数理解析研究所講究録
第 1576 巻 2008 年 11-28

Noncommutative Spectral Decomposition with Quasideterminant

芝浦工業大学 教育支援センター　鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki)
Center for Educational Assistance, Shibaura Institute of Technology

概要

I. Gelfand and V. Retakh によって定義された quasideterminant の概念を利用して，線形代数におけるスペクトル分解理論の非可換版を作成した [S]．この理論では，新たに非可換ラグランジュ補間式を定義し，Gelfand たちの非可換ケーリー・ハミルトンの定理と合わせることにより，成分が非可換な行列に対しても，行列の関数を決まった手続きで計算することができる．例として，四元数行列，スーパー行列，調和振動子を成分に持つ行列の非可換スペクトル分解を与え，それを利用してそれぞれの指数行列を計算する．

1 quasideterminant の定義

R: (可換とは限らない) 結合的な多元環
$A = (a_{rs})_{1\leq r,s\leq n} \in M_n(R)$ とその中のある成分の位置 (i, j) に対して，
$\mathrm{r}_i{}^j$: A の i 行から a_{ij} を除いた行ベクトル
$\mathrm{c}_j{}^i$: A の j 列から a_{ij} を除いた列ベクトル
A^{ij}: A から i 行と j 列を取り除いてできる $(n-1)\times(n-1)$ 行列
とする．

Definition 1. (i,j) に対して $(A^{ij})^{-1}$ が存在するとする．A の (i,j)-quasideterminant を次式で定義する；

$$|A|_{ij} = a_{ij} - \mathrm{r}_i{}^j \cdot (A^{ij})^{-1} \cdot \mathrm{c}_j{}^i.$$

Example 1.
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し，

$$|A|_{11} = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}, \quad |A|_{12} = a_{12} - a_{11}a_{21}^{-1}a_{22},$$

$$|A|_{21} = a_{21} - a_{22}a_{12}^{-1}a_{11}, \quad |A|_{22} = a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}.$$

Remark. 次のような記号も使う：

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}$$

Proposition 2. すべての $|A|_{ij}^{-1}$ が存在するとき，A^{-1} は次のように書ける；

$$A^{-1} = (|A|_{ji}^{-1})_{1\le i,j\le n}$$

Remark. R が可換な場合，quasideterminant たちは $\det A$ に一致するのではなく，

$$|A|_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\det A}{\det A^{ij}}$$

となる．

Example 3. 四元数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}$ に対し，

$$\begin{aligned}
|A|_{11}^{-1} &= (1 - i\cdot k^{-1}j)^{-1} = (1+ikj)^{-1} = \frac{1}{2} \\
|A|_{21}^{-1} &= (j - k\cdot i^{-1}1)^{-1} = (j+ki)^{-1} = (2j)^{-1} = -\frac{j}{2} \\
|A|_{12}^{-1} &= (i - 1\cdot j^{-1}k)^{-1} = (i+jk)^{-1} = (2i)^{-1} = -\frac{i}{2} \\
|A|_{22}^{-1} &= (k - j\cdot 1^{-1}i)^{-1} = (k-ji)^{-1} = (2k)^{-1} = -\frac{k}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{よって}\quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -j \\ -i & -k \end{pmatrix}$$

Example 4.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} - (a_{12}\ a_{13}) \begin{pmatrix} |A^{11}|_{22}^{-1} & |A^{11}|_{32}^{-1} \\ |A^{11}|_{23}^{-1} & |A^{11}|_{33}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} - a_{12}(a_{22} - a_{23}a_{33}^{-1}a_{32})^{-1}a_{21} - a_{12}(a_{32} - a_{33}a_{23}^{-1}a_{22})^{-1}a_{31} \\
&\qquad - a_{13}(a_{23} - a_{22}a_{32}^{-1}a_{33})^{-1}a_{21} - a_{13}(a_{33} - a_{32}a_{22}^{-1}a_{23})^{-1}a_{31}.
\end{aligned}$$

2　非可換ケーリー・ハミルトンの定理

非可換成分の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し，次の２つの (非可換) 特性多項式を考える：

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\lambda) &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{12}a_{22}a_{12}^{-1})\lambda + (a_{12}a_{22}a_{12}^{-1}a_{11} - a_{12}a_{21}) \\
&\equiv \lambda^2 - \mathrm{tr}_1(A)\lambda + \det{}_1(A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(\lambda) &= \lambda^2 - (a_{22} + a_{21}a_{11}a_{21}^{-1})\lambda + (a_{21}a_{11}a_{21}^{-1}a_{22} - a_{21}a_{12}) \\ &\equiv \lambda^2 - \mathrm{tr}_2(A)\lambda + \det{}_2(A)\end{aligned}$$

このとき，次の恒等式がなりたつ.

$$A^2 - \begin{pmatrix} \mathrm{tr}_1(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{tr}_2(A) \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} \det{}_1(A) & 0 \\ 0 & \det{}_2(A) \end{pmatrix} = 0$$

これが**ケーリー・ハミルトンの定理の非可換版**である.

非可換成分の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対しても，同様の式が成り立つことが知られている. ここで，原論文 [GKLLRT] よりも簡単な証明も与える.

