数理解析研究所講究録
第 1577 巻 2008 年 17-35

複素双曲型空間内のある２つの等質実超曲面の特徴付け

佐賀大学・理工学部数理科学科　前田　定廣 (SADAHIRO MAEDA)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING, SAGA UNIVERSITY

本稿の題目は, RIMS 研究集会「部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり, 平成１９年７月１１日（水）～７月１３日（金)」における著者の講演題目「複素双曲型空間内の極小等質線織実超曲面の特徴付け」とは異なるものであるが, 講演内容を完全に含んでいる。

1. 初めに（等質実超曲面に関する概論）

記号・記法の導入から始めよう。

ケーラー多様体 $(\widetilde{M}_n, J, \langle\ ,\ \rangle)$ 内の（局所単位法ベクトル場 $\mathcal{N}$ を持つ）等長にはめ込まれた任意の実超曲面 M^{2n-1} に対して, 概接触計量構造 $(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ を定義する。ここで, $\xi := -J\mathcal{N}$ であり, $\forall X \in TM$ に対して $\eta(X) := \langle \xi, X\rangle$, $\phi(X) := JX - \eta(X)\mathcal{N}$ と定義する。このとき, ケーラー多様体 $\widetilde{M}_n$ のリーマン接続 $\widetilde{\nabla}$ と実超曲面 M^{2n-1} の誘導リーマン接続 ∇ は, 次の二つの公式（前者はガウスの公式, 後者はワインガルテンの公式）によって関係付けられている。

$$
\begin{cases} \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle \mathcal{N}, \\ \widetilde{\nabla}_X \mathcal{N} = -AX. \end{cases} \tag{1.1}
$$

ここで, $X, Y \in TM$ であり, A は M の $\widetilde{M}$ における型作用素 (shape operator) である。また, $\widetilde{\nabla} J = 0$ より次が確かめられる。

$$
\begin{cases} (\nabla_X \phi)Y = \eta(Y)AX - \langle AX, Y\rangle \xi, \\ \quad \nabla_X \xi = \phi AX. \end{cases} \tag{1.2}
$$

特性ベクトル場 ξ が各点で主曲率ベクトルであるような実超曲面 M^{2n-1} は, ケーラー多様体 $\widetilde{M}_n$ 内のホップ超曲面と呼ばれている。以後, ホップ超曲面に対して $A\xi = \alpha\xi$ と置くことにする。特に, 外側の空間として $\widetilde{M} = M_n(c)$（即ち, ここでは $M_n(c)$ は定正則断面曲率 $c(\neq 0)$ を持つ複素 n 次元完備単連結ケーラー多様体を意味する。故に, $M_n(c)$ は, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 又は, 複素双曲型空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ と正則等長同型である。）を取るとホップ超曲面は豊富に存在する。例えば, $M_n(c)\,(c \neq 0)$ 内の任意のケーラー部分多様体を取り, それを芯とする半径が十分小さくて一定なチューブを考えると, そのチューブがホップ超曲面になっている。これから $M_n(c)\,(c \neq 0)$ 内の実超曲面論を専らに行うが, 特に局所的な議論では, 上述の諸公式 (1.1), (1.2) 及び次の２つの式（ガウスの方程式, コダッチの方程式）が威力を発揮する。

$$
\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z, W\rangle =&(c/4)\{\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle + \langle \phi Y,Z\rangle\langle \phi X,W\rangle \\ &- \langle \phi X,Z\rangle\langle \phi Y,W\rangle - 2\langle \phi X,Y\rangle\langle \phi Z,W\rangle\} \\ &+ \langle AY,Z\rangle\langle AX,W\rangle - \langle AX,Z\rangle\langle AY,W\rangle, \end{aligned} \tag{1.3}
$$

ここで, R は実超曲面 M の曲率テンソルを表す。

$$(1.4) \qquad (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = (c/4)\{\eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X - 2\langle \phi X, Y\rangle \xi\}.$$

次の補題は $\widetilde{M} = M_n(c)$ $(n \geqq 2,\ c \neq 0)$ 内の実超曲面論において有用な道具である。

補題 1. $\widetilde{M} = M_n(c)$, $c \neq 0$ 内のホップ超曲面 M^{2n-1} $(n \geqq 2)$ は, 次を満たす。ただし, $A\xi = \alpha\xi$ とする。

(1) α は, M 上局所的に定数である。
(2) $AX = \lambda X$ を満たすベクトル $X(\perp \xi)$ に対して, $(2\lambda - \alpha)A\phi X = (\alpha\lambda + (c/2))\phi X$ が成り立つ。特に, $c > 0$ の場合は $A\phi X = \frac{\alpha\lambda+(c/2)}{2\lambda-\alpha}\phi X$ が成り立つ。

注意 1. $c < 0$ の場合は, 補題 1(2) において, 2つの方程式 $2\lambda - \alpha = 0$, $\alpha\lambda + (c/2) = 0$ は両立する。例えば, $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホロ球面を取ればよい。この実超曲面は, 主曲率 2種 $\lambda = \sqrt{|c|}/2$, $\alpha = \sqrt{|c|}$ (または, $\lambda = -\sqrt{|c|}/2$, $\alpha = -\sqrt{|c|}$) を持つ。よって, $c < 0$ の場合は, $2\lambda - \alpha = 0$, $2\lambda - \alpha \neq 0$ の両方のケースを考えなければならない。

$\widetilde{M} = M_n(c)$ における実超曲面論では, 次の2つの問題がある。

問題 1: $M_n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の等質実超曲面を分類し, それらを (全部あるいは個別に) 実超曲面全体が成すクラスにおいて特徴付けよ。
問題 2: $M_n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の "良い" 幾何的性質を持った非等質実超曲面を構成し, それを実超曲面全体が成すクラスにおいて特徴付けよ。

実超曲面 M が $\widetilde{M} = M_n(c)$ において等質であるとは, M が外側の空間 $\widetilde{M} = M_n(c)$ の等長変換群 $\mathrm{I}(M_n(c))$ のある部分群の軌道で表されることを意味する。$\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面は Takagi ([18]) により分類され, 次の結果が知られている。

定理 A. $\mathbb{C}P^n(c)\,(n \geqq 2)$ 内の等質実超曲面 M は, 次の6つのホップ超曲面のどれかと局所的に ($\mathbb{C}P^n(c)$ の等長変換に関して) 合同である。

(A_1) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r $(0 < r < \pi/\sqrt{c})$ の測地球面,
(A_2) 全測地的 $\mathbb{C}P^k(c)\,(1 \leqq k \leqq n-2)$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/\sqrt{c})$ のチューブ,
(B) 複素2次超曲面 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/(2\sqrt{c}))$ のチューブ,
(C) $\mathbb{C}P^1(c) \times \mathbb{C}P^{(n-1)/2}(c)$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/(2\sqrt{c}))$ のチューブ, ここで $n (\geqq 5)$ は奇数,
(D) 複素グラスマン $\mathbb{C}G_{2,5}$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/(2\sqrt{c}))$ のチューブ, ここで $n = 9$,
(E) エルミート対称空間 $SO(10)/U(5)$ を芯とする半径 r $(0 < r < \pi/(2\sqrt{c}))$ のチューブ, ここで $n = 15$.

また, $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 $r = \pi/2$ の測地球面は, $\mathbb{C}P^{n-1}(c)$ に退化するから, 前述の (A_1) 型等質実超曲面 (即ち, $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r $(0 < r < \pi/\sqrt{c})$ の測地球面) は, 全測地的複素超曲面 $\mathbb{C}P^{n-1}(c)$ 上の半径 $(\pi/2) - r$ のチューブと合同である。よって, 分類定理 A は, $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面は, 階数1または2の適当なコンパクトエルミート対称空間を芯とするチューブになることを我々に教えてくれる。これ

ら６種類の等質実超曲面の主曲率は次のようになっている（[18]）。

	(A_1)	(A_2)	(B)	(C, D, E)
λ_1	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}r}{2}$	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}r}{2}$	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(r-\frac{\pi}{4})\right)$	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(r-\frac{\pi}{4})\right)$
λ_2	—	$-\frac{\sqrt{c}}{2}\tan\frac{\sqrt{c}r}{2}$	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(r+\frac{\pi}{4})\right)$	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(r+\frac{\pi}{4})\right)$
λ_3	—	—	—	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}r}{2}$
λ_4	—	—	—	$-\frac{\sqrt{c}}{2}\tan\frac{\sqrt{c}}{2}$
α	$\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$	$\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$	$\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$	$\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$

また, Kimura（[8]）は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面に次のような幾何学的特徴付けを与えた。

定理 B. $\mathbb{C}P^n(c)\,(n \geqq 2)$ 内の連結実超曲面 M に関する次の２条件は同値である。

(1) M は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質実超曲面である。

(2) M は, すべての主曲率がそれぞれ一定な $\mathbb{C}P^n(c)$ 内のホップ超曲面である。

Berndt（[3]）は, 定理 B の条件 (2) に触発されて次の分類定理を得た。

定理 C. $\mathbb{C}H^n(c)\,(n \geqq 2)$ 内のすべての主曲率がそれぞれ一定なホップ超曲面 M は, 次の５つの等質実超曲面と ($\mathbb{C}H^n(c)$ の等長変換に関して) 局所的に合同である。

(A_0) $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホロ球面,

$(A_{1,0})$ $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の半径 $r\,(0 < r < \infty)$ の測地球面,

$(A_{1,1})$ 全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ を芯とする半径 $r\,(0 < r < \infty)$ のチューブ,

(A_2) 全測地的 $\mathbb{C}H^k(c)\,(1 \leqq k \leqq n-2)$ を芯とする半径 $r\,(0 < r < \infty)$ のチューブ,

(B) 全実全測地的 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ を芯とする半径 $r\,(0 < r < \infty)$ のチューブ.

