y \in P \setminus \{0\}} \mu(x,y)$. 直ちに、$\chi(P \setminus \{0\}) = 1 - \sum_{x \in P} \mu(0,x)$ となり、$\mu(x)$ の定義により、$\chi(P \setminus \{0\}) = 1 - \sum_{x \in P} \mu(x)$ となる。 □

Prop 5.21. 最小元 0, 最大元 1 を持つ順序集合 P に対して、$\chi(P \setminus \{0,1\}) - 1 = \mu(P)$ が成り立つ。すなわち、$\overline{\chi}(P \setminus \{0,1\}) = \mu(P)$ である。$\overline{\chi}$ は reduced Euler characteristic を表す。

Proof. $P^\wedge = P \cup \{0,1\} = P$ である。そこで、$\overline{P} = P^\wedge - \{1\}$ とおく。前命題の P に $\overline{P}$ を代入して、

$$\chi(\overline{P} \setminus \{0\}) = 1 - \sum_{x \in \overline{P}} \mu(x)$$

ここで、$\overline{P} \setminus \{0\} = P \setminus \{0,1\}$ であるから、、

$$\begin{aligned}
\chi(P \setminus \{0,1\}) - 1 &= -\sum_{x \in \overline{P}} \mu(0,x) \\
&= -\sum_{0 \le x < 1, x \in \overline{P}} \mu(0,x) \\
&= \mu_{P^\wedge}(0,1) \\
&= \mu(P)
\end{aligned}$$

となる。ここで、最後の等号は P のメービウス数の定義である。 □

Rem 5.22. 上の命題で、$(P \setminus \{0,1\})^\wedge = P \setminus \{0,1\} \cup \{0,1\} = \overline{P} \setminus \{0\} \cup \{0,1\} = P = P^\wedge$ だから $\overline{\chi}(P \setminus \{0,1\}) = \mu(P \setminus \{0,1\})$ ともかける。

Notation 5.23. 順序集合 P が最大元 1, 最小元 0 をもつとき、$P \setminus \{0,1\}$ を P° or $\overline{P}$ と書く。

順序複体において、メービウス数が重要な理由の 1 つは次の定理が成り立つからである。

The 5.24. P, Q を P^0, Q^0 がホモトピー同値になるような posets とするとき、$\mu(P) = \mu(Q)$ である。すなわち、$\mu(P) \neq \mu(Q)$ ならば、P^0, Q^0 はホモトピー同値にならない。

Cor 5.25. P を P^0 が可縮であるような poset とするとき、$\mu(P) = 0$ である。すなわち、$\mu(P) \neq 0$ ならば P^0 は可縮でない。

The 5.26. P, Q を $P \setminus \{0\}$, $Q \setminus \{0\}$ がホモトピー同値になるような posets とするとき、$\sum_{x \in P} \mu(x) = \sum_{y \in Q} \mu(y)$ である。すなわち、$\sum_{x \in P} \mu(x) \neq \sum_{y \in Q} \mu(y)$ ならば、$P \setminus \{0\}$, $Q \setminus \{0\}$ はホモトピー同値にならない。

Cor 5.27. P を $P \setminus \{0\}$ が可縮となる poset とするとき、$\sum_{x \in P} \mu(x) = 0$ である。すなわち、$\sum_{x \in P} \mu(x) \neq 0$ ならば、$P \setminus \{0\}$ は可縮にならない。

次に有限群 G の部分群複体を考えよう。まず subgroup lattice $S(G)$ については、$\overline{S(G)} = S(G)^\circ = S(G) - \{1, G\}$ であるから、直ちに

Cor 5.28. $\overline{\chi}(\overline{S(G)}) = \mu(S(G))$

Brown complex $S_p(G)$, Quillen complex $A_p(G)$ については、$S_p(G) \overset{h.e.}{\simeq} A_p(G)$ であるから、

