数理解析研究所講究録
第 1575 巻 2008 年 65-72

Borsuk-Ulam 型定理と写像度について

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate School of Science, Osaka University

1　序

Borsuk-Ulam(ボルスク-ウラム)の定理は n 次元単位球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ への任意の連続写像 f に対し, $f(-a) = f(a)$ となる $a \in S^n$ が存在するという定理である. その証明にはいくつかの方法が知られているが, その一つの方法として「連続写像 $f : S^n \to S^n$ が $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき, f の写像度は奇数である.」という写像度に関する命題を用いて証明するものがある.

本稿では, 次節で写像度に関する基本的なことを述べ, 上に述べたような対称性を保つような写像 ($f(-x) = -f(x)$ を満たす写像) の写像度について考察する. 第 3 節で Banach 空間における Lay-Schauder 写像度について紹介し, これを用いて Borsuk-Ulam 型定理の Banach 空間への一般化について述べる. 本稿の中には新しい結果などはないが, 位相幾何学的で研究されている Borsuk-Ulam 型定理の様々な一般化を今後, Banach 空間に対しても考えるための基礎事項をまとめることを目的としたい.

2　写像度について

M, N を 向きづけられたコンパクト連結 n 次元多様体とする. M, N には境界があってもよく, それらを $\partial M, \partial N$ により表すことにする.

M から N への連続写像 $f : M \to N$ が $f(\partial M) \subset \partial N$ を満たすとき, M, N の基本ホモロジー類をそれぞれ $[M, \partial M] \in H_n(M, \partial M; \boldsymbol{Z}), [N, \partial N] \in H_n(N, \partial M; \boldsymbol{Z})$ により表すと,

$$f_*[M, \partial M] = (\deg f)[N, \partial N]$$

を満たす整数 $\deg f$ が存在し, これを f の写像度という.

$\partial M, \partial N$ がともに空集合でなく, ∂N が連結の場合, 対 $(M, \partial M)$ のホモロジー完全系列の中の準同型 $\partial_* : H_n(M, \partial M; \boldsymbol{Z}) \to H_n(\partial M; \boldsymbol{Z})$ により, $[M, \partial M]$ は ∂M の基本ホモロジー類 $[\partial M] = [(\partial M)_1] + \cdots + [(\partial M)_k]$ ($(\partial M)_1, \cdots, (\partial M)_k$ は ∂M の連結成分) に移る. N に関しても同様である. $f|_{\partial M_i} : \partial M_i \to \partial N$ に対しても写像度を考えることができて,

$$\deg f = \sum_{i=1}^{k} \deg(f|_{\partial M_i})$$

が成り立つことがわかる.

ここで, 写像度の幾何学的な意味についても少し触れておこう.

M, N を 上と同様, 滑らかで向きづけられた連結 n 次元多様体とし (境界があってもよい), さらに, M はコンパクトであることを仮定する. C^∞ 写像 $f: M \to N$ に対して, 正則値 $y \in N - \partial N$ で, $y \notin f(\partial M)$ を満たすものを考える. M がコンパクトであることから $f^{-1}(y)$ は有限個の点で, $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ と書くことにする. このとき, y の近傍 V を十分小さく取ると, 各 x_i の近傍 U_i で $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ を満たし, $f|_{U_i}: U_i \to V$ が同相になるようなものが存在する.

各 U_i に対して, $H^n(U_i, U_i - \{x_i\}) \cong H^n(M, M - \{x_i\}) \cong H^n(M, \partial M)$ で, $H^n(M, \partial M)$ の基本ホモロジー類 $[M, \partial M]$ に対応する局所的な向き $\mu_{x_i} \in H^n(U_i, U_i - \{x_i\})$ が定まる. V に対しても同様に局所的な向き $\mu_y \in H^n(V, V - \{y\})$ が定まる. $f_*\mu_{x_i} = \varepsilon_i \mu_y$ となる $\varepsilon_i \in \boldsymbol{Z}$ が定まるが, $f|_{U_i}: U_i \to V$ が同相であることから, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ である. これを利用して f の y における写像度 $\deg(f, y)$ を

$$\deg(f, y) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$$

により定める.

$y \in N$ が正則値でないときにも, $y \notin f(\partial M)$ を満たしているときには次のように y での写像度を考えることができる.