ここで, $(A_{1,0})$ 型と $(A_{1,1})$ 型は, 互いに合同でない実超曲面であることに注意されたい。$\mathbb{C}H^n(c)$ は $\mathbb{C}P^n(c)$ と違いノンコンパクトであるから, ある種の双対性が成り立たないのである。定理 C に現れる実超曲面の主曲率と重複度は, 次のようになっている（[3]）。

	λ_1	λ_2	α
(A_0)	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}$	—	$\sqrt{\lvert c\rvert}$
$(A_{1,0})$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\coth\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}r}{2}$	—	$\sqrt{\lvert c\rvert}\coth(\sqrt{\lvert c\rvert}r)$
$(A_{1,1})$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\tanh\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}r}{2}$	—	$\sqrt{\lvert c\rvert}\coth(\sqrt{\lvert c\rvert}r)$
(A_2)	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\coth\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}r}{2}$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\tanh\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}r}{2}$	$\sqrt{\lvert c\rvert}\coth(\sqrt{\lvert c\rvert}r)$
(B)	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\coth\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}r}{2}$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\tanh\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}r}{2}$	$\sqrt{\lvert c\rvert}\tanh(\sqrt{\lvert c\rvert}r)$

定理 A, C に現れる等質実超曲面は, $M_n(c)\,(c \neq 0)$ 内の実超曲面論における標準的な例と呼べるもので, 定理 B 以外にも今まで様々な幾何学的特徴付けが与えられてきた（例えば, [1, 3, 6, 8, 11, 15, 17] を参照）。また, 定理 C に現れる $(A_{1,0})$ 型と $(A_{1,1})$ 型は, 通常共に (A_1) 型と呼ばれている。更に, (A_0) 型, (A_1) 型, (A_2) 型は, (A) 型等質実超曲面と総称されている。intrinsic geometry（即ち, 部分多様体論と絡まない幾何学）の立場から言うと, この (A) 型は特に良い等質空間である「自然に簡約可能な等質空間（naturally reductive homogeneous space)」になっている（参照 [16]）。よって, (A) 型等質実超曲面 M 上の任意の測地線 γ は等質曲線（即

ち, γ は, M の等長変換群のある一径数部分群の軌道）であるから, これと埋め込みを与える写像が同変写像（equivariant mapping）である事実を組み合わせると, 曲線 γ は外側の空間 $M_n(c)\,(c \neq 0)$ でも等質曲線になっていることが分かる。このようなことが効いているせいか, extrinsic geometry（即ち, 部分多様体論）では, (A) 型等質実超曲面は $M_n(c)\,(c \neq 0)$ 内の最も“良い”実超曲面であることが知られていて, 実に多くの美しい特徴付けが与えられている（参照 [17]）。

$\mathbb{C}H^n(c)$ 内の等質実超曲面は Berndt, Tamaru ([4]) により最近になって, 次のように分類された。

定理 D. $\mathbb{C}H^n(c)\,(n \geqq 2)$ 内の等質実超曲面 M^{2n-1} は, 次の６つの例に限る。

(1) 全測地的 $\mathbb{C}H^k(c)\,(0 \leqq k \leqq n-1)$ を芯とする半径 $r\,(0 < r < \infty)$ のチューブ,
(2) 全測地的 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ を芯とする半径 $r\,(0 < r < \infty)$ のチューブ,
(3) $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホロ球面,
(4) 全実全測地的平面 $\mathbb{R}H^2(c/4)$ 上のホロサイクルで作られた極小線織実超曲面 S または, S に付随した等距離超曲面,
(5) $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の階数 $k\,(2 \leqq k \leqq n-1)$ の法バンドルを持つ *normally homogeneous submanifold* F_k を芯とする半径 $r\,(0 < r < \infty)$ のチューブ,
(6) $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の階数 $2k\,(2 \leqq 2k \leqq 2[(n-1)/2])$ の法バンドルと一定のケーラー角度 $\varphi(\in (0, \pi/2))$ を持つ *normally homogeneous submanifold* $F_{k,\varphi}$ を芯とする半径 $r\,(0 < r < \infty)$ のチューブ.

定理 D の例 (4), (5), (6) は, ノンホップ超曲面であることが, まず直ちに分かることに注意されたい（定理 C を参照）。

本講演では, 問題 1 の観点に鑑み２つの等質実超曲面を考察する。まず最初に, ホップ超曲面の一例である, 主曲率２種の B 型等質実超曲面を調べ, それを特徴付けてみよう（定理１）。具体的に言うとこの超曲面は, 全実全測地的 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ を芯とする半径 $r = (1/\sqrt{|c|}\,)\log_2(2+\sqrt{3}\,)$ のチューブになっている。ここで, 他の B 型等質実超曲面は, 主曲率３種を持つことに注意されたい。もう一つの等質実超曲面は, ノンホップ等質実超曲面の筆頭メンバーである（全実全測地的平面 $\mathbb{R}H^2(c/4)$ 上のホロサイクルで作られた）極小等質線織実超曲面 S である。この実超曲面にも幾何学的な特徴付けを与えよう（定理２）。

2. 複素空間形内の B 型等質実超曲面及び定理１

すべてのホップ超曲面に共通な性質として次の事が知られている。

命題 1. $\widetilde{M} = M_n(c)\,(n \geqq 2, c \neq 0)$ 内の任意のホップ超曲面 M の正則分布 $T^0M(:= \{X \in TM \mid X \perp \xi\})$ は, 可積分ではない。

(証明) T^0M が可積分となるホップ超曲面 M の存在を仮定すると

$$\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, \xi \rangle = 0 \quad \text{for } \forall X, Y \in T^0M.$$

よって, (1.2) より

$$\langle (\phi A + A\phi)X, Y \rangle = 0 \quad \text{for } \forall X, Y \in T^0M.$$

これと特性ベクトル ξ が主曲率ベクトルであるという仮定を組み合わせると, $\phi A + A\phi = 0$ が M 上恒等的に成り立つことになる。しかし, このような実超曲面は存在しないことが分かっているので, 矛盾を得る（参照: [17] の page 252)。 □

それでは T^0M が, 可積分な分布の直和になっているようなホップ超曲面 M は存在するであろうか？この方向の問題意識で, 実は $\widetilde{M}=M_n(c)\,(n \geqq 2, c \neq 0)$ 内の任意の (B) 型等質実超曲面を特徴付けることができる（[6, 12] を参照)。

命題 2. $\widetilde{M}=M_n(c)\,(n \geqq 2, c \neq 0)$ 内の連結実超曲面 M が (B) 型等質実超曲面であるための必要十分条件は, M の正則分布 T^0M が T^0M に制限された主分布 $V^0_{\lambda_i}=\{X \in T^0M|\, AX=\lambda_i X\}$ の直和に分解され, しかも各 $V^0_{\lambda_i}$ は可積分であり, その任意の葉体 (*leaf*) は実超曲面 M 内の全測地的部分多様体である。

(証明) $c<0$ の場合の議論がより複雑であるから, 専らこの場合だけを考察する。我々の議論は, 文献 [6] の議論のギャップ（141 page, 下から5行目）を埋めたものである。

M を (B) 型とすると正則分布 T^0M は, $T^0M=V^0_{\lambda_1}\oplus V^0_{\lambda_2}$ であり, $\lambda_1=(\sqrt{|c|}/2)\cdot \coth(\sqrt{|c|}\,r/2), \lambda_2=(\sqrt{|c|}/2)\tanh(\sqrt{|c|}\,r/2)$, $\phi V^0_{\lambda_1}=V^0_{\lambda_2}$, $A\xi=\sqrt{|c|}\tanh(\sqrt{|c|}\,r)\xi$ を満たす。任意の $X, Y \in V_{\lambda_i}\ (i=1,2)$ に対して, $\nabla_X Y \in V^0_{\lambda_i}$ を示そう。次の式が成り立つ。

$$A\nabla_X Y=\nabla_X(AY)-(\nabla_X A)Y=\lambda_i\nabla_X Y-(\nabla_X A)Y.$$

また $\langle \phi X, Y\rangle=0$ でしかも A は対称であるから, 任意の $Z \in TM$ に対してコダッチの方程式 (1.4) を使うと次を得る。

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_X A)Y, Z\rangle &= \langle(\nabla_X A)Z, Y\rangle=\langle(\nabla_Z A)X, Y\rangle\\ &= \langle \nabla_Z(AX)-A\nabla_Z X, Y\rangle=\langle(\lambda_i I-A)\nabla_Z X, Y\rangle\\ &= \langle \nabla_Z X, (\lambda_i I-A)Y\rangle=0.\end{aligned}$$

これら2つの方程式は, 任意の $X, Y \in V_{\lambda_i}$ に対して $A(\nabla_X Y)=\lambda_i\nabla_X Y$ を意味するから, V_{λ_i} は可積分であり, その任意の葉体は (B) 型実超曲面 M の全測地的部分多様体になる。

次に逆を示そう。一般性を損なうことなく $c=-4$ としてよい。まず最初に我々の実超曲面 M は, ホップ超曲面であることに注意する。実際, 任意の $X=\sum_i X^i v_i \in T^0M$（ここで, v_i は $V^0_{\lambda_i}$ に属する単位ベクトル）に対して $\langle A\xi, X\rangle=\langle \xi, AX\rangle=\sum_i\langle \xi, X^i\lambda_i v_i\rangle=0$ が成り立つ。以下の議論は, (I) $\dim T^0M=2$ と (II) $\dim T^0M \geqq 4$ の2つの場合に分かれる。