Cor 5.29. $\sum_{x \in S_p(G)} \mu(x) = \sum_{y \in B_p(G)} \mu(y)$

G が non-trivial な正規 p-部分群を持てば、$S_p(G)$ は contractible であるから、

Prop 5.30. G が non-trivial な正規 p-部分群を持てば、$\sum_{x \in S_p(G)} \mu(x) = 0$ である。

6 ホモロジカルなシローの定理の一般化

さて、順序複体 (order complex) $P \backslash \{0\}$ のオイラー数は、上述のように $1 - \sum_{x \in P} \mu(x)$ に一致する。すなわち、$\chi(P\backslash\{0\}) = 1 - \sum_{x \in P} \mu(x)$ である。これにより、Brown の homological な Sylow の定理は

$$|G|_p \mid \sum_{x \in S_p(G)} \mu(x) \quad (|G|_p \text{ は } G \text{ の Sylow } p\text{-subgroup の位数})$$

と同値である。あるいは、合同式を用いて

$$\sum_{x \in S_p(G)} \mu(x) \equiv 0 \mod |G|_p$$

と表現できる。以下、メービウス関数 μ は $\mu_{S(G)}$ の意味である。すなわち、subgroup lattice $S(G)$ 上でメービウス関数を考えている。

Def 6.1. $H < G$ のとき、$\mu(H) = \mu(1, H)$, 特に $H = G$ のときは、$\mu(1, G) = \mu(S(G))$(= $S(G)$ のメービウス数) である。それぞれ、**H のメービウス数**、**G のメービウス数**という。

Rem 6.2. $H < G$ のとき、$\mu(H) = \mu_{S(H)}(1, H)$ ($\longleftarrow$ メービウス関数の定義) 結局、H のメービウス数 $=$ $S(H)$ のメービウス数、G のメービウス数 $=$ $S(G)$ のメービウス数ということ。

Brown の homological な Sylow の定理の一般化として、次の定理が知られている。

The 6.3. (Thévenaz 1987 [17]) n を、$|G|$ を割る整数とするとき、

$$\sum_{X \leq G \text{ かつ } |X| \mid n} \mu(X) \equiv 0 \mod n$$

である。特に、$n = |G|_p$ とおけば Brown の homological な Sylow の定理である。

さらに、これを一般化した次の定理が知られている。

The 6.4. (Hawkes, Isaacs, Özaydin 1989 [6]) H を G の部分群、n を、$|G|$ を割る整数とするとき、

$$(|G|/|N_G(H):H|)\sum_{H\leq X\leq G \text{ かつ } |X|\,|\,n}\mu(H,X)\equiv 0 \mod n$$

特に、$H=1$ のときは Thévenaz の定理に一致する。

一般に、群のメービウス数を計算するのは難しい。特殊な群のメービウス数は計算できる [6]。

Prop 6.5. p を1つの素数とする。巡回 p-群 C_{p^n} については、

$$\mu(C_{p^n})=\begin{cases}-1 & (n=1)\\ 0 & (n\neq 1)\end{cases}$$

Prop 6.6. Let P be a p-group of order $p^n(n\geq 2)$. そのとき、

$$\mu(P)=\begin{cases}(-1)^n p^{\binom{n}{2}} & (P \text{ が elementary abelian})\\ 0 & (others)\end{cases}$$

$\mu(C_p)=\mu(1,C_p)=-\mu(1,1)=-1$ であることに注意して、例えば、$G=C_p\times C_p$ のとき、$\mu(C_p\times C_p)=\mu(1,C_p\times C_p)=-(\mu(1,1)+(p+1)\mu(1,C_p))=p$ である。

Prop 6.7. $\mu(A_5)=-60$, $|\mathrm{Aut}\,(A_5)|=120$

7 部分群複体のホモトピー同値

Def 7.1. Let P be a poset. $P\ni x,y$ が complements であるとは、$\{x,y\}$ が P において、上界または下界をもたないことをいう。このとき、$x\perp y$ とかき、さらに $\perp(s)=\{x\in P\,|\,x\perp s\}$ とかく。順序集合 P が antichain であるとはどの異なる2つの元も比較不可能であることをいう。