$y \notin f(\partial M)$ および ∂M がコンパクトであることより, y の十分小さい 近傍 V で $B^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ と同相なものを取ると, $f(\partial M) \cap V = \emptyset$ となる ($H_n(N, N - V) \cong \boldsymbol{Z}$ を満たすようにとっておく). サードの定理より V には正則値 y' が存在する. このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 2.1. 上の状況で $y', y'' \in V$ を正則値とすると, $\deg(f, y') = \deg(f, y'')$.

証明. M がコンパクトであることから $f^{-1}(y')$ は有限集合であり $f^{-1}(y') = \{x'_1, \cdots, x'_l\}$ と表すことにする. $\deg(f, y')$ の定義の仕方により, $i: (M, \partial M) \to (M, M - \{x'_1, \cdots, x'_l\})$ と $f(M, M - \{x'_1, \cdots, x'_l\}) \to (N, N - y')$ の合成を考えると, $(f \circ i)_*([M, \partial M]) = \deg(f, y')\mu_{y'}$ 一方, $j: (N, N - V) \to (N, N - \{y'\})$ は n 次ホモロジーの同型 $j_*: H_n(N, N - V) \to H_n(N, N - \{y'\})$ を導き, $j_*(\alpha) = \mu_{y'}$ となる $\alpha \in H_n(N, N - V)$ を取ると, $f: (M, \partial M) \to (N, N - V)$ との合成を考えれば, 上の $f \circ i$ と同じで, $(j \circ f)_*([M, \partial M]) = \deg(f, y')\mu_{y'}$. したがって, $f_*([M, \partial M]) = \deg(f, y')\alpha$ となる. 同様にして, y'' に対しても $f_*([M, \partial M]) = \deg(f, y'')\alpha$ が成り立ち, このことから, $\deg(f, y') = \deg(f, y'')$ がわかる. ∎

この補題から, $y \in N$ が $y \notin f(\partial M)$ を満たすときには, 正則値でなければ, 十分近くの正則値 y' をとって, $\deg(f, y) = \deg(f, y')$ と定義することができる.

ところで, N が境界をもつコンパクトな多様体で, $f: M \to N$ が $f(\partial M) \subset \partial N$ を満たすときには, 補題 2.1 の証明中と同様に, $y \in N$ が $y \notin f(\partial M)$ を満たす正則値であれば, $f: (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ と $j: (N, \partial N) \to (N, N - \{y\})$ の合成を考えれ

ば, $(j\circ f)_*([M,\partial M]) = \deg(f,y)\mu_y$ である. $j_*([N,\partial N]) = \mu_y$ より, $f_*([M,\partial M]) = \deg(f,y)[N,\partial N]$ が成り立つ. つまり, 次の命題が成り立つ.

命題 2.2. $f:(M,\partial M)\to(N,\partial N)$ を C^∞ 写像とする. このとき, 任意の $y\in N-\partial N$ に対して, $\deg f = \deg(f,y)$.

さて, この命題を用いて序に紹介した Borsuk-Ulam の定理を導く写像度に関する命題を証明してみよう. まず, 次の命題を証明する.

命題 2.3. M を $\boldsymbol{R}^n$ に埋め込まれた境界を持つ n 次元コンパクト連結可微分多様体で, 任意の $x\in M$ に対して $-x\in M$ を満たすものとする (ここで $-x$ は $M\subset\boldsymbol{R}^n$ と考えることにより定義されるものである). $0\notin M$ であるとき, 連続写像 $f:(M,\partial M)\to(D^n,S^{n-1})$ が $f(-x)=-x$ を満たすならば, $\deg f\equiv 0 \pmod 2$ である.

この 命題 を示すには次の 補題 を証明すればよい.

補題 2.4. 連続写像 $f:(M,\partial M)\to(D^n,S^{n-1})$ とホモトピー同値な C^∞ 写像 $g:(M,\partial M)\to(D^n,S^{n-1})$ で, $0\in D^n$ が正則値であり, $g(-x)=-g(x)$ を満たすようなものが存在する.

補題 2.4 が証明されれば, $\deg f=\deg g=\deg(g,0)\equiv \sharp g^{-1}(0) \pmod 2$ ($\sharp g^{-1}(0)$ は有限集合 $g^{-1}(0)$ の元の個数) であり, $g(-x)=-g(x)$ より, $x\in g^{-1}(0)$ ならば, $-x\in g^{-1}(0)$ である. $0\notin M$ なので $\sharp g^{-1}(0)$ は偶数になることがわかる. したがって, $\deg f$ は偶数である.