場合分け (I). この場合は, $T^0M=V^0_{\lambda_1}\oplus V^0_{\lambda_2}$ であり, $\lambda_1 \neq \lambda_2, \dim V^0_{\lambda_1}=\dim V^0_{\lambda_2}=1$ となっている。その上, $V^0_{\lambda_1}$ と $V^0_{\lambda_2}$ のそれぞれの任意の積分曲線は, M 上の測地線である。ここで, M 上の局所正規直交標構 $\{e_1, e_2, \xi\}$ を $e_i \in V^0_{\lambda_i}\ (i=1,2), e_2=\phi e_1$ を満たすように取る。M はホップ超曲面であるから, 方程式 (1.2) は $\nabla_\xi\xi=0$ を意味する。また仮定より $\nabla_{e_1}e_1=\nabla_{e_2}e_2=0$ が成り立つ。方程式 (1.2) より次が成り立つ。

$$\nabla_{e_1}\xi=\lambda_1 e_2,\ \nabla_{e_2}\xi=-\lambda_2 e_1,\ \nabla_{e_1}e_2=-\lambda_1\xi,\ \nabla_{e_2}e_1=\lambda_2\xi. \tag{2.1}$$

ここで, コダッチの方程式 (1.4) より次を得る。

$$(\nabla_{e_1}A)e_2-(\nabla_{e_2}A)e_1=2\xi.$$

一方, 方程式 (2.1) を使うと

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_1}A)e_2-(\nabla_{e_2}A)e_1 &= \nabla_{e_1}(Ae_2)-A\nabla_{e_1}e_2-\nabla_{e_2}(Ae_1)+A\nabla_{e_2}e_1\\ &= (e_1\lambda_2)e_2+(\lambda_2 I-A)\nabla_{e_1}e_2-(e_2\lambda_1)e_1-(\lambda_1 I-A)\nabla_{e_2}e_1\\ &= -(e_2\lambda_1)e_1+(e_1\lambda_2)e_2+\{\alpha(\lambda_1+\lambda_2)-2\lambda_1\lambda_2\}\xi.\end{aligned}$$

となる。これら２つの方程式より

$$(2.2)\qquad 2 = \alpha(\lambda_1+\lambda_2) - 2\lambda_1\lambda_2,$$

$$(2.3)\qquad e_2\lambda_1 = 0,$$

$$(2.4)\qquad e_1\lambda_2 = 0.$$

が分かる。

ここで, コダッチの方程式 (1.4) より $(\nabla_{e_1}A)\xi - (\nabla_\xi A)e_1 = e_2$ となる。他方,

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_1}A)\xi - (\nabla_\xi A)e_1 &= \nabla_{e_1}(A\xi) - A(\nabla_{e_1}\xi) - \nabla_\xi(Ae_1) + A(\nabla_\xi e_1)\\ &= \alpha\lambda_1 e_2 - \lambda_1\lambda_2 e_2 - (\xi\lambda_1)e_1 - (\lambda_1 I - A)(\nabla_\xi e_1).\end{aligned}$$

が成り立つ。しかも $(\lambda_1 I - A)(\nabla_\xi e_1)$ は e_1 と直交するから, これら２つの方程式より $\xi\lambda_1 = 0$ が分かる。同様にして, $\xi\lambda_2 = 0$ となる。

また α は局所的に定数であるから, (2.2) と (2.3) より

$$(2.5)\qquad (\alpha - 2\lambda_1)(e_2\lambda_2) = 0.$$

となる。同様にすると, (2.2) と (2.4) より次を得る。

$$(2.6)\qquad (\alpha - 2\lambda_2)(e_1\lambda_1) = 0.$$

我々の場合分け (I) は, 次の３通りに分かれる。

場合分け (I_a): 局所的に $\alpha \equiv 2\lambda_2$ が成り立ち, しかも $\alpha \neq 2\lambda_1$ がある点 $p \in M$ で成り立つ。この場合は, 方程式 (2.2) より $(\lambda_2)^2 = 1$ となる。一般性を損なうことなく, $\lambda_2 = 1$ としてよい。よって, $\alpha = 2$ となる。簡単のために, $\lambda_1 = \lambda$ と置くと

$$\begin{cases}\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_2}e_2 = \nabla_\xi\xi = 0,\\ \nabla_{e_1}e_2 = -\lambda\xi,\ \nabla_{e_2}e_1 = \xi,\\ \nabla_{e_1}\xi = \lambda e_2,\ \nabla_{e_2}\xi = -e_1.\end{cases}$$

を得る。そこで λ の連続性より, $\lambda \neq 1$ が点 p のある近傍 $\mathcal{U}$ 上で成り立つ。次に $\nabla_\xi e_1 = \mu e_2$ と置くと, コダッチの方程式 (1.4) より次が成り立つ。

$$(\nabla_{e_1}A)\xi - (\nabla_\xi A)e_1 = e_2.$$

一方,

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_1}A)\xi - (\nabla_\xi A)e_1 &= 2(\nabla_{e_1}\xi) - A(\nabla_{e_1}\xi) - \nabla_\xi(\lambda e_1) + A(\nabla_\xi e_1)\\ &= -(\xi\lambda)e_1 + (\lambda+\mu)e_2 - \lambda\mu e_2.\end{aligned}$$

となっている。これら２つの方程式より $\lambda + \mu - \lambda\mu = 1$ となるから, $\mu = 1$ が $\mathcal{U}$ 上成り立つ。故に $\nabla_\xi e_1 = e_2$ かつ $\nabla_\xi e_2 = -e_1$ となる。ここで R を実超曲面 M の曲率テンソルとすると, その定義より

$$\begin{aligned}\langle R(e_1,e_2)e_2,e_1\rangle &= \lambda\langle\nabla_{e_2}\xi, e_1\rangle + \lambda\langle\nabla_\xi e_2, e_1\rangle + \langle\nabla_\xi e_2, e_1\rangle\\ &= -2\lambda - 1.\end{aligned}$$

が計算される。他方, ガウスの方程式 (1.3) より $\langle R(e_1,e_2)e_2,e_1\rangle = -4+\lambda$ となる。よって, $\mathcal{U}$ 上 $\lambda = 1$ となり, 矛盾を得る。故に, 場合分け (I_a) は起きない。

場合分け (I_b): 局所的に $\alpha \equiv 2\lambda_1$ かつ, ある点 $p \in M$ で $\alpha \neq 2\lambda_2$ が成り立つ。これも場合分け (I_a) と同様あり得ない。

場合分け (I_c): ある点 $p \in M$ で $\alpha \neq 2\lambda_1$ かつ $\alpha \neq 2\lambda_2$ が成り立つ。この場合は, 方程式 (2.3), (2.4), (2.5) , (2.6) より

$$e_1\lambda_1 = e_1\lambda_2 = e_2\lambda_1 = e_2\lambda_2 = 0$$

が, 点 p のある近傍 $\mathcal{U}$ が成り立つことになる。故に, 全ての主曲率 α, λ_1, λ_2 は, 連結実超曲面 M 上それぞれ一定である。よって, 定理 B より M は (A) 型, または (B) 型。しかしながら, 任意の (A) 型等質実超曲面は, $\phi V^0_{\lambda_1} = V^0_{\lambda_2}$ を満たさない。従って, M は (B) 型に限る。

場合分け (II). 仮定より, 任意の $X, Y \in V^0_{\lambda_i}$ に対して $A\nabla_X Y = \lambda_i \nabla_X Y$, よって $(\nabla_X A)Y = (X\lambda_i)Y$ が成り立つ。以後, 我々の議論は2つに分かれる。

場合分け (II_a): $\dim V^0_{\lambda_i} \geqq 2$. この場合は

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = (X\lambda_i)Y - (Y\lambda_i)X \quad \text{for } \forall X, Y \in V^0_{\lambda_i}.$$

が成り立つ。他方, コダッチの方程式より次が分かる。

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = 2\langle \phi X, Y\rangle \xi \quad \text{for } \forall X, Y \in V^0_{\lambda_i}.$$

そこで $V^0_{\lambda_i}$ のベクトル X, Y を一次独立に取ると, これら2つの方程式より $X\lambda_i = Y\lambda_i = \langle \phi X, Y\rangle = (\nabla_X A)Y = 0$ を得る。これより

$$(\nabla_X A)Y = \langle \phi X, Y\rangle = 0 \quad \text{for } \forall X, Y \in V^0_{\lambda_i}. \tag{2.7}$$

となる。故に, 任意の単位ベクトル $X \in V^0_{\lambda_i}$ と任意のベクトル $Z \in TM$ に対して, 方程式 (1.4), (2.7) と A の対称性より

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\nabla_X A)X, Z\rangle = \langle (\nabla_X A)Z, X\rangle \\ &= \langle (\nabla_Z A)X, X\rangle = \langle \nabla_Z(AX) - A\nabla_Z X, X\rangle \\ &= \langle (Z\lambda_i)X + (\lambda_i I - A)\nabla_Z X, X\rangle = Z\lambda_i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

よって λ_i は定数である。

場合分け (II_b): $\dim V^0_{\lambda_i} = 1$. 補題 1 より α は定数であるから, 我々は任意に固定された点 p のある近傍上で $2\lambda_i - \alpha \neq 0$ が成り立つ場合だけを考えればよい。

e を V_{λ_i} 内の単位ベクトルとすると $Ae = \lambda_i e$ が成り立つ。よって, 補題 1 より $A\phi e = \dfrac{\alpha\lambda_i - 2}{2\lambda_i - \alpha}\phi e$ となる。故にある番号 j に対して, $\phi e \in V^0_{\lambda_j}$ かつ $\lambda_j = \dfrac{\alpha\lambda_i - 2}{2\lambda_i - \alpha}$ $(\neq \lambda_i)$ が成立する。この方程式は

$$(2\lambda_j - \alpha)\lambda_i = \alpha\lambda_j - 2. \tag{2.9}$$

と同値である。$2\lambda_j - \alpha \neq 0$ と仮定すれば, $\lambda_i = \dfrac{\alpha\lambda_j - 2}{2\lambda_j - \alpha}$ を得る。よって, $\dim V^0_{\lambda_j} \geqq 2$ の時は, これまでの議論より λ_i が定数であることが分かる。