Prop 7.2. (Homotopy complementation formula) [3] 最小元 0^ と最大元 1^ をもつ束 $(L,\leq)$ について、$s\in\overline{L}=L-\{0\text{^},1\text{^}\}$ とするとき、$\perp(s)$ は antichain になり、

$$\overline{L}\simeq\bigvee_{x\perp s}\sum((0\text{^},x)*(x,1\text{^}))$$

ここで、$(x,y)=\{z\in L\,|\,x<z<y\}$ である。

Prop 7.3. $\overline{B_n}=B_n-\{0\text{^},1\text{^}\}$ とするとき、$\overline{B_n}$ は S^{n-2} とホモトピー同値である。さらに、$\mu(\overline{B_n})=(-1)^n$ である。

以下では、$S(G)$ の proper part を $\overline{S(G)}=S(G)-\{0\text{^},1\text{^}\}$ と記すべきであるが、$S(G)$ のまま流用する。

Prop 7.4. S を non-abelian simple group で、$G = \overbrace{S \times S \times \cdots \times S}^{n \text{ times}}$ とおく。このとき、$S(G)^G$ は S^{n-2} とホモトピー同値である。さらに、$\mu(S(G)^G) = (-1)^n$ である。

Prop 7.5. C_p を素数位数 p の巡回群で、$G = \overbrace{C_p \times C_p \times \cdots \times C_p}^{n \text{ times}}$ とおく。このとき、$S(G)$ は S^{n-2} の $p^{\binom{n}{2}}$ 個のブーケとホモトピー同値である。さらに、$\mu(S(G)) = (-1)^n p^{\binom{n}{2}}$ である。

Proof. G はアーベル群であるから $S(G)^G = S(G)$ となる。そして、この lattice は F_p 上の n 次元ベクトル空間の non-zero 真部分空間の lattice である。よって、そのホモトピー型は S^{n-2} の $p^{\binom{n}{2}}$ 個のブーケとホモトピー同値である。 □

8 A_5 の部分群複体のホモトピーを探る

任意の p-群 P に対しては P 自身が最大元になるので、$S_p(P)$ は可縮、すなわち $S_p(P) \simeq \{*\}$ となる。特に G が巡回 p-群 C_{p^n} のとき、$S_p(G) = \Delta^{n-1}$ であり、$S(G)^0 = \Delta^{n-2}$ となる。また、G が elementary abelian p 群 $\overbrace{C_p \times C_p \times \cdots \times C_p}^{n \text{ 個}}$ のとき、$S(G)^0 \simeq S^{n-2}$ となることが知られている。

有限可解群 G に対して、$S_p(G)$ のホモトピー同値性については次の定理がある ([11])。

The 8.1. **(F.Francesco 2005 [5])** Let G be a finite solvable group and p an odd prime number dividing the order of G. The Quillen complex of G at p is homotopy equivalent to a wedge of spheres.

この定理を踏まえて、次の問題が自然に生ずる。

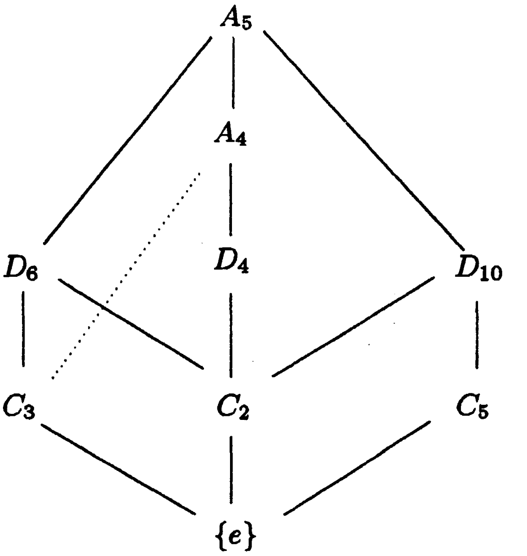
問題 G が有限非可解群のとき、Quillen complex $\mathcal{A}_p(G)$ はどんなホモトピー型を持つか？ ここで、p は群 G の位数のある素数約数とする。

