数理解析研究所講究録
第 1576 巻 2008 年 53-66

群対称性をもつ変形量子化について

濱地賢太郎
e-mail:hamachi@cc.kyoto-su.ac.jp

概要

A deformation quantization on a symplectic manifold with Lie group action G, which called G-equivariant star product, is studied. The main tool is quantum momentum mapping, which is quantum version of momentum mapping for studying classical Hamiltonian mechanics. We will give a talk on a method for the classification of G-invariant star products on regular coadjoint orbits of compact semisimple Lie groups by using the quantum momentum mappings.

1 Introduction

変形量子化は Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz and Sternheimer らによって 古典ハミルトン系を量子化するための手法の一つとして 70 年代に提案された [2]. この量子化は，量子力学を記述する代数を作用素を用いずに多様体上の関数環に非可換な積 (*-product) を構成するもので，量子・古典対応をより自然に説明することや，ユークリッド空間以外の一般の空間上での量子力学を論じることなどを目標とするものである.

空間に群 G が作用しているとき，その対称性を持つような量子系すなわち G 作用が自己同形になるような代数構造を考えることは自然である. このような代数の解析に力を発揮する道具として「量子運動量写像」[22], を考えることができる. これは（古典）ハミルトン系における運動量写像の [17] 自然な一般化である.（古典）運動量写像が力学系やシンプレクティク幾何学の解析に有効であったのと平行して，量子運動量写像が G-不変な*-積の解析において力を発揮する.

以下ではこの量子運動量写像の性質を幾つか論じ，その応用としてコンパクト半単純リー群の正則余随伴軌道上の*-積の分類を行う.

2 準備

2.1 $*$-積

$(M, \{\ ,\ \})$ を Poisson 多様体，$C^\infty(M)$ を M 上の無限回微分可能な関数全体とする．また $C^\infty(M)[[\lambda]]$ を $C^\infty(M)$ を係数とする，不定元 λ の形式的べき級数全体とする．

$*$-積とは，$C^\infty(M)[[\lambda]]$ 上に定義された結合的な積 $*$ で以下のような表示を持つものである：

$$u * v = uv + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n C_n(u, v), \quad \text{for any } u, v \in C^\infty(M),$$

ここで C_k は定数上で 0 となるような双微分作用素で，λ の 1 次の項の係数については $C_1(u, v) - C_1(v, u) = 2\{u, v\}$ を満たすものとする．

Lie 群 G が M に Poisson 変換として作用しているとき，$*$ が G-不変であるとは任意の $u, v \in C^\infty(M)[[\lambda]]$ と $g \in G$ に対して，$g(u * v) = gu * gv$ が成り立つときをいう．ここに $gu(x) = u(g^{-1}x), x \in M$.

任意のシンプレクティク多様体に対して $*$-積が存在することは [5, 18, 7], によって証明された．また G-不変な $*$-積の存在に対しても [22, 8] などで論じられていて，M 上の G-不変アフィン接続の存在と同値であることが示されている．特に G がコンパクトであるとき，常に G-不変 $*$-積の存在が保障されることが分かる．

$C^\infty(M)[[\lambda]]$ 上の 2 つの $*$-積 $*_1$ と $*_2$ が形式的同値であるとは M 上の微分作用素を係数とする形式的べき級数

$$T = Id + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T_n,$$

で $u *_2 v = T(T^{-1}u *_1 T^{-1}v)$ を満たすものが存在することをいう．またこのとき T を $*_1$ と $*_2$ の形式同値（写像）という．

さらに，$*_1$ と $*_2$ が形式同値な G-不変 $*$-積で T が G-不変なとき $*_1$ と $*_2$ は G-形式的同値という [4, 3].

2.2 Gutt $*$-積

$\mathfrak{g}$ を実 Lie 環，$\mathfrak{g}^*$ をその双対空間，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環，$\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ を $\mathfrak{g}^*$ の多項式環を表すとする．$\mathfrak{g}[[\lambda]]$ で $\mathfrak{g}$ を係数とする λ の形式的べき級数として，そこに Lie 環の構造 $[\ ,\ ]_\lambda$ を $[\xi, \eta]_\lambda = \lambda[\xi, \eta]$ $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ のように定め，この Lie 環を $\mathfrak{g}_\lambda$ で表す．ここで $[\ ,\ ]$ は $\mathfrak{g}$ の交換子である．

$\mathfrak{g}^*$ 上の C^∞-関数空間には Kirillov-Poisson 括弧 Π と呼ばれるものが定義されて，$C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ は Poisson 環となる：$u, v \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対して Π を $\Pi(u, v)(\mu) =$