次に, $2\lambda_j - \alpha = 0$ の場合を考察する。まず, 方程式 (2.9) より $\alpha\lambda_j - 2 = 0$ となる。この連立方程式を解くと $\lambda_j = 1$, $\alpha = 2$ または $\lambda_j = -1$, $\alpha = -2$ を得る。以下, $\lambda_j = 1$ かつ $\alpha = 2$ に限って話を進める。簡単のために $\lambda = \lambda_i$ と置く。よって, $Ae = \lambda e$ $(\lambda \neq 1)$, $A\phi e = \phi e$, $A\xi = 2\xi$, $\nabla_e e = 0$ を仮定する。これから $2\lambda_j - \alpha = 0$ が実際起きないことを示すために幾つかの等式を準備する。当然の事ながら $c > 0$ の場合はこういったことは起きない。コダッチの方程式 (1.4) より次を得る。

$$(\nabla_\xi A)\phi e - (\nabla_{\phi e} A)\xi = e.$$

他方, (1.2) より

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi A)\phi e - (\nabla_{\phi e} A)\xi &= \nabla_\xi(A\phi e) - A\nabla_\xi(\phi e) - \nabla_{\phi e}(A\xi) + A\nabla_{\phi e}\xi \\ &= \nabla_\xi(\phi e) - A\nabla_\xi(\phi e) - 2\nabla_{\phi e}\xi + A\nabla_{\phi e}\xi \\ &= (I - A)\nabla_\xi(\phi e) - 2\phi A\phi e + A\phi A\phi e \\ &= (I - A)\nabla_\xi(\phi e) + (2 - \lambda)e.\end{aligned}$$

となる。これらの方程式とベクトル e との内積を取る。

$$1 = \langle \nabla_\xi(\phi e), (1 - \lambda)e \rangle + 2 - \lambda.$$

$\lambda \neq 1$ であるから, この式は次を意味する。

(2.10) $$\langle \nabla_\xi(\phi e), e \rangle = -1.$$

ここで, 再びコダッチの方程式 (1.4) を使うと次のようになる。

$$(\nabla_e A)\phi e - (\nabla_{\phi e} A)e = 2\xi.$$

他方, (1.2) より

$$\begin{aligned}(\nabla_e A)\phi e - (\nabla_{\phi e} A)e &= \nabla_e(A\phi e) - A\nabla_e(\phi e) - \nabla_{\phi e}(Ae) + A\nabla_{\phi e}e \\ &= \nabla_e(\phi e) - A\nabla_e(\phi e) - (\phi e\lambda)e - \lambda\nabla_{\phi e}e + A\nabla_{\phi e}e \\ &= (\nabla_e\phi)e + \phi\nabla_e e - A\{(\nabla_e\phi)e + \phi\nabla_e e\} \\ &\quad - (\phi e\lambda)e + (A - \lambda I)\nabla_{\phi e}e \\ &= -\lambda\xi + \lambda A\xi - (\phi e\lambda)e + (A - \lambda I)\nabla_{\phi e}e \\ &= \lambda\xi - (\phi e\lambda)e + (A - \lambda I)\nabla_{\phi e}e.\end{aligned}$$

が分かる。これらの方程式と $\lambda \neq 1$, $\langle \nabla_{\phi e}e, e \rangle = 0$ を組み合わせると $\nabla_{\phi e}e = \langle \nabla_{\phi e}e, \xi \rangle \xi$ となるから

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi e}e &= -\langle e, \nabla_{\phi e}\xi \rangle \xi \\ &= -\langle e, \phi A\phi e \rangle \xi \\ &= -\langle e, \phi^2 e \rangle \xi = \xi.\end{aligned}$$

が確かめられる。故に

(2.11) $$\nabla_{\phi e}e = \xi.$$

(1.2), (2.11) より

(2.12) $$\nabla_{\phi e}(\phi e) = 0.$$

また次も成り立っている。

(2.13) $$\nabla_e(\phi e) = -\lambda\xi.$$

実際次のようになる。

$$\begin{aligned}\nabla_e(\phi e) &= (\nabla_e\phi)e + \phi\nabla_e e \\ &= \eta(e)Ae - \langle Ae, e \rangle \xi \\ &= -\lambda\xi.\end{aligned}$$

これらの方程式 (1.2), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) を使うと $\mathbb{C}H^n(-4)$ 内の実超曲面 M の曲率テンソル R に対して, $\langle R(e,\phi e)\phi e, e\rangle$ は次の形になる。

$$\begin{aligned} R(e,\phi e)\phi e &= \nabla_e \nabla_{\phi e}(\phi e) - \nabla_{\phi e}\nabla_e(\phi e) - \nabla_{[e,\phi e]}(\phi e) \\ &= \nabla_{\phi e}(\lambda\xi) - \nabla_{-\lambda\xi-\xi}(\phi e) \\ &= (\phi e\lambda)\xi + \lambda\phi A\phi e + (\lambda+1)\nabla_\xi(\phi e) \\ &= (\phi e\lambda)\xi - \lambda e + (\lambda+1)\nabla_\xi(\phi e). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \langle R(e,\phi e)\phi e, e\rangle &= -\lambda + (\lambda+1)\langle \nabla_\xi(\phi e), e\rangle \\ &= -2\lambda - 1. \end{aligned}$$

他方, ガウスの方程式 (1.3) より

$$\begin{aligned} \langle R(e,\phi e)\phi e, e\rangle &= -4 + \langle A\phi e, \phi e\rangle\langle Ae, e\rangle \\ &= -4 + \lambda. \end{aligned}$$

故に $\lambda = 1$ となり矛盾を得る。従って, 場合分け (II_b) は $\dim V^0_{\lambda_i} = \dim V^0_{\lambda_j} = 1$ の場合に帰着される。

$\mathfrak{T} = \{\xi, e, \phi e\}_{\mathbb{R}}$ と置く。ここで, $Ae = \lambda e$, $A\phi e = \dfrac{\alpha\lambda - 2}{2\lambda - \alpha}\phi e$. また, 簡単のために $\mu = \dfrac{\alpha\lambda - 2}{2\lambda - \alpha}$. なお $\lambda \neq \mu$ であることに注意しよう。これから $\mathfrak{T}$ が可積分で, その任意の葉体 T が $\mathbb{C}H^n(-4)$ 内の実超曲面 M の全測地部分多様体であることを示そう。まず, $\nabla_e e = \nabla_{\phi e}(\phi e) = 0$ となる。また同様にして, $\nabla_\xi\xi$, $\nabla_e\xi$, $\nabla_{\phi e}\xi$, $\nabla_e(\phi e) \in \mathfrak{T}$ も導くことができる。次に $\nabla_\xi e \in \mathfrak{T}$ を示す。そこでまず, 次に注意する。

$$\begin{aligned} (\nabla_\xi A)e - (\nabla_e A)\xi &= \nabla_\xi(Ae) - A\nabla_\xi e - \nabla_e(A\xi) + A\nabla_e\xi \\ &= (\xi\lambda)e + (\lambda I - A)\nabla_\xi e - \alpha\lambda\phi e + \lambda\mu\phi e. \end{aligned}$$

他方, コダッチの方程式 (1.4) より

$$(\nabla_\xi A)e - (\nabla_e A)\xi = -\phi e.$$

よって,

$$(\lambda I - A)\nabla_\xi e = -\{\lambda(\mu - \alpha) + 1\}\phi e.$$

が分かる。これと ∇_ξ が V_λ に直交する事を組み合わせると $\nabla_\xi e \in \{\phi e\}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{T}$ を得る。同様にして $\nabla_\xi(\phi e) \in \mathfrak{T}$ となる。次に $\nabla_{\phi e} e \in \mathfrak{T}$ を示そう。$Ae = \lambda e$, $A\phi e = \mu\phi e$ より

$$(\nabla_e A)\phi e - (\nabla_{\phi e}A)e = (e\mu)\phi e + (\mu I - A)\nabla_e(\phi e) - (\phi e\lambda)e - (\lambda I - A)\nabla_{\phi e}e.$$

が分かる。そこで, (1.2) と $\nabla_e e = 0$ より

$$(\mu I - A)\nabla_e(\phi e) = -\lambda(\mu - \alpha)\xi.$$

となる。更に, コダッチの方程式 (1.4) より

$$(\nabla_e A)\phi e - (\nabla_{\phi e}A)e = 2\xi.$$

を得る。これら 3 つの方程式より

$$2\xi = (e\mu)\phi e - \lambda(\mu - \alpha)\xi - (\phi e\lambda)e - (\lambda I - A)\nabla_{\phi e}e$$

となるから $\nabla_{\phi e}e \in \{\xi, \phi e\}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{T}$ が分かる。従って, $\mathfrak{T}$ は可積分であり, その任意の葉体 T は M 内の全測地的部分多様体になる。

次に $\mathbb{C}H^n(-4)$ 内の分布 $\mathfrak{L} = \{e, \phi e, \xi, \mathcal{N}\}$ を考察する。これまでと同様な計算で $\widetilde{\nabla}_X Y \in \mathfrak{L}$ for $\forall X, Y \in \mathfrak{L}$ が導ける。これは, 分布 $\mathfrak{L}$ が可積分でしかもその任意の葉体 L は $\mathbb{C}H^n(-4)$ 内の2次元全測地的部分多様体 $\mathbb{C}H^2(-4)$ であることを示している。故に, 分布 $\mathfrak{T}$ の任意の葉体 T は, 全測地的 $\mathbb{C}H^2(-4)$ 内の実超曲面になっていることが分かる。故に, 場合分け (I) の議論から λ は L 上局所的に一定となるから, $(\nabla_e A)e = 0$ が L 上成り立つ。これと, (2.8) における計算を組み合わせると, 任意の $Z \in TM$ に対して $Z\lambda = 0$ が M 成立する。

従って, 場合分け (II) の議論と定理 A, B, C より, この命題の仮定を満たす実超曲面は B 型に限る。 □

命題 2 より次を得る。

定理 1. $\mathbb{C}H^n(c)$, $n \geqq 2$ 内の実超曲面 M が主曲率2種の (B) 型等質実超曲面 (即ち, M は $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の全実全測地的部分多様体 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ 上の半径 $r = (1/\sqrt{|c|}\,) \cdot \log_e(2+\sqrt{3}\,)$ を芯とするチューブ) であるための必要十分条件は, M が次の2条件を満たすことである。

(1) M の正則分布 $T^0M = \{X \in TM | \ X \perp \xi\}$ は, T^0M に制限された主分布 $V^0_{\lambda_i} = \{X \in T^0M | \ AX = \lambda_i X\}$ の直和に分解される。その上, 各制限された主分布 $V^0_{\lambda_i}$ は可積分であり, その任意の葉体は与えられた実超曲面 M 内の全測地的部分多様体である。

(2) M 上のある点 p とある正数 k に対して, 次の2条件を満たす M 上の2本の測地線 $\gamma_i = \gamma_i(s)\,(i = 1, 2)$ が存在する。

(a) $p = \gamma_i(0)$, $\langle \dot{\gamma}_i(0), \xi_p \rangle = 0 \ (i = 1, 2)$.