対称群 S_n に関しては、現在のところ、$\mathcal{A}_p(S_n)$(or $\mathcal{S}_p(S_n)$) のホモトピー型は知られていない。

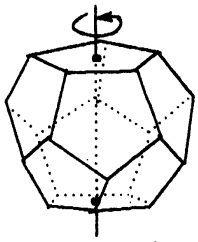
我々は、まず A_5 のハッセ図を調べよう。A_5 には 4 次の交代群 A_4, 位数 10, 6, 4 の 2 面体群 D_{10}, D_6, D_4, 位数 5, 3, 2 の巡回群 C_5, C_3, C_2, と単位群 $\{e\}$ が部分群として含まれているが、A_5 の任意の部分群はそれらのどれかに共役であることが知られている。部分群 H の $G = A_5$ における正規化群を $N_G(H)$ と表すとき、

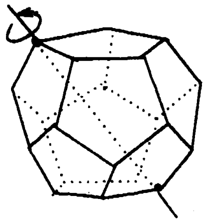
$$N_G(C_2) = D_4, \qquad N_G(C_3) = D_6$$
$$N_G(D_4) = A_4, \qquad N_G(C_5) = D_{10}$$

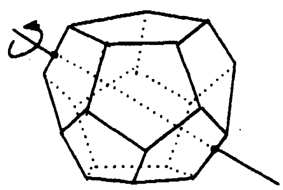
である。$S(G)/G$ のハッセ図は次の通りである。ここで、$S(G)$ は G の部分群全体の集合で、G の共役作用により G 集合と見ている。また、$(H), (K) \in S(G)/G$ に対して、$H = g^{-1}Kg$ となる $g \in G$ が存在するときに限り、$(H) \leq (K)$ と定義する。

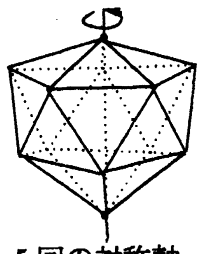


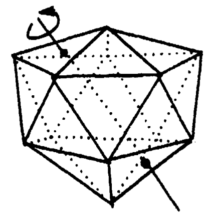
A_5 の位数は $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ であるから、Sylow-2 部分群 $V(= D_4)$, Sylow-3 部分群 C_3, Sylow-5 部分群 C_5 はそれぞれ $2k+1, 3l+1, 5m+1$ 個ある。A_5 を正 20 面体群として見て、部分群の個数を、その対称軸に注目して数えると、

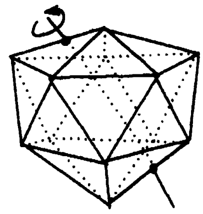

5 回の対称軸


3 回の対称軸

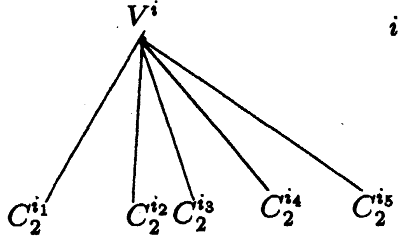

2 回の対称軸


5 回の対称軸


3 回の対称軸


2 回の対称軸

$V(= D_4)$ は 5 個, C_3 は 10 個, C_5 は 6 個ある。ちなみに C_2 は 15 個ある。V の個数を計算するのに、C_2 の個数 15 を 3 で割ると出る。$\Longrightarrow$ $S_3(A_5)$ は 10 点, $S_5(A_5)$ は 6 点 となっている。また、$S_2(A_5)$ は以下のような 1 点を共有する wedge が 5 組できる。