$\langle [du(\mu), dv(\mu)], \mu\rangle$, のように定める．ここで $du(\mu)$ は $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^*)^*$ に値をとる $\mathfrak{g}^*$ 上の 1-form とみなしたものである．

$\mathfrak{g}^*$ 上の自然な $*$-積は Gutt によって与えられた [11]．この $*$-積 (Gutt$*$-積とよぶ) は $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\lambda)$ の代数構造を $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ へ誘導することによって定義されものである．具体的には $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ と $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_\lambda)$ のあいだの自然な線形同形写像と対称化作用素 $s : \mathfrak{S}(\mathfrak{g}_\lambda) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\lambda)$ を合成する：$\mathfrak{g}^*$ 上の多項式 u, v に対し,$*^G$ を

$$u *^G v = s^{-1}(s(u) \cdot s(v)), \tag{1}$$

のように定める．ここに $\cdot$ は $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\lambda)$ の積を表す．

式 (1) によって $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ 上に非可換な積が定義されるが，これが微分演算子で表示できることが証明できて，自然に定義域を $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ まで拡張し，これを Gutt$*$-積という．

式 (1) より，$*^G$ は $\mathfrak{g}$-共変であり：

$$\xi *^G \eta - \eta *^G \xi = 2\lambda\Pi(\xi, \eta) \quad \text{for } \xi, \eta \in \mathrm{Lin}(\mathfrak{g}^*),$$

さらに $\mathrm{Ad}^*(G)$-不変でもある：

$$g(u *^G v) = (gu) *^G (gv) \quad \text{for } u, v \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]],\ g \in G.$$

Gutt $*$-積の特徴づけとしては以下のことが知られている．

命題 2.1 ([6])**.** $(\mathfrak{g}^*, \Pi)$ 上の $\mathfrak{g}$-共変で *Weyl* 形の $*$-積は *Gutt* $*$-積に限る．また $\mathfrak{g}$-共変な $*$-積は *Gutt* $*$-積と形式同値である．

3 量子運動量写像

3.1 量子運動量写像の定義

(M, ω) を G-作用を持つシンプレクティク多様体，$*$ を G-不変 $*$-積とする．以下では $*$-積による交換子 $[a, b]_* = a * b - b * a$ を用いる．

定義 3.1 ([22])**.** 量子運動量写像とは写像

$$\Phi_* : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\lambda) \to C^\infty(M)[[\lambda]], \tag{2}$$

が代数の準同形であり

$$[\Phi_*(\xi), u]_* = \lambda \xi u, \tag{3}$$

を満たすものである．ここに *(3)* の右辺は $\xi \in \mathfrak{g}$ の $C^\infty(M)[[\lambda]]$ への微分演算子としての作用である．

ちなみに条件 (2) は

$$\Phi_*([\xi,\eta]_\lambda) = [\Phi_*(\xi), \Phi_*(\eta)]_* \quad \text{for any } \xi,\eta \in \mathfrak{g}. \tag{4}$$

と同値であることがすぐに分かる.

量子運動量写像の存在と一意性については次のようなことが知られている.

定理 3.1 ([22]). $H^*_{dR}(M)$ を M の *de Rham* コホモロジー群, $H^*(\mathfrak{g},\ \mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 係数の *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ のコホモロジー群とする. このとき $H^1_{dR}(M) = 0$ かつ $H^2(\mathfrak{g},\ \mathbb{R}) = 0$ であれば量子運動量写像が存在する.

定理 3.2 ([22]). 量子運動量写像は $H^1(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ によってパラメトライズされる.

量子運動量写像が運動量写像の「量子化」であることの理由は次の命題による.

命題 3.1 ([22]). $\Phi_* : Pol(\mathfrak{g}^*[[\lambda]]) \to C^\infty(M)[[\lambda]]$ を量子運動量写像とすれば, M 上には運動量写像 $J : M \to \mathfrak{g}^*$ が存在して

$$\Phi_*(u) = \Phi_0(u) + O(\lambda),\ \textit{for any } u \in Pol(\mathfrak{g}^*),$$

を満たす. ここで $\Phi_0 : Pol(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(M)$ は J の引き戻しである.

量子運動量写像 Φ_* の重要な性質として G-共変性がある

命題 3.2. $*$ を G-不変 $*$-積, Φ_* を $*$ の量子運動量写像とする.

$*'$ を T によって $*$ と G-形式同値な別の G-不変な $*$-積とすれば, $T\Phi_*$ は $*'$ の量子運動量写像になる.