(b) 2本の曲線 $\gamma_i\,(i = 1, 2)$ は, それぞれ $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の曲率 k と $3k$ の円である。

(証明) M を主曲率 $\lambda_1 = (\sqrt{|c|}/2) \cdot \coth(\sqrt{|c|}\,r/2)$, $\lambda_2 = (\sqrt{|c|}/2)\tanh(\sqrt{|c|}\,r/2)$, $\alpha = \sqrt{|c|}\tanh(\sqrt{|c|}\,r)$ を持つ $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の (B) 型等質実超曲面とする。そうすると命題2の証明における議論より, 制限された主分布 $V^0_{\lambda_1}$, $V^0_{\lambda_2}$ におけるそれぞれの任意の葉体 T_{λ_1}, T_{λ_2} は, 実超曲面 M において全測地的である。しかも, この葉体は $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の実 n 次元全実全測地的部分多様体 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ において全測地的ではないが, それぞれ定断面曲率 k_1, k_2 を持つ全せい的な超曲面になっている。なおここで, k_1, k_2 は $\sqrt{k_1 - (c/4)} = \lambda_1$, $\sqrt{k_2 - (c/4)} = \lambda_2$ を満たす。よって, M 上のそれぞれの初期ベクトルに関する条件 $\dot{\gamma}(0) \in V^0_{\lambda_1}$, $\dot{\gamma}(0) \in V^0_{\lambda_2}$ を満たす任意の測地線 $\gamma = \gamma(s)$ は, $\mathbb{C}H^n(c)$ において, それぞれ曲率 λ_1, λ_2 の円になっている。

他方, 言うまでもなく $\lambda_1 > \lambda_2 (> 0)$ が成り立つ。そこで $\lambda_1 = 3\lambda_2$ と置いてこの方程式を解くと $r = (1/\sqrt{|c|})\log_e(2+\sqrt{3})$ を得る。この場合, $\lambda_1 = \alpha = \sqrt{3|c|}/2$, $\lambda_2 = \sqrt{|c|}/(2\sqrt{3})$ となっている。

この証明の最後に次の事を思い出す。リーマン空間 $\widetilde{M}^{n+1}$ に等長にはめ込まれた超曲面 M^n 上に測地線 $\gamma = \gamma(s)$ を取る。曲線 γ が外側の空間 $\widetilde{M}^{n+1}$ において曲率 $k(>0)$ の円と仮定する。このとき M^n の $\widetilde{M}^{n+1}$ における shape operator A は, 任意の s に対して $A\dot{\gamma}(s) = k\dot{\gamma}(s)$ かまたは, 任意の s に対して $A\dot{\gamma}(s) = -k\dot{\gamma}(s)$ ((1.1) を参照)。

故にこれらの3つの事実より半径 r のチューブの (B) 型が, 条件 (2) を満たす必要十分条件は, $r = (1/\sqrt{|c|})\log_e(2+\sqrt{3})$ であることになる。 □

次の命題は, 定理 1 を支えている命題 2 に密接に関連している ([6, 19] を参照)。

命題 3. $\mathbb{C}P^n(c)\,(n \geqq 3)$ 内の実超曲面 M で次の4条件を満たすものが存在する。

(1) M の正則分布 $T^0M = \{X \in TM | X \perp \xi\}$ は, T^0M に制限された主分布 $V^0_{\lambda_i} = \{X \in T^0M | AX = \lambda_i X\}$ の直和に分解される。
(2) M の各制限された主分布 $V^0_{\lambda_i}$ は可積分である。
(3) M のある制限された主分布 $V^0_{\lambda_i}$ のある葉体で M において全測地的でないものが存在する。
(4) M のある主曲率で M 上局所的に一定でないものが存在する。

(証明の概要) 一般性を損なうことなく $c = 4$ とする。ホップ写像 $\pi : S^{2n+1}(1)(= \{z \in \mathbb{C}^{n+1} | \|z\| = 1\}) \to \mathbb{C}P^n(4)$ を取る。以後簡単のために $S^{2n+1}(1) = S^{2n+1}$, $\mathbb{C}P^n(4) = \mathbb{C}P^n$ とする。$T'_z = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} | \langle x, z\rangle = \langle x, iz\rangle = 0\}$ と置く。ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は, $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の通常のユークリッド内積を表す。即ち, T'_z は接空間 $T_z(S^{2n+1})$ のホップ写像 π に関する水平部分空間である。T'_z はホップ写像 π の構造群 S^1 の作用に関して不変であるから, π は線形同型写像 $\pi_* : T'_z \to T_{[z]}\mathbb{C}P^n$ for $\forall z \in S^{2n+1}$ を引き起こす。また $[z] = \pi(z)$ としている。

$$f_{a,k}(z) = z_0^2 + \ldots + z_k^2 + a(z_{k+1}^2 + \ldots + z_n^2),\quad z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \tag{2.14}$$

ここで $k \geqq 1$, $n - k \geqq 2$ であり, $a(\neq 1)$ は正数。そこで $\mathbb{C}P^n$ 内の次のように定義された(特異点を持った)複素超曲面

$$V^{n-1}_{a,k} = \{[z] = [z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{C}P^n | f_{a,k}(z) = 0\}$$

を取る。点 $[z] \in V^{n-1}_{a,k}$ における接空間 $T_{[z]}V^{n-1}_{a,k}$ は, 次の集合と同一視できる。

$$T_z = \left\{x \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \langle x, z\rangle = \langle x, iz\rangle = \left\langle x, \frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\rangle = \left\langle x, i\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\rangle = 0\right\}. \tag{2.15}$$

ベクトル場 $\mathcal{N} := \frac{\partial f_{a,k}}{\partial z} \Big/ \left(2\left\|\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\|\right)$ は, $V^{n-1}_{a,k}$ の $\mathbb{C}P^n$ における単位法ベクトル場になっている。$\forall X \in T_{[z]}V^{n-1}_{a,k}$ に対して, 点 $[z] \in V^{n-1}_{a,k}$ における $\mathcal{N}$ 方向の shape operator $A_{\mathcal{N}}$ は次のように表せる([19] を参照)。

$$A_{\mathcal{N}}(X) = -\frac{1}{2\left\|\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\|}\overline{X}\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{a,k}}{\partial z_i z_j}}\right) + \zeta\overline{\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}}. \tag{2.16}$$

ここで $\overline{w}$ は w の複素共役, $\|\ \|$ はユークリッドノルムを表し, ベクトル場 ζ は次のように定義される。

$$\zeta = \frac{1}{2\left\|\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\|^3}\overline{X}\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{a,k}}{\partial z_i z_j}}\right)\left(\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right)^T. \tag{2.17}$$

そこで $V^{n-1}_{a,k}$ の次のように定義される稠密開集合 U を取る。

$$U = \left\{[z_0, \ldots, z_n] \in V^{n-1}_{a,k} \middle| \sum_{j=0}^{k} \|z_j\| \neq 0 \text{ and } \sum_{i=k+1}^{n} \|z_i\| \neq 0\right\}.$$

この U 上に点 p を取る。一般性を損なうことなく点 p の斉次座標は, $\mathbb{C}P^n$ の適当な正則等長変換によって, $[z_0, 0, \ldots, 0, z_n]$ としてよい。ただし, z_0, $z_n \neq 0$ とする。直接計算により次の2つを得る。

$$T_{[z]_p}V^{n-1}_{a,k} = \{(0, v_1, \ldots, v_{n-1}, 0) | v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{C}\}. \tag{2.18}$$

$$(2.19) \qquad \left(\frac{\partial^2 f_{a,k}}{\partial z_i \partial z_j}\right)_p = 2\begin{pmatrix} I_{k+1} & 0 \\ 0 & aI_{n-k} \end{pmatrix}.$$

(2.16), (2.18), (2.19) より $\zeta = 0$ となり, 更に

$$(2.20) \qquad A_{\mathcal{N}}(V) = -\frac{1}{\left\|\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\|}(0, \overline{v_1}, \ldots, \overline{v}_k, a\overline{v}_{k+1}, \ldots, a\overline{v}_{n-1}, 0)$$

を得る。ここで $V = (0, v_1, \ldots, v_{n-1}, 0) \in T_{[z]_p}V_{a,k}^{n-1}$ である。(2.20) より $A_{\mathcal{N}}$ は4つの固有値 $-\left\|\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\|^{-1}, \left\|\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\|^{-1}, -a\left\|\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\|^{-1}, a\left\|\frac{\partial f_{a,k}}{\partial z}\right\|^{-1}$ を持ち, それらの重複度はそれぞれ $k, k, n-k-1, n-k-1$ となっている。更に議論を進めて行くと任意の単位法ベクトル ς に対して, shape operator A_ς の固有値やその重複度は, $A_{\mathcal{N}}$ のそれらと全く一致していることが分かる。