Theorem 5. *[GKLLRT]* $A = (a_{ij}) \in M(n, R)$ に対して，i 行目に対する「非可換特性多項式」を次のように定義する；

$$\begin{aligned}\Phi_i(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{i1}^{(n)} & a_{i2}^{(n)} & \cdots & a_{in}^{(n)} & \boxed{\lambda^n} \\ a_{i1}^{(n-1)} & a_{i2}^{(n-1)} & \cdots & a_{in}^{(n-1)} & \lambda^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} & \lambda \\ a_{i1}^{(0)} & a_{i2}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} & 1 \end{vmatrix} \qquad (1) \\ &\equiv \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} C_{(i)k}\lambda^{n-k},\end{aligned}$$

ここで $A^k = (a_{ij}^{(k)})$. 各 $\Phi_i(\lambda)$ が定義されるとき，次の形の *Cayley-Hamilton* の定理の非可換版が成り立つ.

$$A^n - \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} C_{(1)k} & & & \\ & C_{(2)k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{(n)k} \end{pmatrix} A^{n-k} = O. \qquad (2)$$

Proof. 未知変数を $C_{(i)k}$ $(i, k = 1, \cdots, n)$ として，方程式 (2) を考える. このとき (2) の (i, j) 成分は

$$a_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} C_{(i)k}a_{ij}^{(n-k)} = 0 \quad (i, j = 1, \cdots, n), \qquad (3)$$

すなわち

$$(C_{(i)1}, \cdots, C_{(i)n}) \begin{pmatrix} a_{i1}^{(n-1)} & \cdots & a_{in}^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} \end{pmatrix} = (a_{i1}^{(n)}, \cdots, a_{in}^{(n)}). \qquad (4)$$

$\Phi_i(\lambda)$ が定義されるとき，連立方程式 (4) は一意に解けて $C_{(i)k}$ が得られる．さらに (3) より，i 行目に対する非可換特性多項式は

$$\begin{aligned}\Phi_i(\lambda) &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n C_{(i)k} a_{i1}^{(n-k)} & \cdots & \sum_{k=1}^n C_{(i)k} a_{in}^{(n-k)} & \boxed{\lambda^n} \\ a_{i1}^{(n-1)} & \cdots & a_{in}^{(n-1)} & \lambda^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{\lambda^n - \sum_{k=1}^n C_{(i)k}\lambda^{n-k}} \\ a_{i1}^{(n-1)} & \cdots & a_{in}^{(n-1)} & \lambda^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - \sum_{k=1}^n C_{(i)k}\lambda^{n-k}. \end{aligned}$$

□

この証明より，次の系が得られる．

Corollary 1. 恒等式 *(2)* が成り立ち，*(1)* 式の *quasideterminant* $\Phi_i(\lambda)$ が定義されれば，$\Phi_i(\lambda)$ は $\lambda^n - \sum_{k=1}^n C_{(i)k}\lambda^{n-k}$ に等しい．特に，A に対する *(*通常の*) Cayley-Hamilton* の定理が成り立ち *(i.e.* すべての i に対し $C_{(i)k} = C_k$*)*，各 $\Phi_i(\lambda)$ が定義されれば，すべての $\Phi_i(\lambda)$ $(i = 1, \cdots, n)$ は通常の特性多項式 $\Phi(\lambda)$ に一致する．

さらに，対偶として次の系が得られる;

Corollary 2. 与えられた *(*非可換成分*)* 行列 A に対して，非可換特性多項式 $\Phi_i(\lambda)$ たちが各 i で異なれば，A に関する可換 *Cayley-Hamilton* の定理の形の恒等式は存在しない．

Example 6. A を量子群 $GL_q(n)$ の generator の行列 $A_q = (a_{ij})$ とすると，非可換 Cayley-Hamilton の定理 (量子 Cayley-Hamilton の定理) が成り立つことが知られている [GKLLRT]．例えば $n = 2$ では，
関係式

$$a_{11}a_{22} - a_{22}a_{11} = (q^{-1} - q)a_{12}a_{21}, \quad a_{12}a_{22} = q^{-1}a_{22}a_{12},$$
$$a_{11}a_{21} = q^{-1}a_{21}a_{11}, \quad a_{12}a_{21} = a_{21}a_{12}$$

を用いて次が成り立つ．

$$A_q^2 - (q^{1/2}a_{11} + q^{-1/2}a_{22})\begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 \\ 0 & q^{1/2} \end{pmatrix} A_q + (a_{11}a_{22} - q^{-1}a_{12}a_{21})\begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = O.$$

しかしながら，各行に対する非可換特性多項式たちは異なる；

$$\begin{aligned}\Phi_1(\lambda) &= \lambda^2 - (a_{11} + q^{-1}a_{22})\lambda + q^{-1}a_{11}a_{22} - q^{-2}a_{12}a_{21}, \\ \Phi_2(\lambda) &= \lambda^2 - (q\ a_{11} + a_{22})\ \lambda\ + q\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