補題 2.4 の証明. まず, 十分小さい $\varepsilon>0$ に対して任意の $x\in M$ で $\|f(x)-f_1(x)\|<\varepsilon$ を満たすような C^∞ 写像 $f_1:M\to\boldsymbol{R}^n$ で, $f_1(-x)=-f_1(x)$ を満たすようなものをとる. $(Jf_1)_x$ を $x\in M$ における Jacobi 行列とし, $U=\{A\in M(n,\boldsymbol{R})\mid \det((Jf_1)_0+A)\neq 0, \|A\|<\varepsilon\}$ とおく. ここで, $M(n,\boldsymbol{R})\cong\boldsymbol{R}^{n^2}$ と見て, $\|A\|$ は通常の $\boldsymbol{R}^{n^2}$ のノルムを考えている.

$F:M\times U\to\boldsymbol{R}^n$ を $F(x,A)=f_1(x)+Ax$ により定義する. (ε を十分小さくとって $0\notin F(\partial M,U)$ となるようにしておく.) このとき, $0\in\boldsymbol{R}^n$ は正則値である. したがって, $W=F^{-1}(0)$ とおくと, これは $M\times U$ の n^2 次元の部分多様体である. $\pi:M\times U\to U$ を射影とし, その W への制限 $\pi|_W:W\to U$ を考える. サードの定理より, $\pi|_W$ の正則値が存在し, その一つを A_0 とする. このとき, $g_1:M\to\boldsymbol{R}^n$ を $g_1(x)=F(x,A_0)$ により定義すると, これは 0 が正則値になるような C^∞ 関数である. 実際, $x\in g_1^{-1}(0)$ とすると, $F(x,A_0)=g_1(x)=0$ であり, 任意の $w\in T_0\boldsymbol{R}^n$ に対して, 0 が F の正則値であることから, $dF_{(x,A_0)}(u,v)=w$ となるような $(u,v)\in T_x(M)\oplus T_{A_0}(U)\cong T_{(x,A_0)}(M\times U)$ が存在する. A_0 は $\pi|_W$ の正則値だから, $(u',v)\in T_{(x,A_0)}(W)\subset T_{(x,A_0)}(M\times U)$ となるような $u'\in T_x(M)$ が存在し, $(d\pi|W)_{(x,A_0)}(u',v)=v$ となる. $u_0=u-u'$ とおくと, $W=F^{-1}(0)$ より, $dF_{(x,A_0)}(u',v)=0$ になることに注意すると,

$$(dg_1)_x(u_0)=dF_{(x,A_0)}(u_0,0)=dF_{(x,A_0)}(u-u',v-v)=dF_{(x,A_0)}(u,v)-dF_{(x,A_0)}(u',v)=w.$$

したがって, $(dg_1)_x : T_x(M) \to T_0\boldsymbol{R}^n$ は全射で x は正則点. 任意の $x \in g_1^{-1}(0)$ でこれが成り立つので, 0 は正則値である.

さて, $H_1 : M \times [0,1] \to \boldsymbol{R}^n$ を $H_1(x,t) = tg_1(x) + (1-t)f(x)$ により定義すると, g_1 は f の十分近くにあるので, $r\ (0 < r < 1)$ を十分小さくとって $V(r) = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| < r\}$ に対して, $H(\partial M \times [0,1]) \cap V(r) = \emptyset$, となるようにできる. このような r を一つとり, $V(r)^c$ ($V(r)$ の補集合) 上では 0 , $\overline{V(\frac{r}{2})} = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| \leqq \frac{r}{2}\}$ 上では 1 となるような C^∞ 関数 $\varphi : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ で $\varphi(-x) = \varphi(x)$ を満たすようなものを取る. $g : M \to D^n$ を

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & (x \in g_1^{-1}(\overline{V(\frac{r}{2})}) \\ \varphi(g_1(x))g_1(x) + (1-\varphi(g_1(x)))g_1(x)/\|g_1(x)\| & (g_1^{-1}(V(\frac{r}{2})^c) \end{cases}$$

により定義する. ($g_1(x) > 1 > r$ となる点 x では $\varphi(g_1(x)) = 0$ なので $g(M) \subset D^n$ となっている) この g が C^∞ 級であること, および $g(-x) = -g(x)$ を満たすことはすぐに確かめられる. また, $g_1(\partial M) \cap V(r) \subset H(\partial M \times [0,1]) = \emptyset$ なので, $x \in \partial M$ に対しては $g_1(x) \geqq r$ であることに注意すると, $\|g(x)\| = \|g_1(x)/\|g_1(x)\|\| = 1$ すなわち $g(\partial M) \subset S^{n-1}$ である.