$i = 1, 2, 3, 4, 5$

一方、N を G の全ての極大正規部分群のインターセクションとする。そのとき、

$$N = 1 \Longleftrightarrow G \text{ は単純群の直積}$$

したがって、G が単純群の直積でなければ、$N \neq 1$ となる。このとき、$X \leq XN \geq N$ より、$S(G)^\circ$ は contractible になる。例えば、巡回 p-群 C_{p^n} などは、単純群ではないから $N \neq 1$ となり、$S(G)^\circ$ は contractible になる。さらに、この場合は $S_p(G) = S(G)^0 \cup \{1\}$ となっているから contractible 性は明らかである。

非可換単純群 A_5 については、$\mu(A_5) = -60$ であったから、$S(A_5)^\circ$ は contractible でないことが分かる。$S_p(A_5)(p = 2, 3, 5)$ についても、既述の事実により contractible ではないことが分かる。

参考文献

[1] Aschbacher M and Smith S.D., *On Quillen's conjecture for the p-groups complex*, Ann. Math. **137** (1993), 473-529.

[2] Björner A., *Homotopy type of posets and lattice complementation*, J. Combinatorial Theory, Series A. **30**(1981), 90–100.

[3] Björner A and Walker J.W., *A homotopy complementation formula for partially ordered sets*, Europ. J. Combinatorics. **4**(1983),11-19.

[4] Bux K.U., *Orbit spaces of subgroup complexes, Morse theory, and a new proof of a conjecture of Webb*, Topology Proc. **24**(1999), 39–51.

[5] F. Francesco., *On the homotopy type of the Quillen complex of finite soluble groups*, J. Algebra. **283**(2005), 639–654.

[6] Hawkes T, Isaacs I.M. and Özaydin M., *On the Möbius function of a finite group*, Rocky Moutain J. Math. **19**(1989), 1003–1034.

[7] Kratzer C and Thévenaz J., *Type d'homotopie des treillis et treillis des sous-groupes d'un groupe fini*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 85–106.

[8] Ksontini R., *Simple connectivity of the Quillen complex of the symmetric group*, J. Combinatorial Theory, Series A. **103**(2003), 257–279.

[9] Ksontini R., *Hypergraph matching complexes and Quillen complexes of symmetric groups*, J. Combinatorial Theory, Series A. **106**(2004), 299–314.

[10] Lucido M.S., *On the partially ordered set of nilpotent subgroups of a finite group*, Comm. Algebra. **23(5)** (1995), 1825–1836.

[11] Pulkus J and Welker V., *On the homotopy type of the p-subgroup complex for finite solvable groups*, J. Austral. Math. Soc, Series A. **69**(2000), 212-228.

[12] Quillen D., *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, Advances in Math. **28**(1978), 101–128.

[13] Rival I., *A fixed point theorem for finite partially ordered sets*, J. Combinatorial Theory, Series A. **21**(1976), 309–318.

[14] Spanier E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 19661.

[15] Stanley R.P., *Some aspects of groups acting on finite posets*, J. Combinatorial Theory, Series A. **32**(1982), 132–161.

[16] Symonds P., *The orbit space of the p-subgrpup complex is contractible*, Comment. Math. Helv. **73**(1998), 400–405.

[17] Thévenaz J., *Permutation Representations Arising from Simplicial Complexes*, J. Combinatorial Theory, Series A. **46**(1987), 121-155.

[18] Thévenaz J and Webb P.J., *Homotopy Equivalence of Posets with a Group Action*, J. Combinatorial Theory, Series A. **56**(1991), 173–181.

[19] Walker J.W., *Homotopy type and Euler characteristic of partially ordered set*, Europ. J. Combinatorics. **2**(1981), 373–384.

[20] Webb P.J., *Subgroup complexes*, Proc. Symp. in Pure Math. **47**(1987), the Arcata Conf. in Representation of Finite Groups, Vol I , 349–365.

[21] Welker V., *The Poset of Conjugacy Classes of Subgroups in a Finite Solvable Group*, J. Algebra. **148**(1992), 203-218.