よって，A に関する可換 Cayley-Hamilton の定理の形の恒等式は存在しない．

3 「非可換スペクトル分解理論」の概略

Definition 2.
$x_1, x_2, \cdots, x_k \in R$ に対し，**Vandermonde quasideterminant** を次で定義する：

$$V(x_1, \cdots, x_k) = \begin{vmatrix} x_1^{k-1} & \cdots & \boxed{x_k^{k-1}} \\ & \cdots & \\ x_1 & \cdots & x_k \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Definition 3. (非可換ラグランジュ補間式)
$x_1, \cdots, x_n \in R$ に対し，$\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ & \cdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ が存在するとする．$z \in R$ の多項式 $f_i(z)$ $(i = 1, \cdots, n)$ を次の式で定義する．

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ & \cdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^{n-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Example 7. $n = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \begin{vmatrix} \boxed{x_1} & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} z + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \boxed{1} & 1 \end{vmatrix}^{-1} 1 \\ &= (x_1 - x_2)^{-1} z + (1 - x_2^{-1} x_1)^{-1} \\ &= (x_1 - x_2)^{-1} z + (x_2 - x_1)^{-1} x_2 \\ &= (x_1 - x_2)^{-1} (z - x_2), \end{aligned}$$

Lemma 1. $x_1, \cdots, x_n,\ z \in R$ に対し，次が成り立つ．
(1) $x_1^j f_1(z) + x_2^j f_2(z) + \cdots + x_n^j f_n(z) = z^j \quad (j = 0, 1, \cdots, n-1)$
(2) $f_i(x_j) = \delta_{ij}$

Theorem 8 (主定理)**.** 与えられた $z,\ x_1, \cdots, x_n \in R$ が
$V(x_1, \cdots, x_n, z) = 0$ を満たすとき，次が成り立つ：

$$V_m \equiv \begin{vmatrix} x_1^m & \cdots & x_n^m & \boxed{z^m} \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & z^{n-1} \\ & \cdots & & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (m = 0, \cdots, n, n+1, \cdots) \tag{5}$$

証明は，quasideterminant の「Sylvester's identity」を用いる (後ほど).

(5) を書き直すと，非可換ラグランジュ補間式の定義から

$$\begin{aligned} z^m &= \begin{pmatrix} x_1^m & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ & \cdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^{n-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1^m f_1(z) + \cdots + x_n^m f_n(z) \end{aligned}$$

なので，z の非可換スペクトル分解

$$z^m = x_1^m f_1(z) + \cdots + x_n^m f_n(z) \quad (m = 0, 1, \cdots)$$

を得る．

特に，z が非可換成分行列 $A = (a_{ij})$ のときは，$x_1, \cdots, x_n$ を対角行列とおき，

$$V(x_1, \cdots, x_n, A) = 0$$

を考えると，$x_1, \cdots, x_n$ の対角成分は非可換ケーリー・ハミルトンの定理における特性方程式たちの解になる．よって，それらが解ければ，
A の非可換スペクトル分解

$$A^m = x_1^m f_1(A) + \cdots + x_n^m f_n(A) \quad (m = 0, 1, \cdots)$$

を得る．

3.1 例：四元数行列のスペクトル分解と指数行列

四元数を成分とする行列として，Lie 環 $sp(2)$ の元

$$A = \begin{pmatrix} i & j \\ j & -i \end{pmatrix}$$

を考え，その指数関数 $\exp tA$ を求めてみる．

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2k \\ -2k & -2 \end{pmatrix}$$

より，各行ごとの非可換特性方程式は，

$$\Phi_1(\lambda) = \begin{vmatrix} -2 & 2k & \boxed{\lambda^2} \\ i & j & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2i\lambda = 0$$

より，$\lambda = 0,\ 2i$,

$$\Phi_2(\lambda) = \begin{vmatrix} -2k & -2 & \boxed{\lambda^2} \\ j & -i & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2i\lambda = 0$$

より，$\lambda=0,\ -2i$.

次に非可換ラグランジュ補間式

$$f_1(z)=(x_1-x_2)^{-1}(z-x_2),\quad f_2(z)=(x_2-x_1)^{-1}(z-x_1)$$

において $z=A,\quad x_1=\begin{pmatrix}2i & \\ & -2i\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}0 & \\ & 0\end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned}P_1 &= f_1(A)=\begin{pmatrix}2i & \\ & -2i\end{pmatrix}^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix},\\ P_2 &= f_2(A)=\left\{-\begin{pmatrix}2i & \\ & -2i\end{pmatrix}\right\}^{-1}\left\{A-\begin{pmatrix}2i & \\ & -2i\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & k\\ -k & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

このようにおくと $P_i^2=P_i,\ P_iP_j=0\ (i\neq j), P_1+P_2=E$ を満たしていることも確かめられる．そして，通常のスペクトル分解のように A の指数関数を簡単に求めることができる．すなわち，

$$\begin{aligned}\exp tA &= (\exp tx_1)P_1+(\exp tx_2)P_2\\ &= \begin{pmatrix}e^{2it} & \\ & e^{-2it}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & k\\ -k & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{2it}+1 & -e^{2it}k+k\\ e^{-2it}k-k & e^{-2it}+1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{it}\cos t & e^{it}\sin t\ j\\ e^{-it}\sin t\ j & e^{-it}\cos t\end{pmatrix}\in Sp(2)\end{aligned}$$

Remark.

$$x_1=\begin{pmatrix}2i & \\ & 0\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}0 & \\ & -2i\end{pmatrix}$$