Proof. 明らかに $T\Phi_*$ は $(\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]], *^G)$ から $(C^\infty(M)[[\lambda]], *')$ への準同形写像なので, $[T\Phi_*(X), f]_{*'} = \lambda X f$ であることを示せばよい:

$$[T\Phi_*(\xi), f]_{*'} = T[\Phi_*(\xi), T^{-1}f]_* = T(\lambda\xi T^{-1}f) = \lambda\xi f.$$

□

量子運動量写像は $H^1(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ によってパラメトライズされることに注意すれば, 次の系を得る.

系 3.1. $*, *'$ を G-不変な $*$-積, $\Phi_*, \Phi_{*'}$ をそれぞれの量子運動量写像とする. もし $H^1(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \{0\}$ で. $*$ が T によって $*'$ に G-形式同値ならば $T\Phi_* = \Phi_{*'}$ が成り立つ. すなわち, 量子運動量写像は形式同値によって互いに写りあう.

3.2 量子運動量写像の微分可能性

量子運動量写像の定義においては,(古典) 運動量写像の定義と同じように代数的な関係式のみで為されているのであるが, $*$-積の非可換性に由来する固有の困難が存在する.

運動量写像に関しては, $C^\infty(M)$ を Poisson Lie 環とみなしたとき, Φ_0 が運動量写像であることを $\Phi_0 : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ が Lie 環の準同形であると代数的に定義されていれば, 空間の写像 $J : M \to \mathfrak{g}^*$ を $\langle J(m), \xi\rangle = \Phi_0(\xi)(m)$ と定めることができ, さらにその引き戻しを考えることによって Φ_0 を $\Phi_0 : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(M)$ にまで拡張することができる. この拡張が可能であるのは, Φ_0 を可換代数としての準同形写像であるという性質に大きく依存している. 一方量子運動量写像 Φ_* に関しては, その代数の非可換性にゆえに空間の写像 J に対応するものを構成することができず, 同様の手法では Φ_* の定義域を $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ から $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ へと拡張することはできない.

そこで $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ の各要素に対して Φ_* を定義する代わりに, Φ_* が微分演算子で表されることを示すことで, 自然と定義域が拡張されることを証明した [14]. 以下でこの証明の概略を述べるが, 実際はかなり微妙で技巧的なところが多いので証明のほとんどは省略する. 興味のある方は [14] を参考にしていただきたい.

大雑把なアイデアは, Φ_* の「フーリエ変換表示」:

$$\Phi_*(u) = \int \mathfrak{F}u(\xi) \exp_*(i\xi\Phi_*(X))d\xi,$$

を構成することである. ここに $\mathfrak{F}u$ は u のフーリエ変換を表す.

この形式的な積分に適切な意味を与え, 被積分関数の $\exp_*(i\xi\Phi_*(X))$ が微分演算子による表示を持つことができれば目的が達成されるだろうというものである.

3.2.1 量子運動量写像の指数関数

まず $\exp_*(\Phi_*(X))$ を定義する. この関数を定義する目的は2つある. 一つは $\exp_*(X)$ の「解析的な性質のよさ」から, $\Phi_*(\exp_*(X))$ がよい性質を持って定義できる可能性があることから, $\exp_*(\Phi_*(X))$ に限定すれば微分演算子による表示を得やすいだろうということ, もう一つは,「フーリエ変換」を通じて $C^\infty(M)[[\lambda]]$ を生成することである.

補題 3.1. *$*$ を Fedosov 型 [7] の $*$-積とする. $\xi = \xi_0 + \xi_1\lambda + \cdots \in \mathfrak{g}_\lambda$ に対して, 級数*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Phi_*(\xi))^{*k} \tag{5}$$

は λ の各次数ごとに，M の任意のコンパクト集合上で絶対かつ一様に収束する．

また $\{X_l\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし，$\xi = \alpha^l X_l$，$\{\alpha^l\} \in \mathbb{C}^n[[\lambda]]$ とおけば $\exp_*(\Phi_*(\alpha^l X_l))$ は $e^{\alpha_0^l \Phi_0(X_l)}$ と $C^\infty(M)[[\lambda]]$ に値をとる α^l の多項式との積で表される．

補題 3.2. $\xi, \eta \in \mathfrak{g}_\lambda$ とすれば，

$$\exp_*(\Phi_*(\xi)) * \exp_*(\Phi_*(\eta)) = \exp_*(\Phi_*(\mathrm{CH}_\lambda(\xi, \eta))). \tag{6}$$