この $g : (M, \partial M) \to (D^n, S^{n-1})$ が $f : (M, \partial M) \to (D^n, S^{n-1})$ とホモトピックであることは, $f_2 : (M, \partial M) \to (D^n, S^{n-1})$ を

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in f^{-1}(\overline{V(\frac{r}{2})}) \\ \varphi(f(x))f(x) + (1-\varphi(f(x)))f(x)/\|f(x)\| & (f^{-1}(V(\frac{r}{2})^c) \end{cases}.$$

により定義すると, f と f_2 はホモトピックであり, $H : ((M, \partial M) \times I) \to (D^n, S^{n-1})$ を

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,t) & (x \in H_1^{-1}(\overline{V(\frac{r}{2})}) \\ \varphi(H_1(x,t))H_1(x,t) + (1-\varphi(H_1(x,t)))H_1(x,t)/\|H_1(x,t)\| & (x \in H_1^{-1}(V(\frac{r}{2})^c)) \end{cases}$$

により定義すると, $H(\partial M \times I) \subset S^n$ で, これが f_2 と g のホモトピーになる. したがって, f と g はホモトピックである. ∎

系 2.5. M を $\boldsymbol{R}^n$ に埋め込まれた境界を持つ n 次元コンパクト連結可微分多様体で, 任意の $x \in M$ に対して $-x \in M$ を満たすものとする (ここで $-x$ は $M \subset \boldsymbol{R}^n$ と考えることにより定義されるものである). $0 \notin M$ で M の境界 ∂M が連結であるとき, 連続写像 $f : \partial M \to S^{n-1}$ が $f(-x) = -f(x)$ を満たすならば, $\deg f \equiv 0 \pmod 2$ である.

証明. 連続写像 $f : \partial M \to S^{n-1}$ で $f(-x) = -f(x)$ を満たすものに対して, $g : M \to D^n$ で, $g|_{\partial M} = f$ かつ 任意の $x \in M$ に対して $g(-x) = -g(x)$ となるようなものが存在する.

命題 2.1 より $\deg g \equiv 0 \pmod 2$ であるが, $\deg g = \deg(g|_{\partial M}) = \deg f$ なので, $\deg f \equiv 0 \pmod 2$ となる. ∎

系 2.6. M を $\boldsymbol{R}^n$ に埋め込まれた境界を持つ n 次元コンパクト連結可微分多様体で, 任意の $x \in M$ に対して $-x \in M$ を満たすものとする. $0 \in M - \partial M$ で M の境界 ∂M が

連結であるとき, 連続写像 $f:\partial M\to S^{n-1}$ が $f(-x)=-f(x)$ を満たすならば, $\deg f\equiv 1 \pmod 2$ である.

証明. $0\in M-\partial M$ であり, $M-\partial M$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合だから, $B(\varepsilon)=\{x\in\boldsymbol{R}^n\mid \|x\|<\varepsilon\}$ は ε を十分小さく取ると, $B(\varepsilon)\subset M-\partial M$ となる. このとき, $M-B(\varepsilon/2)$ は境界つき多様体で, その境界は $\partial M\cup S^{n-1}(\varepsilon/2)$ である. (ここで, $S^{n-1}(\varepsilon/2)=\{x\in\boldsymbol{R}^n\mid \|x\|=\varepsilon/2\}$ である.) 連続写像 $g:M-B(\varepsilon/2)\to D^n$ で, ∂M 上で f と一致し, $S^{n-1}(\varepsilon/2)$ 上では $g(x)=x/\|x\|$ となるようなものが存在する. このとき, $\deg(g|_{S^{n-1}}(\varepsilon/2))=1$ であり,

$$\deg f=\deg g-\deg(g|S^{n-1}(\varepsilon/2))=\deg g-1\equiv 0 \pmod 2.$$

∎

この系で $M=D^n$ としたとき, 序で述べた, Borsuk-Ulam の定理を導く写像度に関する命題を得る.