とおいた場合，$[A,x_1]\neq 0,\ [A,x_2]\neq 0$ で，$f_1(A),\ f_2(A)$ は射影行列になっていない．それにもかかわらず，定理8によって，$A^m=x_1^mf_1(A)+x_2^mf_2(A)$ が成り立ち，$\exp tA$ が計算できる！(不思議！)

3.2 例：スーパー行列のスペクトル分解と指数行列

$x_1,x_2,\theta_1,\theta_2$ の関係式を $[x_\mu,x_\nu]=[x_\mu,\theta_\alpha]=\{\theta_\alpha,\theta_\beta\}=0\quad(\mu,\nu,\alpha,\beta=1,2)$ とする．スーパー行列

$$Q=\begin{pmatrix}x_1 & \theta_1\\ \theta_2 & ix_2\end{pmatrix}$$

のスペクトル分解と指数行列を求める．

$$Q^2=\begin{pmatrix}x_1^2+\theta_1\theta_2 & (x_1+ix_2)\theta_1\\ (x_1+ix_2)\theta_1 & \theta_2\theta_1-x_2^2\end{pmatrix}$$

より，各行ごとの非可換特性方程式は，

$$\Phi_1(\lambda) = \begin{vmatrix} x_1^2+\theta_1\theta_2 & (x_1+ix_2)\theta_1 & \boxed{\lambda^2} \\ x_1 & \theta_1 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - (x_1+ix_2)\lambda + ix_1x_2 - \theta_1\theta_2 = 0$$

より，$\lambda = \alpha_1$, β_1, ここで，

$$\alpha_1 = x_1 + \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2}, \quad \beta_1 = ix_2 - \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2}.$$

また，

$$\Phi_2(\lambda) = \begin{vmatrix} (x_1+ix_2)\theta_1 & \theta_2\theta_1 - x_2^2 & \boxed{\lambda^2} \\ \theta_2 & ix_2 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - (x_1+ix_2)\lambda + ix_1x_2 + \theta_1\theta_2 = 0$$

より，$\lambda = \alpha_2$, β_2, ここで，

$$\alpha_2 = x_1 - \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2}, \quad \beta_2 = ix_2 + \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2}.$$

ここで次のような変数変換をする；

$$y_1 = x_1 + \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2}, \qquad y_2 = x_2 - i\frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2},$$
$$\omega_1 = \frac{\theta_1}{x_1 - ix_2}, \qquad \omega_2 = -\frac{\theta_2}{x_1 - ix_2}.$$

このとき，

$$Q = \begin{pmatrix} x_1 & \theta_1 \\ \theta_2 & ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \omega_1\omega_2(y_1 - iy_2) & \omega_1(y_1 - iy_2) \\ -\omega_2(y_1 - iy_2) & iy_2 + \omega_1\omega_2(y_1 - iy_2) \end{pmatrix}$$

さらに，

$$\alpha_1 = y_1, \qquad \beta_1 = iy_2 + 2\omega_1\omega_2(y_1 - iy_2),$$
$$\alpha_2 = y_1 + 2\omega_1\omega_2(y_1 - iy_2), \qquad \beta_2 = iy_2$$

となるので，$(1+2\omega_1\omega_2)^{-1} = 1 - 2\omega_1\omega_2$ などに注意して，非可換ラグランジュ補間式より，

$$\begin{aligned} P_1 = f_1(Q) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \\ & \alpha_2 - \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \beta_1 & \theta_1 \\ \theta_2 & ix_2 - \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \omega_1\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1\omega_2 \end{pmatrix}, \\ P_2 = f_2(Q) &= \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \\ & \beta_2 - \alpha_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 & \theta_1 \\ \theta_2 & ix_2 - \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_1\omega_2 & -\omega_1 \\ \omega_2 & 1 - \omega_1\omega_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

このようにおくと $P_i^2=P_i,\ P_iP_j=0\ (i\neq j), P_1+P_2=E$ を満たしていることも確かめられる．これより，

$$e^{2\omega_1\omega_2(y_1-iy_2)}\omega_2=(1+2\omega_1\omega_2(y_1-iy_2))\omega_2=\omega_2$$

などに注意して，

$$\begin{aligned}
\exp Q &= \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & \\ & e^{\alpha_2}\end{pmatrix} f_1(Q)+\begin{pmatrix} e^{\beta_1} & \\ & e^{\beta_2}\end{pmatrix} f_2(Q)\\
&= \begin{pmatrix} e^{y_1} & \\ & e^{y_1+2\omega_1\omega_2(y_1-iy_2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\omega_1\omega_2 & \omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1\omega_2\end{pmatrix}\\
&\qquad +\begin{pmatrix} e^{iy_2+2\omega_1\omega_2(y_1-iy_2)} & \\ & e^{iy_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\omega_1\omega_2 & -\omega_1\\ \omega_2 & 1-\omega_1\omega_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} e^{y_1}(1+\omega_1\omega_2)-e^{iy_2}\omega_1\omega_2 & (e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_1\\ -(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_2 & e^{y_1}\omega_1\omega_2+e^{iy_2}(1-\omega_1\omega_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} e^{y_1}+(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_1\omega_2 & (e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_1\\ -(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_2 & e^{iy_2}+(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_1\omega_2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