$k \geqq 1$, $n-k \geqq 2$ であるから, これまでの議論より集合 U は4つの異なる主曲率を持ち, しかも次の２つが成り立つ。

(1) U の任意の単位法ベクトル ς に付随する shape operator A_ς の任意の主曲率は零でない。

(2) U の任意の単位法ベクトル ς に付随する shape operator A_ς の任意の主曲率の重複度は一定である。

そこで $\mathbb{C}P^n$ 内の U を芯とする半径 $r(>0)$ が十分小さいチューブ M を取るとこれは, $\mathbb{C}P^n$ において高々５種の主曲率を持つ実超曲面になる。その上 M の正則分布 T^0M は, この命題の (1), (2) を満たす（[7] を参照）。しかも 命題 2 より M はこの命題の (3), (4) も満たすことが分かる。 □

3. 複素空間形内の線織実超曲面及び定理２

本節では, $\widetilde{M} = M_n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の線織 (ruled) 実超曲面を考察する。良く知られているように $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の任意の線織実超曲面は, 多様体として完備ではないから, 勿論非等質である。この事実は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の線織実超曲面は, 問題 2 の観点のみからしか考察することができないことを意味している。他方, $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の等質線織実超曲面は, （ただ一つであるが）存在する (定理 D を参照)。また言うまでもなく $\mathbb{C}H^n(c)$ でも非等質線織実超曲面も（大量に）存在する。よって, 問題 1, 2 両方の観点から我々は $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の線織実超曲面を研究できる訳である。

$\widetilde{M} = M_n(c)$ $(n \geqq 2, c \neq 0)$ 内の実超曲面 M が 線織実超曲面 であるとは, 正則分布 $T^0M = \bigcup_{x\in M}\{v \in T_xM \mid v \perp \xi_x\}$ が可積分で, しかもその任意の葉体が外側の空間 $\widetilde{M} = M_n(c)$ 内の全測地的複素超曲面 $M_{n-1}(c)$ と ($\widetilde{M}$ の等長変換群 $\mathrm{I}(\widetilde{\mathrm{M}})$ に関して) 局所的に合同であるときを言う。

$\widetilde{M}$ 内の任意の線織実超曲面は次のように構成される。まず, 正則曲線 $\gamma : I(\subset \mathbb{R}) \to M_n(c)$ を考える。次に任意の点 $\gamma(s)$ $(s \in I)$ において, この点を通る全測地的複素超曲面 $M_s(:= M_{n-1}(c))$ を張り付ける。ただし, この全測地的複素超曲面 M_s は, 点 $\gamma(s)$ を通る複素直線 $\{\dot{\gamma}(s), J\dot{\gamma}(s)\}$ と直交するように取る。そこで $M := \bigcup_{s\in I} M_s$ と定義すると求める線織実超曲面が得られる。

$\widetilde{M} = M_n(c)$ 内の線織実超曲面は shape operator を使って, 次のように特徴付けられる ([13] の命題 2 および [17] を参照)。

補題 2. $\widetilde{M}=M_n(c)$ $(n \geqq 2,\, c \neq 0)$ 内の実超曲面 M に関する次の条件は互いに同値である。

(1) M は線織実超曲面である。

(2) M の *shape operator* A は $\langle Av, w\rangle = 0$ を満たす。ここで, $v, w(\in T_xM)$ は, 特性ベクトル ξ_x に直交する任意のベクトルで, x は M 上の任意の点である。

(3) $\mu=\langle A\xi,\xi\rangle$, $\nu=\|A\xi-\mu\xi\|$ で定義される M 上の可微分関数 μ, ν は次の二条件を満たす。

i) 集合 $M_1=\{x\in M \mid \nu(x)\neq 0\}$ は, M 上の稠密開集合である。

ii) M_1 上で ξ と直交する単位ベクトル場を U とするとき, M の *shape operator* A は M_1 上で次を満たす。

$$A\xi=\mu\xi+\nu U, \qquad AU=\nu\xi, \quad Av=0. \tag{3.1}$$

ここで, $v(\in T_xM)$ は ξ_x と U_x 両方に直交する任意のベクトルである。

注意 2. 線織実超曲面は, その構成法からも分かるように大抵の場合には特異点を持つので, 大域的には多様体になっていない。よって, 一般的に線織実超曲面は局所的に取り扱うことにする。その上, 線織実超曲面の 各点 において特性ベクトルは, 主曲率ベクトルではないとする。即ち, 線織実超曲面 M を考察するときは, $M_1\big(:=\{x\in M \mid \nu(x)\neq 0\}\big)$ は M と一致する (要するに, 特性ベクトルが主曲率ベクトルとなっている集合は測度ゼロであるが, これを除いて考える) として我々はこれから議論する。

(3.1) は, 線織実超曲面上の関数 ν に強い縛りを与えていることが次の補題より分かる。

補題 3 (c.f. [9])**.** $\widetilde{M}=M_n(c)$ 内の線織実超曲面 M 上のベクトル場 ϕU の各積分曲線は, M 上の測地線になる。しかも M 上の関数 $\nu(:=\|A\xi-\langle A\xi,\xi\rangle\xi\|)$ は, その測地線 $\rho=\rho(s)$ において次のように表される。$c>0$ のとき,

$$\nu\big(\rho(s)\big)=(\sqrt{c}/2)\tan\big(\sqrt{c}(s+a)/2\big).$$

$c<0$ のときは,

$$\nu\big(\rho(s)\big)=-(\sqrt{|c|}/2)\tanh\big(\sqrt{|c|}(s+a)/2\big) \quad \text{又は} \quad \nu\big(\rho(s)\big)=\sqrt{|c|}/2.$$

ここで, a はある定数である。よって特に $c>0$ のときの関数 ν の表示式より, 複素射影空間内の任意の線織実超曲面は完備でないことが分かる。

(証明) コダッチの方程式 (1.4) より $(\nabla_\xi A)\phi U-(\nabla_{\phi U}A)\xi=-(c/4)U$ が成り立つ。一方, (1.2), (3.1) を使うと $(\nabla_\xi A)\phi U-(\nabla_{\phi U}A)\xi$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi A)\phi U-(\nabla_{\phi U}A)\xi &= \nabla_\xi(A\phi U)-A\nabla_\xi(\phi U)-\nabla_{\phi U}(A\xi)+A\nabla_{\phi U}\xi\\ &= -A\big((\nabla_\xi\phi)U+\phi\nabla_\xi U\big)-\nabla_{\phi U}(\mu\xi+\nu U)\\ &= -A\big(\eta(U)A\xi-\langle A\xi,U\rangle\xi+\phi\nabla_\xi U\big)-(\phi U\mu)\xi\\ &\qquad -\mu\nabla_{\phi U}\xi-(\phi U\nu)U-\nu\nabla_{\phi U}U\\ &= \nu(\mu\xi+\nu U)-A\phi\nabla_\xi U-(\phi U\mu)\xi-(\phi U\nu)U-\nu\nabla_{\phi U}U.\end{aligned}$$

よって次を得る。

$$\nu\mu\xi+\Big(\nu^2+\frac{c}{4}\Big)U-A\phi\nabla_\xi U-(\phi U\mu)\xi-(\phi U\nu)U-\nu\nabla_{\phi U}U=0. \tag{3.2}$$

そこでこの等式の両辺と U との内積を取ると関数 ν は $\phi U\nu = \nu^2 + (c/4)$ を満たす。この微分方程式を解くことにより ν は, ベクトル場 ϕU の各積分曲線上でこの補題の形をしていることが分かる。

また (3.2) と $X(\perp \xi, U)$ の内積を取ることにより $\langle \nabla_{\phi U} U, X\rangle = 0$. これと $\langle \nabla_{\phi U} U, U\rangle = \langle \nabla_{\phi U} U, \xi\rangle = 0$ を組み合わせれば, $(\nabla_X \phi)Y = \eta(Y)AX - \langle AX, Y\rangle\xi$ を使って $\nabla_{\phi U}\phi U = 0$ を得る。 □

これから, $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の極小等質線織実超曲面の構成法を復習する (参照 [10])。まず, $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の定曲率 $c/4$ の全実全測地的実双曲型平面 $\mathbb{R}H^2(c/4)$ 上にホロサイクル（即ち, $\mathbb{R}H^2(c/4)$ 上の曲率 $\sqrt{|c|}/2$ の円）γ を取る。この曲線 γ は次の (弧長 s に関する) 連立線形常微分方程式を満たしている。$\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma = (\sqrt{|c|}/2)Y_s$, $\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}Y_s = -(\sqrt{|c|}/2)\dot\gamma$. ここで, $\widetilde{\nabla}$ は ambient space $\mathbb{C}H^n(c)$ のリーマン接続（よって, 自動的に全測地的 $\mathbb{R}H^2(c/4)$ のリーマン接続）であり, Y_s は曲線 γ の単位主法線ベクトル場である。しかもこのベクトル場 Y_s は $\dot\gamma(s)$ 方向の複素直線と直交している。円 γ は非有界曲線であり, しかも ($\mathbb{C}H^n(c)$ 内の) ホロ球面上に乗っている (例えば, [2], [5] を参照)。この円 γ 上に全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ を前述の如く順次張り合わせて作った線織実超曲面が求める等質実超曲面 S である。この線織実超曲面 S は, 全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}$ の等長変換群 $\mathrm{I}(\mathbb{C}H^{n-1}(c))$ と（前述のホロサイクル γ を作る等長変換群 $\mathrm{I}(\mathbb{C}H^n(c))$ の）一径数部分群 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の直積で定義される（$\mathrm{I}(\mathbb{C}H^n(c))$ の）部分群の軌道になっていることが, S の構成法と論文 [2] から分かる。S が極小 (minimal) であることは, 定理 1 の証明の中で示そう。