注意. ここで述べた方法で $S^{2n-1}=\{z\in\boldsymbol{C}^n\mid \|z\|=1\}$ に位数 p の群 $\boldsymbol{Z}_p=\{\exp(\frac{2\pi k}{p}\sqrt{-1})\mid k\in\boldsymbol{Z}\}$ が積により作用する場合は同様に考えることが可能である. しかしながら, [?, ?] などで紹介しているような一般的な群の自由作用と多様体を一般化したような場合については同様の方法が可能かはまだわからない.

3 Banach 空間における写像度

前節では多様体間の写像の写像度という観点から境界つき多様体を考えたが, $\boldsymbol{R}^n$ の有界で対称性をもるような開集合 Ω ($x\in\Omega$ ならば $-x\in\Omega$ を満たすような集合) に対して $f:\overline{\Omega}\to\boldsymbol{R}^n$ を考えるとき, $0\notin f(\partial\Omega)$ ならば 0 における写像度 $\deg(f,0)$ に関して同様のことが証明できる. このことの拡張についてこの節では考える.

以下では, X を Banach 空間とする. A を X の部分空間とする. 連続写像 $f:A\to X$ について, 任意の A の有界閉集合 Ω に対して, $\overline{f(\Omega)}$ がコンパクトであるとき, f はコンパクトであるという.

命題 3.1. Ω を X の有界閉集合とする. $f:\Omega\to X$ がコンパクト写像であるとき, 各 f_n の像 $f_n(\Omega)$ が X の有限次元の部分空間に含まれているような関数列 $\{f_n\}$ で f に一様収束するようなものが存在する.

証明. $\overline{f(\Omega)}$ がコンパクトであるとき, $\overline{f(\Omega)}$ は半径 $1/n$ の有限個の開球 $B_1,\cdots,B_{j(n)}$ で覆うことができる. B_i の中心を x_i と書くことにする $(i=1,\cdots,j(n))$. $\{\psi_i\}_{i=1}^{j(n)}$ を $\overline{f(\Omega)}$ 上の $B_1,\cdots,B_{j(n)}$ に関する 1 の分割とする. つまり,

$$x\in\overline{f(\Omega)} \text{ に対して}, \sum_{i=1}^{j(n)}\psi_i(x)=1 \text{ であり}, \quad x\in B_i^c \text{ に対して}, \psi_i(x)=0.$$

$f_n : \Omega \to X$ を

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{j(n)} \psi_i(f(x))x_i$$

により定義すると, $f_n(x)$ は $x_1, \cdots, x_{j(n)}$ で張られる凸集合に属し, $f_n(\Omega)$ が X の有限次元部分空間に含まれることがわかる. また,

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{j(n)} \psi_i(f(x))(f(x) - x_i) \right\| \leqq \sum_{i=1}^{j(n)} \psi_i(f(x))\|f(x) - x_i\|$$

であり, $f(x) \notin B_i$ ならば $\psi_i(f(x)) = 0$ であることより, $\psi_i(f(x)) \neq 0$ となる i では $\|f(x) - x_i\| < \frac{1}{n}$. したがって, 任意の $x \in \Omega$ に対して, $\|f(x) - f_n(x)\| < \frac{1}{n}$ となる. したがって, この $\{f_n\}$ は f に一様収束する. ∎

命題 3.2. Ω を $\boldsymbol{R}^{m+n}$ の開集合で $\overline{\Omega}$ がコンパクトなものとし, $\Omega_1 = \Omega \cap \boldsymbol{R}^m$ とおく. $F_1 : \Omega \to \boldsymbol{R}^m (\boldsymbol{R}^m = \boldsymbol{R}^m \times \{0\})$ を C^∞ 写像とし, $F : \Omega \to \boldsymbol{R}^{m+n}$ を $F(x) = F_1(x) + x$ $(x \in \boldsymbol{R}^{m+n})$ により定義するとき, $y \in \Omega_1 (\subset \Omega)$ が F の正則値であるための必要十分条件は y が $F|_{\Omega_1}$ の正則値であることであり, $y \in \Omega_1$ が正則値ならば $\deg(F, y) = \deg(F|_{\Omega_1}, y)$ である.

証明. $\overline{\Omega}$ がコンパクトだから, $F^{-1}(y)$ は有限個の点で, $F^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_k\}$ と書くことができる. F の定義と $y \in \Omega_1$ から, $x_i \in \Omega_1$ であり, $(F|_{\Omega_1})^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_k\}$ となっている.