さらに，スーパートレースとスーパー行列式 (Berezinian) を

$$\begin{aligned}
\mathrm{str}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} &= \mathrm{tr}\,A-\mathrm{tr}\,D,\\
\mathrm{sdet}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} &= (\det(A-BD^{-1}C))(\det D)^{-1}\\
&= (\det A)(\det(D-CA^{-1}B))^{-1}
\end{aligned}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sdet}(\exp Q)\\
=\ & (e^{y_1}+(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_1\omega_2)[(e^{iy_2}+(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_1\omega_2\\
&\quad +(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_2\cdot(e^{y_1}+(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_1\omega_2)^{-1}\cdot(e^{y_1}-e^{iy_2})\omega_1]^{-1}\\
=\ & e^{y_1-iy_2}=e^{x_1-ix_2}=e^{\mathrm{str}Q}
\end{aligned}$$

が確かめられる．

3.3 例：調和振動子を成分にもつ行列のスペクトル分解と指数関数

$a, a^\dagger$ を調和振動子とする．関係式は $[a,a^\dagger]=1$．また，number operator N を $N=a^\dagger a$ とする．

$A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ a^\dagger & 0 & a\\ 0 & a^\dagger & 0\end{pmatrix}$ の (非可換) スペクトル分解を求めたい.

$$A^2=2\begin{pmatrix}N+1 & 0 & a^2\\ 0 & 2N+1 & 0\\ (a^\dagger)^2 & 0 & N\end{pmatrix},\quad A^3=2\sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & (2N+3)a & 0\\ (2N+1)a^\dagger & 0 & (2N+1)a\\ 0 & (2N-1)a^\dagger & 0\end{pmatrix}$$

より，非可換特性方程式

$$\Phi_1(\lambda)=\begin{vmatrix}0 & 2\sqrt{2}(2N+3)a & 0 & \boxed{\lambda^3}\\ 2(N+1) & 0 & 2a^2 & \lambda^2\\ 0 & \sqrt{2}a & 0 & \lambda\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\lambda^3-2(2N+3)\lambda=0$$

より，$\lambda=\pm\sqrt{2(2N+3)},\ 0,$

$$\Phi_3(\lambda)=\begin{vmatrix}0 & 2\sqrt{2}(2N-1)a^\dagger & 0 & \boxed{\lambda^3}\\ 2(a^\dagger)^2 & 0 & 2N & \lambda^2\\ 0 & \sqrt{2}a^\dagger & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\lambda^3-2(2N-1)\lambda=0$$

より，$\lambda=\pm\sqrt{2(2N-1)},\ 0.$

Remark.

$$\Phi_2(\lambda)=\begin{vmatrix}2\sqrt{2}(2N+1)a^\dagger & 0 & 2\sqrt{2}(2N+1)a & \boxed{\lambda^3}\\ 0 & 2(2N+1) & 0 & \lambda^2\\ \sqrt{2}a^\dagger & 0 & \sqrt{2}a & \lambda\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

は quasideterminant が定義できず，求まらない．そこで直接

$$A^3+UA^2+VA+W=0 \quad U,V,W \text{ は対角行列}$$

とおき 2 行目を見ることにより，

$$\lambda^3+u\lambda^2-2(2N+1)\lambda-2u(2N+1)=0 \quad (u \text{ は任意})$$

となるので $u=0$ とおけば $\lambda=\pm\sqrt{2(2N+1)},\ 0$ を得る.

次に非可換ラグランジュ補間式を計算する.

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= \begin{vmatrix} \boxed{x_1^2} & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} z^2 + \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ \boxed{x_1} & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} z + \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} 1 \\
&= (x_1^2 - x_2^2(x_2-x_3)^{-1}x_1 - x_3^2(x_3-x_2)^{-1}x_1 \\
&\qquad\qquad -x_2^2(x_3-x_2)^{-1}x_3 - x_3^2(x_2-x_3)^{-1}x_2)^{-1}z^2 \\
&\quad +(x_1 - x_2(x_2^2-x_3^2)^{-1}x_1^2 - x_3(x_3^2-x_2^2)^{-1}x_1^2 \\
&\qquad\qquad -x_2(x_3^2-x_2^2)^{-1}x_3^2 - x_3(x_2^2-x_3^2)^{-1}x_2^2)^{-1}z \\
&\quad +(1 - (x_2^2-x_3x_2)^{-1}x_1^2 - (x_3^2-x_2x_3)^{-1}x_1^2 \\
&\qquad\qquad -(x_2 - x_3^{-1}x_2^2)^{-1}x_1 - (x_3 - x_2^{-1}x_3^2)^{-1}x_1)^{-1}
\end{aligned}
$$

特に $x_1 = x,\ x_2 = 0,\ x_3 = -x$ のとき,

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= (x^2 - (-x)^2(-x)^{-1}x)^{-1}z^2 + (x - (-x)(-x)^{-2}x^2)^{-1}z + 0 \\
&= (2x^2)^{-1}z^2 + (2x)^{-1}z
\end{aligned}
$$