ここに CH_λ はキャンベルーハウスドルフ多項式を表す．

多重添字 $J = (j_1, j_2, \cdots, j_n)$ に対して，微分演算子

$$D_\alpha^J = \left(-i\frac{\partial}{\partial \alpha^1}\right)^{j_1} \cdots \left(-i\frac{\partial}{\partial \alpha^n}\right)^{j_n}.$$

を定める．

補題 3.3. $\{\alpha^l\} \in \mathbb{R}^n$ とすれば，

$$(D^J \exp_*(\Phi_*(i\alpha^l X_l)))|_{\alpha=0} = \Phi_*(X^J). \tag{7}$$

が成り立つ．

3.2.2 振動積分による Φ_* の表示

ここで Φ_* を $\exp_*(\Phi_*(X))$ と振動積分によって表す．これによって，$\exp_*(\Phi_*(X))$ による「フーリエ変換表示」に正確な意味を与えることができる．振動積分に関しては [16] を参照のこと．以下 Os-$\int$ は振動積分を表す．

定義 3.2. $\{X_l\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底，$\{X^l\}$ をその双対基底とする．また $\mathcal{A}^0$ を多項式程度の増大度を持つ $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ の部分空間とする．このとき，$\mathcal{A}^0$ から $C^\infty(M)[[\lambda]]$ への写像 $\overline{\Phi}_*$ を以下のように定める．

$$\overline{\Phi}_*(u) = \text{Os-}\int u(\mu X) e^{-i\nu\mu} \exp_*(\Phi_*(i\nu X)) d\mu d\nu, \quad u \in \mathcal{A}^0, \tag{8}$$

ここに $\mu X = \mu_l X^l$，$\nu X = \nu^l X_l$．

この定義は $u(\mu X)\exp_*(\Phi_*(i\nu X)) \in \mathcal{A}$ であるので意味をもつ．

補題 3.4. $\overline{\Phi}_*$ は多項式上で Φ_* と一致する．．

Proof. X^J を $\mathfrak{g}^*$ 上の単項式とすれば，

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_*(X^J) &= \text{Os-}\int \beta^J e^{-i\alpha\beta} \exp_*(\Phi_*(i\alpha X)) d\alpha d\beta \\
&= \text{Os-}\int e^{-i\alpha\beta} D_\alpha^J \exp_*(\Phi_*(i\alpha X)) d\alpha d\beta \\
&= D_\alpha^J \exp_*(\Phi_*(i\alpha X))|_{\alpha=0} = \Phi_*(X^J),
\end{aligned}$$

最後の行で式 (7) を用いた． □

次の命題は $\exp_*(\Phi_*(X))$ が e^X の Φ_* による像とみなせることを保障する.

命題 3.3. $p^k = p^k_j\lambda^j \in \mathbb{C}[[\lambda]]$ は $p^k_0 \in i\mathbb{R}$ を満たしているとする. このとき $e^{pX} = e^{p^k X_k} \in \mathcal{A}$ かつ $\Phi_*(e^{pX}) = \exp_*(\Phi_*(pX))$.

Proof. $pX = iaX + rX$ は, $a^k \in \mathbb{R}$, $r \in \lambda\mathbb{C}[[\lambda]]$ のように表されているとすれば, $e^{pX} \in \mathcal{A}$ であることが分かる. Φ_* の定義より,

$$\begin{aligned}
\Phi_*(e^{px}) &= \text{Os-}\int e^{p\mu}e^{-i\mu\nu}\exp_*(\Phi_*(i\nu X))d\mu d\nu \\
&= \text{Os-}\int e^{ia\mu}e^{r\mu}e^{-i\mu\nu}\exp_*(\Phi_*(i\nu X))d\mu d\nu \\
&= \text{Os-}\int e^{i(a-\nu)\mu}(e^{rD_\nu}\exp_*(\Phi_*(i\nu X)))d\mu d\nu \\
&= \text{Os-}\int e^{i(a-\nu)\mu}\exp_*(\Phi_*(i(\nu - ir)X))d\mu d\nu \\
&= \exp_*(\Phi_*(i(a-ir)X)) = \exp_*(\Phi_*(pX)).
\end{aligned}$$

□

命題 3.3 と補題 3.2 の系として, $\Phi_*(e^{i\xi}) * \Phi_*(e^{i\eta}) = \Phi_*(e^{i\xi} *^G e^{i\eta})$. が成り立つことが分かる.