F の定義の仕方より, F の x_i におけるヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} (JF_1|_{\Omega_1})_{x_i} + I_m & * \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \qquad (I_m,\ I_n \text{ は単位行列})$$

という形をしていて, このことから, x_i が F の正則点であるとき, $F|_{\Omega_1}$ の正則点でもあり, また, その逆も成り立つ. さらに, その点で F が向きを変えるか否かは $F|_{\Omega_1}$ が向きを変えるか否かと一致する. したがって, y における写像度の定義から $\deg(F, y) = \deg(F|_{\Omega_1}, y)$ がわかる. ∎

Ω を Banach 空間 X の有界な開集合とする. $f : \overline{\Omega} \to X$ がコンパクト写像 $K : \overline{\Omega} \to X$ 使って $f = I - K$ という形で書かれているものとする. このとき, $y \in X - f(\partial\Omega)$ における写像度 $\deg(f, y)$ の定義について以下で考えることにしよう.

まず, S が有界閉集合であるとき, $f(S)$ は X における閉集合であることに注意しておこう. 実際, S の点列 $\{x_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ を満たすとすると, $\{x_n - f(x_n)\}$ が y に収束する. $\overline{K(\overline{\Omega})}$ はコンパクトなので, $K(x_n)$ は 収束する部分列 $\{K(x_{n_i})\}$ を取ってくることができて, その極限を z とおくことにする. このとき, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ を考えると, $\{x_n - f(x_n)\}$ が y に収束することと $\{K(x_{n_i})\}$ が z に収束することから, $\{x_{n_i}\}$ は $z + y$

に収束する．$x=z+y$ とおくと，S は閉集合だから $x\in S$ であり，I および K の連続性から $x-K(x)=y$. よって，$y\in f(S)$ である．したがって，$f(S)$ は閉集合である．

このことから，$f(\partial\Omega)$ は X の閉集合であり，$y\notin X$ とすると，$B(y,\delta)\cap f(\partial\Omega)=\emptyset$ となるような正数 δ をとることができる．(ここで，$B(y,\delta)=\{x\in X\mid \|x-y\|<\delta\}$.) $\varepsilon=\delta/2$ とおき，K_ε を K の ε-近似で，$K_\varepsilon(\overline{\Omega})$ が y を含むような X の有限次元部分空間 N_ε の部分集合になっているようなものとする (補題 3.1 よりそのような K_ε が存在する．$f_\varepsilon=I-K_\varepsilon$ により，$f_\varepsilon:\overline{\Omega}\to X$ を定義すると，$y\notin f(\partial\Omega)$ である．$f_\varepsilon|_{N_\varepsilon\cap\overline{\Omega}}:N_\varepsilon\cap\overline{\Omega}\to N_\varepsilon$ に対しては $\deg(f_\varepsilon|_{N_\varepsilon\cap\overline{\Omega}},y)$ を考えることができる．

これを用いて f の写像度を定義したいが，そのために次の補題が必要となる．

補題 3.3. 上の状況で，η を $0<\eta<\delta/2$ を満たすような実数とする．このとき，K_η を K の η-近似で，$K_\eta(\overline{\Omega})$ が y を含むような X の有限次元部分空間 N_η の部分集合になっているようなものとし，$f_\eta=I-K_\eta$ により，$f_\eta:\overline{\Omega}\to X$ を定義すると，

$$\deg(f_\varepsilon|_{N_\varepsilon\cap\overline{\Omega}},y)=\deg(f_\eta|_{N_\eta\cap\overline{\Omega}},y)$$

証明. まず，W を有限次元の X の部分空間とし，$M=N_\varepsilon\oplus W$ とであるとき，補題 3.2 より，$\deg(f_\varepsilon|_{M\cap\overline{\Omega}},y)=\deg(f_\varepsilon|_{N_\varepsilon\cap\overline{\Omega}},y)$ であることがわかる．

したがって，$\hat{N}$ を N_ε と N_η を含むような有限次元の空間とすると，

$$\deg(f_\varepsilon|_{N_\varepsilon\cap\overline{\Omega}},y)=\deg(f_\varepsilon|_{\hat{N}\cap\overline{\Omega}},y)$$
$$\deg(f_\eta|_{N_\eta\cap\overline{\Omega}},y)=\deg(f_\eta|_{\hat{N}\cap\overline{\Omega}},y)$$