ここで z の 0 次の項は, homological relation を用いて次のように計算する:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} &= -\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ \boxed{x_1} & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} x_2^2 & x_3^2 \\ \boxed{x_2} & x_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2^2 & x_3^2 \\ \boxed{1} & 1 \end{vmatrix}^{-1} \\
&= -\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ \boxed{x_1} & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} (x_2 - x_3^{-1}x_2^2)(1 - x_3^{-2}x_2^2)^{-1} \\
&\to -(2x)^{-1}\cdot 0 \cdot 1 = 0 \quad (x_1 \to x,\ x_2 \to 0,\ x_3 \to -x).
\end{aligned}
$$

そして

$$
z = A, \quad x = \begin{pmatrix} \lambda(N) & & \\ & \lambda(N-1) & \\ & & \lambda(N-2) \end{pmatrix}, \ \lambda(N) = \sqrt{2(2N+3)}
$$

とおいてみると，

$$
\begin{aligned}
P_1 &= f_1(A) \\
&= (2x^2)^{-1}A^2 + (2x)^{-1}A \\
&= \begin{pmatrix} (2\lambda(N))^{-2} & & \\ & (2\lambda(N-1))^{-2} & \\ & & (2\lambda(N-2))^{-2} \end{pmatrix} \cdot 2 \begin{pmatrix} N+1 & 0 & a^2 \\ 0 & 2N+1 & 0 \\ (a^\dagger)^2 & 0 & N \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} (2\lambda(N))^{-1} & & \\ & (2\lambda(N-1))^{-1} & \\ & & (2\lambda(N-2))^{-1} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^\dagger & 0 & a \\ 0 & a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2(2N+3)} & & \\ & \frac{1}{2(2N+1)} & \\ & & \frac{1}{2(2N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N+1 & 0 & a^2 \\ 0 & 2N+1 & 0 \\ (a^\dagger)^2 & 0 & N \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2N+3}} & & \\ & \frac{1}{2\sqrt{2N+1}} & \\ & & \frac{1}{2\sqrt{2N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^\dagger & 0 & a \\ 0 & a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2(2N+3)} & \frac{1}{2\sqrt{2N+3}}a & \frac{1}{2(2N+3)}a^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a^\dagger & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a \\ \frac{1}{2(2N-1)}(a^\dagger)^2 & \frac{1}{2\sqrt{2N-1}}a^\dagger & \frac{N}{2(2N-1)} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

同様に，$f_2(z)$，$f_3(z)$ で $z=A$，$x_1=x$，$x_2=0$，$x_3=-x$ とおいたものから，

$$
\begin{aligned}
P_2 &= f_2(A) \\
&= (-x^2)^{-1}A^2 + I_3 \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{1}{2(2N+3)} & & \\ & \frac{1}{2(2N+1)} & \\ & & \frac{1}{2(2N-1)} \end{pmatrix} \cdot 2 \begin{pmatrix} N+1 & 0 & a^2 \\ 0 & 2N+1 & 0 \\ (a^\dagger)^2 & 0 & N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{N+2}{2N+3} & 0 & -\frac{1}{2N+3}a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2N-1}(a^\dagger)^2 & 0 & \frac{N-1}{2N-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

であることがわかる．この式は

$$V(x, 0, -x, A) = 0$$

に一致している．

4 非可換スペクトル分解理論の主定理の証明

4.1 quasideterminant のいくつかの性質

Proposition 9. *(i, j)-quasideterminant において*

1. *i 行以外の行の左スカラー倍を加えても不変*
2. *j 列以外の列の右スカラー倍を加えても不変*

Example 10. $i = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & \boxed{a_{22} + ka_{12}} \end{vmatrix} = a_{22} + ka_{12} - (a_{21} + ka_{11})a_{11}^{-1}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix}$$

特に $k = -a_{21}a_{11}^{-1}$ とすれば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \boxed{a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}a_{12} \\ 0 & \boxed{a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}} \end{vmatrix}$$

Proposition 11. *$|A|_{ij}$ が定義されるとき，次の 3 つは同値.*

1. *$|A|_{ij} = 0$*
2. *行列 A の第 i 行は A の他の行の左 1 次結合*
3. *行列 A の第 j 列は A の他の列の右 1 次結合*

Example 12.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{11}\lambda + a_{12}\mu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\lambda + a_{22}\mu \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}\lambda + a_{32}\mu \end{vmatrix} \\
= \;& a_{11}\lambda + a_{12}\mu - (a_{11}\ a_{12}) \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \mu \right\} \\
= \;& a_{11}\lambda + a_{12}\mu - (a_{11}\ a_{12}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda - (a_{11}\ a_{12}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_3 = f_3(A) &= (2x^2)^{-1}A^2 - (2x)^{-1}A \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2(2N+3)} & & \\ & \frac{1}{2(2N+1)} & \\ & & \frac{1}{2(2N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N+1 & 0 & a^2 \\ 0 & 2N+1 & 0 \\ (a^\dagger)^2 & 0 & N \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2N+3}} & & \\ & \frac{1}{2\sqrt{2N+1}} & \\ & & \frac{1}{2\sqrt{2N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^\dagger & 0 & a \\ 0 & a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2(2N+3)} & -\frac{1}{2\sqrt{2N+3}}a & \frac{1}{2(2N+3)}a^2 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a^\dagger & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a \\ \frac{1}{2(2N-1)}(a^\dagger)^2 & -\frac{1}{2\sqrt{2N-1}}a^\dagger & \frac{N}{2(2N-1)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