この超曲面を shape operator A を使って次のように特徴付けることができる。

補題 4 ([4], [10]). $\mathbb{C}H^n(c)$ $(n \geqq 2)$ 内の線織実超曲面 M が $\mathbb{C}H^n(c)$ において極小等質であるための必要十分条件は, M の $\mathbb{C}H^n(c)$ における *shape operator* A が次を満たしていることである。

$$A\xi = (\sqrt{|c|}/2)U, \quad AU = (\sqrt{|c|}/2)\xi, \quad AX = 0. \tag{3.3}$$

ここで, X は ξ, U 両方に直交している M 上の任意のベクトル場である。

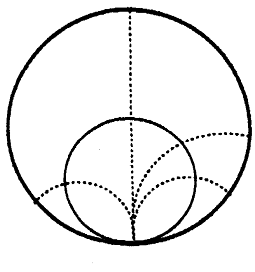

FIGURE 1. $\mathbb{C}H^n(c)$ における極小等質線織実超曲面のイメージ

この図において, 破線が $\mathbb{R}H^2(c/4)$ 上の測地線であり, 実線が $\mathbb{R}H^2(c/4)$ 上のホロサイクルである。即ち, この実線で表されている円は, 単に無限遠点を共通に一点持っているというだけでなく, 破線で表される測地線と交差するときは, 必ず直交していることに注意されたい。

次の定理が本節における主定理である。

定理 2. $\mathbb{C}H^n(c)$ $(n \geqq 2)$ 内の実超曲面 M が極小等質線織実超曲面 S であるための必要十分条件は, M が次の 3 条件を満たすことである。

i) M 上の各点 x において，特性ベクトル ξ_x と直交する正規直交系 $v_1,\ldots,v_{2n-2}(\in T_xM)$ で次の条件を満たすものが存在する。点 $\gamma_{ij,x}(0)=x$ を通り，v_i+v_j $(1\leqq i\leqq j\leqq 2n-2)$ 方向の M 上の測地線 $\gamma_{ij,x}$ が，外側の空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の測地線でもある。

ii) M 上の各点 x において，点 $\gamma_x(0)=x$ を通る特性ベクトル場 ξ の積分曲線 γ_x は，局所的に $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の定曲率 $c/4$ の全実全測地的実双曲型平面 $\mathbb{R}H^2(c/4)$ 上に乗っている。

iii) ii) の曲線 γ_x の曲率関数 $\kappa_x=\|\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma_x}\dot\gamma_x\|$ は，γ_x の取り方に依存しない。ここで，$\widetilde{\nabla}$ は外側の空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ のリーマン接続である。このことは次の事を意味する。ii) の任意の曲線 γ_x,γ_y に対して，それらの曲率関数 $\kappa_x(s)$ と $\kappa_y(s)$ は，次の等式を満たす。$\kappa_x(s)=\kappa_y(s+s_0)$, $-\infty<\forall s<\infty$. ここで，s_0 は（点 $x,y\in M$ に依存した）適当な定数である。

（証明）まず，条件 i) が $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の実超曲面 M が，線織実超曲面になるための必要十分条件であることを示そう。条件 i) を仮定すれば $\langle Av_i,v_j\rangle=0$ $(1\leqq i\leqq j\leqq 2n-2)$ が成り立つ。これは補題 2 の条件 (2) を意味するから M は線織実超曲面になる。逆に任意の線織実超曲面 M は，条件 i) を満たすことを示そう。まず，M の任意の点 x と特性ベクトル ξ_x と直交する任意の単位接ベクトル $v(\in T_xM)$ に対して，初期条件: $\gamma(0)=x$, $\dot\gamma(0)=v$ を満たす M 上の測地線 $\gamma=\gamma(s)$ を取る。一方，点 x を通る T^0M の葉体 (leaf) $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ を考える。勿論，$v\in T_x(\mathbb{C}H^{n-1}(c))$ となっている。そこで，この全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ 上の測地線 $\gamma_1=\gamma_1(s)$ で，前述の測地線 γ と同じ初期条件: $\gamma_1(0)=\gamma(0)$, $\dot\gamma_1(0)=\dot\gamma(0)$ を満たすものを考察する。当然この曲線 γ_1 は，外側の空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の測地線であるから，線織実超曲面 M 上の測地線にもなっている。よって，測地線に関する一意性定理より 2 つの曲線 γ, γ_1 は，局所的に一致する。従って，最初に考えた M 上の測地線 γ は，外側の空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の測地線になっている。ベクトル v は ξ_x と直交する任意の接ベクトルであったから，任意の線織実超曲面 M に対して，条件 i) を満たす正規直交系 $v_1,\ldots,v_{2n-2}(\in T_xM)$ は，当然取れる訳である。

今後，M は線織実超曲面の前提の元で議論を進める。次に，条件 ii), iii) を考える。極小等質線織実超曲面 S が条件 ii), iii) を満たすことは，S の構成法から明らか。そこで $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の線織実超曲面 M が，条件 ii) を満たせば，極小になることを示そう。(1.1), (1.2), (3.1) より

$$\widetilde{\nabla}_\xi\xi=\nabla_\xi\xi+\langle A\xi,\xi\rangle\mathcal{N}=\phi A\xi+\mu\mathcal{N}=\nu\phi U+\mu\mathcal{N}$$

を得る。一方，条件 ii) より $\langle\widetilde{\nabla}_\xi\xi,\mathcal{N}\rangle=\langle\widetilde{\nabla}_\xi\xi,J\xi\rangle=0$ となる。よって，M 上恒等的に $\mu=0$ 即ち，極小となりしかも $\widetilde{\nabla}_\xi\xi=\nu(\phi U)$ を得る。次に ν を計算してみよう。(1.1), (1.2), (3.1) より次を得る。

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_\xi(\phi U)&=\nabla_\xi(\phi U)+\langle A\xi,\phi U\rangle\mathcal{N}=(\nabla_\xi\phi)U+\phi(\nabla_\xi U)\\&=\eta(U)A\xi-\langle A\xi,U\rangle\xi+\phi(\nabla_\xi U)=-\nu\xi+\phi(\nabla_\xi U).\end{aligned}\tag{3.4}$$

ここで $\nabla_\xi U=0$ を確かめよう。まず (1.2), (3.1) と $\langle\xi,U\rangle=0$, $\langle U,U\rangle=1$ より $\langle\nabla_\xi U,\xi\rangle=0=\langle\nabla_\xi U,U\rangle$ は明らか。よって，後は任意の $X(\perp\xi,U)$ に対して $\langle\nabla_\xi U,X\rangle=0$ を示せばよい。そのようなベクトル X を取ると任意の $Y(\perp\xi)$ に対して，(1.4) より

$$(\nabla_\xi A)Y-(\nabla_Y A)\xi=(c/4)\phi Y.\tag{3.5}$$

となる。一方, (1.2), (3.1) より

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi A)X - (\nabla_X A)\xi &= \nabla_\xi(AX) - A\nabla_\xi X - \nabla_X(A\xi) + A\nabla_X\xi \\ &= -A\nabla_\xi X - \nabla_X(\nu U) + A\phi AX \\ &= -A\nabla_\xi X - (X\nu)U - \nu\nabla_X U.\end{aligned}$$

これと (3.5) を組み合わせると

$$A\nabla_\xi X + (X\nu)U + \nu\nabla_X U + (c/4)\phi X = 0. \tag{3.6}$$

この方程式の両辺と ξ との内積を取ると (3.1) と $\nu \neq 0$ より $\langle \nabla_\xi X, U\rangle + \langle \nabla_X U, \xi\rangle = 0$ となる。一方, (1.2) と (3.1) より

$$\langle \nabla_X U, \xi\rangle = -\langle U, \nabla_X \xi\rangle = -\langle U, \phi AX\rangle = 0.$$

よって, これらの方程式より $\langle \nabla_\xi X, U\rangle = 0$ となるから $\langle \nabla_\xi U, X\rangle = 0$ が分かる。故に $\nabla_\xi U = 0$ となる。そこで (3.4) を使うと $\widetilde{\nabla}_\xi(\phi U) = -\nu\xi$ が得られる。

次に $\xi\nu = 0$ を示そう。(1.2), (3.1), (1.4) と $\nabla_\xi U = 0$ より

$$\begin{aligned}(c/4)\phi U &= (\nabla_\xi A)U - (\nabla_U A)\xi \\ &= \nabla_\xi(AU) - A\nabla_\xi U - \nabla_U(A\xi) + A\nabla_U\xi \\ &= \nabla_\xi(\nu\xi) - \nabla_U(\nu U) + A\phi AU \\ &= (\xi\nu)\xi + \nu(\phi A\xi) - (U\nu)U - \nu\nabla_U U.\end{aligned}$$

となる。この方程式の両辺と ξ との内積を取ると $\xi\nu - \nu\langle \nabla_U U, \xi\rangle = 0$ となるから

$$\xi\nu = \nu\langle \nabla_U U, \xi\rangle = -\nu\langle U, \nabla_U\xi\rangle = -\nu\langle U, \phi AU\rangle = -\nu^2\langle U, \phi\xi\rangle = 0.$$

以上の計算より $\widetilde{\nabla}_\xi\xi = \nu(\phi U)$, $\widetilde{\nabla}_\xi(\phi U) = -\nu\xi$ と $\xi\nu = 0$ が得られた訳であるから, 特性ベクトル場 ξ の任意の積分曲線は外側の空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の曲率 $|\nu|(>0)$ の円になる。これと仮定の３番目の条件を組み合わせると ν は M 上の定数値関数になる。そこで, (3.6) において $X = \phi U$ と置くと $A\nabla_\xi(\phi U) + \nu\nabla_{\phi U}U - (c/4)U = 0$ となる。この方程式の両辺と U との内積を取ると (1.2), (3.1) と $\nabla_\xi U = 0$ より

$$\begin{aligned}c/4 &= \langle A\nabla_\xi(\phi U), U\rangle = \nu\langle \nabla_\xi(\phi U), \xi\rangle = \nu\langle (\nabla_\xi\phi)U + \phi\nabla_\xi U, \xi\rangle \\ &= \nu\langle -\langle A\xi, U\rangle\xi, \xi\rangle = -\nu^2\end{aligned}$$