定理 3.3 ([14]). 量子運動量写像 Φ_* は微分演算子で表せる. さらに $*$ が *Fedosov* 型の $*$-積ならば, $S_{I,j} \in C^\infty(M)$, $I = (i_1, \ldots, i_n)$, $j = 0, 1, \ldots$ が存在して

$$\Phi_*(u) = \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \sum_{0\le|I|\le 2j} S_{I,j}\Phi_0(D^I_\mu u), \quad \textit{for any } u(\mu) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*). \tag{9}$$

が成り立つ.

Proof. まず $*$ が Fedosov 型と仮定する. 系 5 より, $\exp_*(\Phi_*(i\alpha^l X_l))$ は

$$e^{i\alpha^l\Phi_0(X_l)}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \sum_{0<|I|\le 2j} S_{I,j}\alpha^I,$$

のような表示を持つ. ここで $S_{I,j} \in C^\infty(M)$ は $\Phi_*(X_i)$ と $*$ の Weyl 接続 D

に依存する．Φ_* の定義から

$$\begin{aligned}
\Phi_*(u) &= \text{Os-}\int u(\mu)e^{-i\mu_l\nu^l}\exp_*(\Phi_*(i\nu^l X_l))d\mu d\nu \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \sum_{0<|I|\le 2j} \text{Os-}\int u(\mu)e^{-i\mu_l\nu^l}e^{i\nu^l\Phi_0(X_l)}S_{I,j}\nu^I d\mu d\nu \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \sum_{0<|I|\le 2j} \text{Os-}\int u(\mu)e^{-i\nu^l(\mu_l-\Phi_0(X_l))}S_{I,j}\nu^I d\mu d\nu \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \sum_{0<|I|\le 2j} \text{Os-}\int S_{I,j}(D_\mu^I u)(\mu)e^{-i\nu^l(\mu_l-\Phi_0(X_l))}d\mu d\nu \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \sum_{0<|I|\le 2j} S_{I,j}\Phi_0(D_\mu^I u).
\end{aligned}$$

一般の G-不変 $*$-積 $*'$ に対しては G-形式同値な Fedosov 型の G-不変 $*$-積が存在することが知られているので [3]，形式同値写像で $\Phi_{*'}$ を写してやればよい． □

3.3 量子運動量写像の性質

命題 3.4. 量子運動量写像は $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ から $C^\infty(M)[[\lambda]]$ への $\mathfrak{g}$-同変写像である．

Proof. これは量子運動量写像の定義から直ちに従う：任意の $u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ と $\xi \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\Phi_*(\lambda\xi u) = \Phi_*([\xi, u]_{*G}) = [\Phi_*(\xi), \Phi_*(u)]_* = \lambda\xi\Phi_*(u).$$

□

命題 3.5. $f \in C^\infty(M)[[\lambda]]$ が任意の $\Phi_*(u), u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ と交換すれば f は G-不変関数．

Proof. ほぼ自明． □

命題 3.6. Φ_* が全射であることと Φ_0 が全射であることは同値．

Proof. Φ_0 が全射であるとする．$u = \sum u_i\lambda^i \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ と $\varphi \in C^\infty(M)$ に対して，方程式 $\Phi_*(u) = \varphi$ は

$$\Phi_0(u_0) = \varphi, \tag{10}$$

$$\Phi_0(u_k) = -\sum_{j=1}^{k}\Phi_j(u_{k-j}) \quad \text{for any } k > 0. \tag{11}$$

のように書くことができる．この方程式系は Φ_0 が全射であることから，帰納的に解けることがすぐに分かる．逆については自明． □

補題 3.5. $\varphi \in C^\infty(M)$ に対して，$u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ が方程式 $\Phi_*(u) = \varphi$ の解であるならば，u は φ に局所的に依存する，すなわち点 $J(q)$ において，u は φ の $q \in M$ における微分にのみ依存する．ここに $J: M \to \mathfrak{g}^*$ は Φ_0 の双対，つまり $(J_0(u))(q) = u(J(q))$ で定められる写像である．

Proof. 方程式 (10) は $u_0(J(q))$ が $\varphi(q)$ にのみ依存することを示す．また Φ_* は微分演算子で表されるので，$u_0, \ldots, u_{k-1}$ が φ の微分にのみ依存していれば方程式 (11) の右辺は φ の微分のみに依存するので，u_k もそうである． □