である．

$H:(\hat{N}\cap\overline{\Omega})\times[0,1]\to\hat{N}\cap\overline{\Omega}$ を $H(x,t)=tf_\varepsilon+(1-t)f_\eta$ により定義すると，f_ε, f_η, y の取り方から，$y\notin H(\partial\Omega\times[0,1])$ であり，このことから，$\deg(f_\varepsilon|_{\hat{N}\cap\overline{\Omega}},y)=\deg(f_\eta|_{\hat{N}\cap\overline{\Omega}},y)$ が成り立つことがわかる．よって，$\deg(f_\varepsilon|_{N_\varepsilon\cap\overline{\Omega}},y)=\deg(f_\eta|_{N_\eta\cap\overline{\Omega}},y)$ が成り立つ.∎

この補題から，$y\in X$ で $y\notin f(\partial\Omega)$ を満たすようなものを考えるとき，上のようにして $f_\varepsilon, N_\varepsilon$ をとり，

$$\deg(f,y)=\deg(f_\varepsilon|_{N_\varepsilon\cap\overline{\Omega}},y)$$

と定義することができる．

前節で証明した写像度に関する命題より，次のことが証明できる．

命題 3.4. Ω を X の有界開集合で $x\in\Omega$ ならば $-x\in\Omega$ を満たし，$0\notin\Omega$ であるようなものとする．このとき，コンパクト写像 $K:\overline{\Omega}\to X$ を用いて $f=I-K$ により表される写像 $f:\overline{\Omega}\to X$ が，$0\notin f(\partial\Omega)$ かつ 任意の $x\in\overline{\Omega}$ に対して $f(-x)=-f(x)$ を満たすならば，$\deg(f,0)\equiv 0 \pmod 2$.

命題 3.5. Ω を X の有界開集合で $x \in \Omega$ ならば $-x \in \Omega$ を満たし, $0 \in \Omega$ であるようなものとする. このとき, コンパクト写像 $K : \overline{\Omega} \to X$ を用いて $f = I - K$ により表される写像 $f : \overline{\Omega} \to X$ が, $0 \notin f(\partial\Omega)$ かつ 任意の $x \in \overline{\Omega}$ に対して $f(-x) = -f(x)$ を満たすならば, $\deg(f, 0) \equiv 1 \pmod 2$.

また, 命題 3.5 の系として次の Borsuk-Ulam の定理の拡張を得る.

系 3.6. Ω を X の有界開集合で $x \in \Omega$ ならば $-x \in \Omega$ を満たし, $0 \in \Omega$ であるようなものとする. このとき, コンパクト写像 $K : \overline{\Omega} \to X$ を用いて $f = I - K$ により表される写像 $f : \overline{\Omega} \to X$ は $f(-x) = f(x)$ となるような点 $x \in \overline{\Omega}$ をもつ.

証明. $f = I - K : \overline{\Omega} \to X$ を系 3.6 の条件をみたすような写像とし, $g : \overline{\Omega} \to X$ を $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ により定義する. $x \in \partial\Omega$ で $g(x) = 0$ となるものがあればそれが $f(-x) = f(x)$ を満たしているので, $0 \notin g(\partial\Omega)$ の場合を考えればよい.

$g(x) = x - \frac{1}{2}(K(x) - K(-x))$ であり, $\frac{1}{2}(K(x) - K(-x)) : \overline{\Omega} \to X$ は K がコンパクト写像であることからコンパクト写像になる. g は $g(-x) = -g(x)$ を満たすので命題 3.5 より $\deg(g, 0) \equiv 1 \pmod 2$. したがって, $g^{-1}(0) \neq \emptyset$, つまり, $g(x) = 0$ となる $x \in \Omega$ が存在する. この x が $f(-x) = f(x)$ を満たす.∎

参考文献

[1] 伊藤雄二, 関数解析における不動点定理, 数学の楽しみ 2007 冬「不動点定理とは何だろう?」, 日本評論社, 2007, pp. 56–88

[2] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analysis, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1974

[3] Y. Hara, The degree of equivariant maps, Topology Appl. **148**(2005), 113–121.

[4] 原 靖浩, Borsuk-Ulam 型の定理とその周辺, 数理解析研究所講究録 **1540**(2005), 111–122.

[5] H. Steinlein, Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: A survey, Méthods topologiques en analyse non linéaire, (ed. A. Granas), Sém. Math. Sup., **95**, Presses Univ. Montreal, 1985, pp. 166–235