となるから $\nu(>0)$ は $\nu = \sqrt{|c|}/2$ と表される。よって, 実超曲面 M の shape operator は (3.3) を満たすので, M は等質極小線織実超曲面であると結論付けられる。 □

4. 複素空間形内の極小線織実超曲面の特徴付け

定理１の証明から分かるようにこの定理から幾つかの定理や命題が系として得られる。定理１は外側の空間が $\mathbb{C}P^n(c)$ の場合は成り立たない結果であるが, 定理１の条件 iii) を外すと $\widetilde{M} = M_n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の極小線織実超曲面を特徴付ける次の定理を得る。

定理 3. $\widetilde{M} = M_n(c)$ $(n \geqq 2, c \neq 0)$ 内の実超曲面 M が極小線織実超曲面であるための必要十分条件は, M が次の２条件を満たすことである。

i) M 上の各点 x において，特性ベクトル ξ_x と直交する正規直交系 $v_1,\ldots,v_{2n-2}(\in T_xM)$ で次の条件を満たすものが存在する。点 $\gamma_{ij,x}(0)=x$ を通り，v_i+v_j $(1\leqq i\leqq j\leqq 2n-2)$ 方向の M 上の測地線 $\gamma_{ij,x}$ が，外側の空間 $\widetilde{M}$ 内の測地線でもある。

ii) M 上の各点 x において，点 $\gamma_x(0)=x$ を通る特性ベクトル場 ξ の積分曲線 γ_x は，局所的に $\widetilde{M}$ 内の定曲率 $c/4$ の 2 次元全実全測地的実空間形 $\mathbb{R}M^2(c/4)$ 上に乗っている。

注意 3. (1) 定理2は大量の非等質極小線織実超曲面を例として含んでいる。実際，$M_n(c)$ 内の定曲率 $c/4$ の 2 次元全実全測地的実空間形 $\mathbb{R}M^2(c/4)$ 上に勝手な円 γ を取り，γ 上に直角に全測地的複素超曲面 $M_{n-1}(c)$ を foliate して線織実超曲面を構成すれば，これが定理2の例になっている。Kimura([9]) によって構成された $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の極小線織実超曲面もこうやって作られている。逆に定理2の例はこのようにして構成した線織実超曲面に限ることが，定理1の証明から分かる。

(2) 定理2の例のクラスにおいて $c<0$ で注意2の(1)の円 γ の曲率を $\sqrt{|c|}/2$ としてできる極小線織実超曲面だけが等質実超曲面であることを教えてくれる。

定理2の条件 ii) を外すと線織実超曲面を特徴付ける次の命題を得る。

命題 4. $\widetilde{M}=M_n(c)$ $(n\geqq 2, c\neq 0)$ 内の実超曲面 M が線織実超曲面であるための必要十分条件は，M 上の各点 x において，特性ベクトル ξ_x と直交する正規直交系 $v_1,\ldots,v_{2n-2}(\in T_xM)$ で次の条件を満たすものが存在することである。点 $\gamma_{ij,x}(0)=x$ を通り，v_i+v_j $(1\leqq i\leqq j\leqq 2n-2)$ 方向の M 上の測地線 $\gamma_{ij,x}$ が，外側の空間 $\widetilde{M}$ 内の測地線でもある。

この命題の背景には，全ての線織実超曲面が持つ次の性質がある。

命題 5. $\widetilde{M}=M_n(c)$ $(n\geqq 2, c\neq 0)$ 内の任意の線織実超曲面 M の各点 x において，この点を通り特性ベクトル ξ_x と直交する M 上の任意の測地線は，外側の空間 $\widetilde{M}$ 内の測地線でもある。

5. 終わりに

$\widetilde{M}=M_n(c)$ $(n\geqq 2, c\neq 0)$ 内の平面 (即ち，実2次元全測地的部分多様体) は，2種類ある。一つは定曲率 $c/4$ の全実全測地的平面 $\mathbb{R}M^2(c/4)$ (即ち，$\mathbb{R}P^2(c/4)$ または $\mathbb{R}H^2(c/4)$) であり，もう一つは定曲率 c の (全測地的) 複素直線 $M_1(c)$ (即ち，$\mathbb{C}P^1(c)$ または $\mathbb{C}H^1(c)$) である。

これまでの議論より任意の極小線織実超曲面の特性ベクトル場の全ての積分曲線は，外側の空間 $\widetilde{M}$ 内の全実的平面 $\mathbb{R}M^2(c/4)$ 上に乗っていた。それでは，「極小でない線織実超曲面 M の特性ベクトル場 ξ の積分曲線で，複素直線 $M_1(c)$ 上に乗っているものがあるのだろうか？」という疑問が湧いてくる。これは NO! である。もしそのような積分曲線 γ があるとすれば，γ の各点 x において線織実超曲面 M の特性ベクトル ξ_x は線織面 M の 外側の空間 $\widetilde{M}$ における主曲率ベクトルとなり，「任意の線織実超曲面は，特性ベクトルが主曲率ベクトルとなる点はただの一点も持たない」という我々の立場と矛盾する事になる。

この議論を更に押し進めることにより，ホップ超曲面を特徴付ける次の命題を得る。

命題 6. $\widetilde{M} = M_n(c)$ $(n \geqq 2, c \neq 0)$ 内の実超曲面 M が *Hopf* 超曲面であるための必要十分条件は, M の特性ベクトル場 ξ の各積分曲線が局所的に複素直線 $M_1(c)$ 上に乗っていることである。

(証明) M の特性ベクトル場 ξ の各積分曲線 γ が局所的に複素直線 $M_1(c)$ 上に乗っていることは, 次が成り立つことと同値である。

$$\nabla_{\xi_\gamma}\xi_\gamma + \langle A\xi_\gamma, \xi_\gamma\rangle\mathcal{N} = \widetilde{\nabla}_{\xi_\gamma}\xi_\gamma = \kappa_\gamma(s)J\xi_\gamma = \kappa_\gamma(s)\mathcal{N}. \tag{5.1}$$

ここで, $\xi_\gamma = \dot{\gamma}$ であり, $\kappa_\gamma(s)$ は γ 上のある可微分関数である。(5.1) より $\nabla_{\xi_\gamma}\xi_\gamma = 0$ となるから, 実超曲面 M が Hopf 超曲面であるための必要十分条件は, M の特性ベクトル場 ξ の各積分曲線が局所的に複素直線 $M_1(c)$ 上に乗っていることが分かる。 □

ここで次の問題を設定する。

問題 1. 次の 2 条件を満たす $\mathbb{C}H^n(c)$ $(n \geqq 2)$ 内の実超曲面 M は存在するか?

(1) M は, $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の線織実超曲面ではない。
(2) M の特性ベクトル場の各積分曲線は, 局所的に全実的平面 $\mathbb{R}H^2(c/4)$ 上に乗っている。

更に, 本講演の最後に問題 1 に含まれる小さな課題として次を設定する。

問題 2. $\mathbb{C}H^n(c)$ $(n \geqq 2)$ 内の(線織実超曲面でない)各ノンホップ等質実超曲面 M に対して, M の特性ベクトル場の各積分曲線は, 外側の空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ ではどのような曲線になっているかを調べよ。

References

[1] T. Adachi, M. Kimura and S. Maeda, *A characterization of all homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space by observing the extrinsic shape of geodesics*, Arch. Math. (Basel) **73** (1999), 303–310.

[2] T. Adachi and S. Maeda, *Global behaviours of circles in a complex hyperbolic space*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 29–42.

[3] J. Berndt, *Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space*, J. Reine Angew. Math. **395** (1989), 132–141.

[4] J. Berndt and H. Tamaru, *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 3425–3438.

[5] A. Comtet, *On the Landau levels on the hyperbolic plane*, Ann. Phys. **173** (1987), 185–209.

[6] B.Y. Chen and S. Maeda, *Hopf hypersurfaces with constant principal curvatures in complex projective or complex hyperbolic spaces*, Tokyo J. Math. **24** (2001), 133–152.

[7] T.E, Cecil and P.J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans, Amer. Math. Soc. **269** (1982), 481–499.

[8] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), 137–149.

[9] M. Kimura, *Sectional curvatures of holomorphic planes on a real hypersurface in* $\mathrm{P}^n(C)$, Math. Ann. **276** (1987), 487–497.

[10] M. Lohnherr and H. Reckziegel, *On ruled real hypersurfaces in complex space forms*, Geom. Dedicata **79** (1999), 267–286.

[11] S. Maeda, *Real hypersurfaces of complex projective spaces*, Math. Ann. **263** (1983), 473–478.

[12] S. Maeda, *Characterizations of some homogeneous real hypersurfaces in a complex hyperbolic space*, a preprint.

[13] S. Maeda and T. Adachi, *Integral curves of characteristic vector fields of real hypersurfaces in nonflat complex space forms*, Geom. Dedicata **123** (2006), 65–72.

[14] S. Maeda, T. Adachi and Y.H. Kim, *A characterization of the homogeneous ruled real hypersurface in a complex hyperbolic space*, a preprint.
[15] S. Maeda and K. Ogiue, *Characterizations of geodesic hyperspheres in a complex projective space by observing the extrinsic shape of geodesics*, Math. Z. **225** (1997), 537–542.
[16] S. Nagai, *The classification of naturally reductive homogeneous real hypersurfaces in complex projective space*, Arch. Math. (Basel), **69** (1997), 523–528.
[17] R. Niebergall and P.J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms*, Tight and Taut Submanifolds, T.E. Cecil and S.S. Chern, eds., Cambridge University Press, 1998, pp. 233–305.
[18] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. **10** (1973), 495–506.
[19] A. Vitter, *On the curvature of complex hypersurfaces*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1974), 813–826.

E-mail address: `smaeda@ms.saga-u.ac.jp`