3.4 G-推移的空間上の G-不変 $*$-積が定める不変量

M を G-推移的なシンプレクティク多様体，$*$ を M 上のある G-不変 $*$-積とする．

以下では積 $*$ に対して一意的に量子運動量写像 Φ_* が存在することを仮定する．(先に述べたように，G が半単純ならばこの仮定は満たされる)．

$\mathfrak{z}$ を代数 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ の中心，すなわち，Gutt$*$-積の演算で全ての $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ と可換な元の集まりとする．Gutt$*$-積の性質より，$\mathfrak{z}$ は G-不変な $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ の元であることがすぐに分かる．

そこで任意の $l \in \mathfrak{z}$ に対して，$[\Phi_*(l), \Phi_*(C^\infty(\mathfrak{g}^*))]_* = \Phi_*([l, C^\infty(\mathfrak{g}^*)]_{*G}) = 0$, が成り立つから，命題 3.5 より $\Phi_*(l)$ は M 上の G-不変関数となる．

よって M が推移的であるとき, $\Phi_*(l)$ は定数になることがわかるので，次のような定義ができる．

定義 3.3. M を G-推移的なシンプレクティック多様体，$*$ を G-不変な $*$-積で，その量子運動量写像 Φ_* が一意的に存在するとする．

このとき $\mathfrak{z}$ から $\mathbb{C}[[\lambda]]$ への準同形写像 c_* を，任意の $l \in \mathfrak{z}$ に対して $c_*(l) \equiv \Phi_*(l)$ のように定める．

c_* は以下の性質を満たす．

命題 3.7. もし $\ker \Phi_* = \ker \Phi_{*'}$ ならば $c_* = c_{*'}$．

Proof. ある $l \in \mathfrak{z}$ によって $l - c_*(l)$ の形で表される $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ の要素は明らかに $\ker \Phi_*$ に含まれる．よって $\ker \Phi_* = \ker \Phi_{*'}$ が成り立っていれば，$\Phi_{*'}(l - c_*(l)) = 0$，すなわち $c_{*'}(l) = c_*(l)$ が成り立つ． □

これより直ちに次の系を得る

系 3.2. $*'$ が $*$ に G-形式同値ならば $c_* = c_{*'}$．

この系より c_* が $*$-積の G-形式同値類にのみ依存する，すなわち代数不変量であることがわかる．

次の節では自然に考えられる問題として，この不変量がどの程度精密なものであるか，すなわち c_* によって G-不変 $*$-積の分類ができるかどうかを考える．

4 コンパクト半単純Lie群の正則余随伴軌道上のG-不変$*$-積の構造

Gを実コンパクト半単純Lie群，$\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$を正則余随伴$G$-軌道とする．$\mathcal{O}$には$\mathfrak{g}^*$のKirillov-Poisson structure Πから自然に誘導されるシンプレクティク構造が入ることが知られている．またGはコンパクトなので$\mathcal{O}$上にはG-不変$*$-積が存在し，Gは半単純なので，任意のG-不変$*$-積に対して，一意的に量子運動量写像Φ_*が存在することが分かる．

4.1 $\mathcal{O}$上のG-不変$*$-積の構造定理

量子運動量写像をλのべきで展開$\Phi_* = \Phi_0 + \Phi_1\lambda^1 + \cdots$すれば$\lambda$の0次項$\Phi_0$は一般に運動量写像を与える．いっぽうとくに$\mathcal{O}$が余随伴軌道であるときは$\Phi_0$は単純に$\mathcal{O}$を$\mathfrak{g}^*$に埋め込む写像の引き戻しであるので，$\Phi_0$は$C^\infty(\mathfrak{g}^*)$から$C^\infty(\mathcal{O})$への全射である．よって命題3.6より$\Phi_*$は$C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$から$C^\infty(\mathcal{O})[[\lambda]]$への全射であることが従う．

次の命題はΦ_*が全射準同形であることからただちにわかる．

命題 4.1. 次のようなG-共変な代数同形写像

$$C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]/\ker\Phi_* \cong C^\infty(\mathcal{O})[[\lambda]]. \tag{12}$$

が存在する．

命題4.1によって，もし$*$と$*'$の量子運動量写像Φ_*とΦ'_*が$\ker\Phi_* = \ker\Phi_{*'}$を満たしていれば$(C^\infty(\mathcal{O})[[\lambda]], *)$と$(C^\infty(\mathcal{O})[[\lambda]], *')$はそれぞれ共通の代数$C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]/\ker\Phi_*(=\ker\Phi'_*)$と$G$-共変的に同形である．また任意の$\varphi \in C^\infty(\mathcal{O})$に対して，補題3.5より$u \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$で$\Phi_*(u) = \varphi$を満たすものが存在し，$\Phi_{*'}(u)$を考えることで$*$から$*'$への微分可能な代数同形写像が構成できることが分かる．よって次の補題を得る