これらは $P_i^2 = P_i$, $P_iP_j = 0$ $(i \neq j)$ を満たしていることも確かめられる．そして，通常のスペクトル分解のように，たとえば A の指数関数を簡単に求めることができる．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\exp(-itgA) \\
= \;& \exp(-itgx)P_1 + (\exp 0)P_2 + \exp(itgx)P_3 \\
= \;& \begin{pmatrix} \frac{N+2+(N+1)\cos(tg\lambda(N))}{2N+3} & -i\frac{1}{\sqrt{2N+3}}\sin(tg\lambda(N))a & \frac{1}{2N+3}(-1+\cos(tg\lambda(N)))a^2 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sin(tg\lambda(N-1))a^\dagger & \cos(tg\lambda(N-1)) & -i\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sin(tg\lambda(N-1))a \\ \frac{1}{2N-1}(-1+\cos(tg\lambda(N-2)))(a^\dagger)^2 & -i\frac{1}{\sqrt{2N-1}}\sin(tg\lambda(N-2))a^\dagger & \frac{N-1+N\cos(tg\lambda(N-2))}{2N-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と求まる．

Remark. この A に対しては，“量子対角化法”によって

$$
\begin{pmatrix} 1 & & \\ & a\frac{1}{\sqrt{N}} & \\ & & a^2\frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{N}}a^\dagger & \\ & & \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}}(a^\dagger)^2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{N+1} & 0 \\ \sqrt{N+1} & 0 & \sqrt{N+2} \\ 0 & \sqrt{N+2} & 0 \end{pmatrix}
$$

右辺の行列は可換成分のみをもつので，通常のように特性方程式を計算すると，

$$\lambda^3 - 2(2N+3)\lambda = 0 \quad \text{より，} \quad \lambda = 0,\ \pm\sqrt{2(2N+3)}$$

この量子対角化法を用いて計算した結果 [FHKSW] と今回の非可換スペクトル分解の方法による結果は一致している．

Remark. 非可換特性方程式たちの形から，A に対する非可換ケーリー・ハミルトンの定理の式は

$$A^3 + UA^2 - x^2A - U\cdot 2(2N+1) = 0, \quad U = diag(0,u,0),\ u \text{ は任意,}$$

特に $u=0$ と置けば

$$A^3 - x^2A = 0$$

4.2 Sylvester's identity

Theorem 13. $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ に対し,
その小行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,k}$ が逆行列を持つとする.
このとき, $p, q = k+1, \cdots, n$ に対し,

$$c_{pq} = \begin{vmatrix} & & & a_{1q} \\ & A_0 & & \vdots \\ & & & a_{kq} \\ a_{p1} & \cdots & a_{pk} & a_{pq} \end{vmatrix}_{pq}, \qquad C = (c_{pq})_{p,q=k+1,\cdots,n}$$

とおくと, 次の恒等式 *(Sylvester's identity)* が成り立つ.

$$|A|_{ij} = |C|_{ij} \qquad \textit{for } i, j = k+1, \cdots, n. \tag{6}$$

(A_0 を C に対する pivot と呼ぶ)

Example 14.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{ij} \qquad (i, j = 2, 3)$$

において, (1,1) 成分の 1 を pivot とすれば,

$$c_{pq} = \begin{vmatrix} 1 & a_{1q} \\ 0 & a_{pq} \end{vmatrix}_{pq} = a_{pq} \quad (p, q = 2, 3)$$

よって,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{ij} = |C|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{ij} \qquad (i, j = 2, 3).$$

4.3 主定理 (Theorem 8) の証明

Proof. 次の行列 A とその小行列 A_0 を考える:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} x_1^m & \cdots & x_n^m & 0 & z^m \\ x_1^n & \cdots & x_n^n & 0 & z^n \\ \hline x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & 0 & z^{n-1} \\ & \cdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad A_0 = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ & \cdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$p=1,2,\ q=n+1,n+2$ に対し，A_0 を pivot とする quasideterminant を成分にもつ行列 $C=(c_{pq})$ を考えると，

$$c_{1,n+2}=\left|\begin{array}{ccc} x_1^m \ \cdots \ x_n^m & \boxed{z^m} \\ & z^{n-1} \\ A_0 & \vdots \\ & 1 \end{array}\right| = V_m,$$

$$c_{2,n+2}=\left|\begin{array}{ccc} x_1^n \ \cdots \ x_n^n & \boxed{z^n} \\ & z^{n-1} \\ A_0 & \vdots \\ & 1 \end{array}\right| = V(x_1,\cdots,x_n,z)=V_n$$