補題 4.1. $\ker\Phi_* = \ker\Phi_{*'}$であればまたそのときに限り，$*$と$*'$が$G$-形式同値である．

先に見たように$\ker\Phi_* = \ker\Phi_{*'}$から$c_* = c_{*'}$が言えるが，以下の命題が示すように$\mathfrak{g}^*$上に「よい座標関数」が存在すれば逆も成り立つ．

命題 4.2. 関数的に独立なG-不変関数の系$p_i : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}, 1 \le i \le r$で$\mathcal{O}$をこれらの関数の等高線集合$\{\xi \in \mathfrak{g}^* : p_i(\xi) = c_i\}$，($\{c_i\}$は$\{p_i\}$のある正則点)によって与えるものが存在するとき，$\ker\Phi_*$は$\{p_i - c_*(p_i); 1 \le i \le r\}$によって生成される$C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$のイデアルに等しい．

Proof. $f = f_0 + f_1\lambda + \cdots \in \ker \Phi_*$ とすれば，$f_0 \in \ker \Phi_0$，すなわち，f_0 が $\mathcal{O}$ 上で 0 であることがすぐに分かる．よって関数の系 $g_i \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ で

$$f_0 = \sum_{i=1}^{r} g_i(p_i - c_i). \tag{13}$$

を満たすものが存在する．そこで

$$f^{(0)} = \sum_{i=1}^{r} g_i *^G (p_i - c_*(p_i)), \tag{14}$$

のようにおけば，$f^{(0)} \in \ker \Phi_*$ かつ $f^{(0)}_0 = f_0$ を満たす．同じ操作を $(f - f^{(0)})/\lambda$ に対して行うことで，帰納的に関数の列 $f^{(k)}$ で

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}\lambda^k. \tag{15}$$

を満たすものを構成できて，$f^{(k)}$ はそれぞれ (14) の形をしている．□

特に $\mathfrak{g}$ が半単純であるときは $\mathfrak{g}^*$ の G-不変多項式全体を $I \subset \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ とするとき Chevalley の定理によって代数的に独立な $r = \mathrm{rank}(\mathfrak{g})$ 個の G-不変斉次多項式 (=Casimir 元)$p_1, \ldots, p_r$ が存在して $I = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_r]$ と表せ，任意の正則余随伴軌道 $\mathcal{O}$ はある正則値 $\{c_j\}$ により等高線集合 $\{\xi \in \mathfrak{g}^*; p_1(\xi) = c_1, \ldots, p_r(\xi) = c_r\}$ に等しいことが知られている [15][20]．

よってこの $\{p_j\}$ は命題 4.2 の条件を満足するのでわれわれは命題 3.7 の逆を得ることができた．

命題 4.3. $*, *'$ を G-不変 $*$-積，$\Phi_*, \Phi_{*'}$ をそれぞれの量子運動量写像とする．このとき $c_* = c_{*'}$ ならば $\ker \Phi_* = \ker \Phi_{*'}$ が成り立つ．さらに $\{p_j\}$ を *Chevalley* の定理で与えられる代数的に独立な斉次多項式の系とすれば

$$\ker \Phi_* = \langle p_j - \Phi_*(p_j) \rangle,$$

が成り立つ．ここに $\langle p_j - \Phi_*(p_j) \rangle$ は $p_j - \Phi_*(p_j)$ で生成される $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ のイデアルである．

そしてこれより次の構造定理を得る

定理 4.1. $\mathcal{O}$ 上の任意の G-不変 $*$-積 $*$ に対して，定数 $c_{*,j} \in \mathbb{C}[[\lambda]], j = 1, 2, \ldots, r$ が存在して

$$(C^\infty(\mathcal{O})[[\lambda]], *) \cong C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]/\langle p_i - c_{*,j} \rangle.$$

とできる．さらにこの同形写像は G-共変である．

Proof. Φ_* を $*$ の量子運動量写像として，$c_{*,j} = \Phi_*(p_j)$ とおけば命題 4.1 と命題 4.3 から直ちに従う．□

Remark: 定数 $c_* \in \mathbb{C}[[\lambda]]$ を Casimir 元の量子運動量写像 Φ_* の像に限らずに，一般の値をとったとしても $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ のイデアル $\langle p_i - c_{*,j}\rangle$ を考えることができて，商代数 $\mathcal{A}_{c_*} = C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]/\langle p_i - c_{*,j}\rangle$ を構成することができる．この代数の λ の 0 次項を考えれば，ちょうど $C^\infty(\mathfrak{g}^*)/\langle p_i - c_j\rangle \cong C^\infty(\mathcal{O})$ となるので，代数 $\mathcal{A}_{c_*}$ は $\mathcal{O}$ 上の $*$-積を与えているように見えるが，[10] によるとそうではない．c_* の選択によっては，$*$ が微分演算子で表示することができないことがある．とくに $\mathcal{O}$ を定める正則値 $\{c_j\}$ をそのまま $c_{*,j} = c_j$ とおいた場合，$\mathcal{A}_{c_*}$ は微分演算子で表示できないことが知られている．このことが，$C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ を $\mathcal{O}$ に制限するだけでは $\mathcal{O}$ 上の量子化を得ることができないことと深く関係しているようである．

4.2 例

SO(3) の余随伴軌道 ($=S^2$)

$\mathcal{O}$ を SO(3) の正則余随伴軌道とする．$\mathcal{O}$ は $\mathfrak{so}(3)^*$ 内の 2 次元球面で，唯一の Casimir 多項式 $p(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ によって，正則値 $r > 0$ に対して

$$\mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathfrak{g}^*; p(x,y,z) = r^2\}.$$

のように与えられることが知られている．

$*$ を SO(3)-不変な $\mathcal{O}$ 上の $*$-積とする．このとき p は命題 4.2 の条件を満たすので，$\ker \Phi_*$ は $c_*(p)$ の値にのみ依存して

$$(C^\infty(\mathcal{O})[[\lambda]], *) \cong (C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]], *^G)/\langle p - c_*(p)\rangle. \tag{16}$$

よって，$\mathcal{O}$ 上の G-不変 $*$-積は (16) の右辺のような形もち，$c_*(p)$ によってパラメトライズされる．

参考文献

[1] D. Arnal, J.C. Cortet, P. Molin and G. Pinczon, Covariance and geometrical invariance in $*$ quantization. J. Math. Phys., **24** (1983), no. 2, 276–283.

[2] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, Deformation theory and quantization, I and II. Ann. Physics, **111** (1978), 61–151.

[3] M. Bertelson, P. Bieliavsky, and S. Gutt, Parametrizing equivalence classes of invariant star products. Lett. Math. Phys., **46** (1998), 339–345.

[4] M. Bertelson, M. Cahen, and S. Gutt, Equivalence of star products. Class. Quantum Gravity, **14** (1997), A93–A107.

[5] M. De Wilde and P. Lecomte, Existence of star-products and of formal deformations of Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds. Lett. Mathe. Phys., **7** (1983), 487–496.

[6] G. Dito, Kontsevich star product on the dual of Lie Algebra. Lett. Math. Phys., **48** (1999), 307–322.

[7] B. Fedosov, A simple geometrical construction of deformation quantization. J. Differential Geom., **40** (1994), 213–238.

[8] B. Fedosov, Deformation quantization and index theory. In: *Mathematical Topics* **9**. Akademie Verlag, 1996.

[9] B. Fedosov, Non-abelian reduction in deformation quantization. Lett. Math. Phys., **43** (1998), 137–154.

[10] R. Fioresi, M. A. Lledo, On the deformation quantization of coadjoint orbits of semisimple groups Pacific J. Math, **198** (2001), 411–436.

[11] S. Gutt, An explicit $*$-product on the cotangent bundle to a Lie group. Lett. Math. Phys., **7** (1983), 249–258.

[12] K. Hamachi, A new invariant for G-invariant star products. Lett. Math. Phys., **50** (1999), 145–155.

[13] K. Hamachi, Quantum moment maps and invariants for G-invariant star products. Rev. Math. Phys., **14** (2002), 601–621.

[14] K. Hamachi, Differentiability of quantum moment maps and G-invariant star products. Pac. J. Math. , **216** (2004), 127–148.

[15] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings. Amer. J. Math, **85** (1963), 327–404.

[16] H. Kumano-go, Pseudodifferential operators. MIT press, 1981.

[17] J. Marsden and T. Ratiu, Introduction to mechanics and symmetry. Springer-Verlag, 1994.

[18] H. Omori, Y. Maeda, and A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization. Adv. Math, **85** (1991), 224–255.

[19] L. Schwartz, Théorie des Distributions. Hermann, Paris, 1966.

[20] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras and their Representaions. Springer Verlag, 1984.

[21] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds. J. Differential Geom., **18** (1983), 523–557.

[22] P. Xu, Fedosov *-Products and Quantum Momentum Maps. Comm. Math. Phys., **197** (1998), 167–197.