であり，Sylvester's identity (定理 13) より，

$$\begin{aligned} |A|_{1,n+2} &= |C|_{1,n+2} = \begin{vmatrix} c_{1,n+1} & \boxed{c_{1,n+2}} \\ c_{2,n+1} & c_{2,n+2} \end{vmatrix} \\ &= c_{1,n+2}-c_{1,n+1}c_{2,n+1}^{-1}c_{2,n+2} \\ &= V_m - c_{1,n+1}c_{2,n+1}^{-1}V_n \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned} |A|_{1,n+2} &= \left|\begin{array}{ccc|cc} x_1^m & \cdots & x_n^m & 0 & \boxed{z^m} \\ x_1^n & \cdots & x_n^n & 0 & z^n \\ \hline x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & 0 & z^{n-1} \\ & \cdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc|c} x_1^m & \cdots & x_n^m & \boxed{z^m} & 0 \\ x_1^n & \cdots & x_n^n & z^n & 0 \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & z^{n-1} & 0 \\ & \cdots & & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \\ &= \begin{vmatrix} x_1^m & \cdots & x_n^m & \boxed{z^m} \\ x_1^n & \cdots & x_n^n & z^n \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & z^{n-1} \\ & \cdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n & z \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} (n+2,n+2)\text{ 成分の 1 を pivot} \\ \text{にして Sylvester's identity} \end{array}\right) \\ &= \begin{vmatrix} x_1^{m-1} & \cdots & x_n^{m-1} & \boxed{z^{m-1}} \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & z^{n-1} \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & z^{n-2} \\ & \cdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} z \\ & \qquad \left(\begin{array}{c} 1,\cdots,n\text{ 列は右スカラー倍不変,} \\ n+1\text{ 列は右スカラー倍が右に出る} \end{array}\right) \\ &= V_{m-1}z \end{aligned}$$

つまり

$$V_{m-1}z = V_m - c_{1,n+1}c_{2,n+1}^{-1}V_n \tag{7}$$

が成り立つので，$V_n = 0$ のとき，
帰納法により $V_m = 0$ $(m = n, n+1, \cdots)$ が成り立つ． □

Remark. 特に $n = 2$ のとき，

$$V_m = z^m - \begin{pmatrix} x_1^m & x_2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = z^m - (x_1^m f_1(z) + x_2^m f_2(z))$$

などより，恒等式 (7) は

$$\begin{aligned} & \{z^{m-1} - (x_1^{m-1}f_1(z) + x_2^{m-1}f_2(z))\}z \\ = \ & z^m - (x_1^m f_1(z) + x_2^m f_2(z)) \\ & -(x_2^{m-1} - x_1^{m-1})(x_2 - x_1)^{-1}\{z^2 - (x_1^2 f_1(z) + x_2^2 f_2(z))\} \end{aligned} \tag{8}$$

$(m = 2, 3, \cdots)$ となる．

5 考察

1. 非可換スペクトル分解は，非可換成分を持った行列のべき乗や指数関数を求めるのに非常に強力な方法であり，将来，非可換幾何学や量子計算などにおいて有用であると期待される．

2. 一般には，非可換特性方程式を解くのが難しい．

Remark. quasideterminant は，非可換成分行列に対する逆行列や種々の行列式を統一的に扱う道具として有用であり，非可換可積分系への応用 [EGR]，[GN], [GNO], [H], その他様々な応用 [L1], [L2],[MR] などがある．

参考文献

[As] H. Aslaksen, *Quaternionic Determinants*, The Mathematical Intelligencer 18, (1996) 57-65.

[EGR] P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh, *Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations*, Math. Res. Letters 4 (1997), no.2-3, 413-425, q-alg/9701008.

[FHKSW] K.Fujii, K.Higashida, R.Kato, T.Suzuki, Y.Wada, *Quantum Diagonalization Method in the Tavis-Cummings Model*, Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. 2 (2005) 425-440, quant-ph/0410003.

[GR1] I. Gelfand and V. Retakh, *Determinants of matrices over noncommutative rings*, Funct. Anal. Appl. 25 (1991), no.2, 91-102.

[GR2] I. Gelfand and V. Retakh, *Noncommutative Vieta Theorem and Symmetric Functions*, The Gelfand Mathematical Seminars 1993-1995, Birkhauser, Boston (1996) 93-100, q-alg/9507010.

[GGRW] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, R. Wilson, *Quasideterminants*, Adv. in Math 193 (2005) no.1, 56-141, math.QA/0208146.

[GKLLRT] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh, J. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Adv. Math. 112 (2) (1995) 218-348, hep-th/9407124.

[GN] C.Gilson, J.Nimmo, *On a direct approach to quasideterminant solutions of a noncommutative KP equation*, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 3839-3850, nlin.SI/0701027.

[GNO] C.Gilson, J.Nimmo, Y.Ohta, *Quasideterminant solutions of a non-Abelian Hirota-Miwa equation*, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 12607-12617, nlin.SI/0702020.

[H] M. Hamanaka, *Notes on Exact Multi-Soliton Solutions of Noncommutative Integrable Hierarchies*, JHEP 0702 (2007) 094, hep-th/0610006.

[L1] A. Lauve, *A Quasideterminantal approach to quantized flag varieties*, dissertation submitted to the Graduate School, New Brunswick Rutgers, The State University of New Jersey, 2005.

[L2] A. Lauve, *Flag varieties for the Yangian $Y(gl_n)$*, math.QA/0601056.

[MR] A. Molev, V. Retakh, *Quasideterminants and Casimir elements for the general Lie superalgebra*, math.QA/0309461.

[S] T. Suzuki, *Noncommutative Spectral Decomposition with Quasideterminant*, to appear in Advances in Mathematics, math/0703751.