

## 複素平面内のラグランジュ曲面の分数表示

筑波大学数理物質科学研究科 守屋克洋 (Katsuhiko Moriya)  
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

### 1 序

リーマン面から四次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^4$  への共形写像をリーマン面から四元数  $\mathbb{H}$  への写像とみなすとき, 二つの共形写像の四元数としての商は, ふたたび共形写像となる. このことは, Ferus, Leschke, Pedit, Pinkall [2] による共形写像の四元数的形式主義を用いると容易にわかる. 共形写像を共形写像の商で書くことを共形写像の分数表示とよぶことにする.

共形写像とそれを分数表示する二つの共形写像は密接な関係がある. 分数表示はいくつかの共形写像の間に代数関係があること意味する. またある種のワイエルシュトラス表現公式や,  $\mathbb{R}^3$  内の曲面のスピンの表現公式は分数表示から得られる. このような点から見て, よく知られている曲面を分数表示することは興味深い問題である.

共形写像の四元数的形式主義とは共形写像を複素正則関数の一般化とみなすものである. 複素正則関数の性質が像の正則変換で不変なように, 四元数的形式主義は像の共形変換で不変な性質を調べるのに有効であると思われる. 実際 Burstall, Ferus, Leschke, Pedit, Pinkall [1] では四元数的形式主義を用いた四次元共形球面内のウィルモア曲面やその他関連する曲面についての研究が展開されている. 一方,  $\mathbb{H}$  と  $\mathbb{C}^2$  と同一視したときの正則写像の一般化として, ラグランジュ曲面が研究対象としてあげられる. 共形写像は二つの概複素構造により擬正則写像になるのだが, ラグランジュ曲面はそのうちの一つが  $S^1$  に値をもつためである. これがさらに一点に退化すると複素正則写像になる.

そこで、筆者はラグランジュ曲面の商として得られるラグランジュ曲面の分数表示を調べ、その分母にあらわれるラグランジュ曲面を分類した。以下ではその研究についてアウトラインを紹介する。

## 2 共形写像

$\mathbb{H}$  を四元数の集合とする。すなわち、ユニタリー実代数で、

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk &= -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{aligned}$$

という関係をみたす  $i, j, k$  で生成されているとする。  $a \in \mathbb{H}$  の四元数共役を  $\hat{a}$ 、虚部を  $\text{Im } a$  と書く。  $\text{Im } \mathbb{H}$  は虚部の集合である。  $\mathbb{H}$  と  $\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2$  を次のように同一視する。

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\ni (a_0, a_1, a_2, a_3) \cong a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}, \\ \mathbb{C}^2 &\ni (a_0 + a_1i, a_2 - a_3i) \cong a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

$a \in \mathbb{C}$  のときその複素共役を  $\bar{a}$  と書く。

次に  $(M, J^M)$  をリーマン面とする。  $f: M \rightarrow \mathbb{H}$  が共形写像であることと、  $f$  がはめ込みとなる部分集合  $M' \subset M$  において、  $N: M' \rightarrow \text{Im } \mathbb{H}, R: M' \rightarrow \text{Im } \mathbb{H}$  で、

$$*(df) := (df) \circ J^M = N(df) = -(df)R$$

となるものが存在することが同値である。  $N$  と  $R$  はそれぞれ左法ベクトル、右法ベクトルとよばれる。  $f$  が共形はめ込みであれば、  $N$  と  $R$  は符号を除いてただ一つに決まる。  $M'$  においては左法ベクトルか右法ベクトルかのどちらかの存在が言えれば、残りの法ベクトルの存在が言える。定義か

ら  $N^2 = R^2 = -1$  である. 従って,  $N, R$  は  $f$  が  $f(M')$  の概複素構造の  $f$  による引き戻しとみなせ,  $f$  は  $f(M')$  の概複素構造について擬正則写像である.

$N: M \rightarrow \mathbb{H}, N^2 = -1$  にたいして,

$$D = \frac{1}{2}(d + N * d)$$

とおく. このとき,  $Df = 0$  となる非定値写像  $f: M \rightarrow \mathbb{H}$  は,  $M'$  で左法ベクトルが  $N$  である弱共形写像である.  $\phi, \psi: M \rightarrow \mathbb{H}$  は  $D\psi = D\phi = 0$  となると弱共形写像と仮定し,  $\eta: M \setminus \{\phi^{-1}(0)\} \rightarrow \mathbb{H}$  を  $\psi = \phi\eta$  で定義する. すなわち  $\eta$  の  $\psi$  と  $\phi$  による分数表示が与えられているとする. このとき,

$$0 = D(\psi) = D(\phi\eta) = \phi \frac{1}{2} [(d\eta) + \phi^{-1} N \phi * (d\eta)]$$

であるから,  $\eta$  は左法ベクトルが  $\phi^{-1} N \phi$  である弱共形写像である.

### 3 ラグランジュ曲面

$\mathbb{H}$  を  $\mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$  と同一視して, さらに  $\mathbb{C}^2$  と同一視する.  $f: M \rightarrow \mathbb{C}^2$  が共形はめ込みで  $\langle (df)(X), \{(df)(Y)\}i \rangle = 0$  が任意の  $X, Y \in TM$  で成り立つとき,  $f$  はラグランジュ共形はめ込みであるという.

これを前節の共形はめ込みの特徴付けを用いて書き直す.  $N$  と  $R$  を  $f$  の左法ベクトル場, 右法ベクトル場とする. すると

$$N\{(df)(X)\}R = (df)(X), \quad N\{(df)(Y)\}iR = -\{(df)(Y)\}i,$$

である. これより,  $Ri = -iR$  を得る. 従って,  $R = je^{\beta i}, \beta: M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  である. 逆に  $R = je^{\beta i}$  であるような共形はめ込みはラグランジュ共形はめ込みになる.  $\beta + \pi$  はラグランジュ角度写像となる. 従って, 左法ベクトル場が  $je^{\beta i}$  である共形写像は, その四元数共役がラグランジュ曲面となる. 以下では両方を用いる.  $\beta$  が調和的であるときは,  $f$  はハミルトン安定ラグランジュ曲面となる.

## 4 ラグランジュ曲面の分母

以下でラグランジュ曲面の分母についての結果を述べる. 概要を伝えることに重きをおくため, 以下の内容は意図的に雑に書いている. 正確なステートメントは原論文 [4] を参照すること.

まず,  $N = je^{\beta i}$  として  $D = (d + N * d)/2$  とする.  $\nu, \mu: M \rightarrow \mathbb{H}$  を,  $D\hat{\nu} = D\hat{\mu} = 0$  となる非定値共形写像とし商  $\hat{\nu} = \hat{\mu}\hat{\eta}$  において,  $\eta$  は右法ベクトル場が  $je^{\gamma i}$  であるラグランジュ分岐曲面であるとする. そのとき,

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 e^{2^{-1}(\beta-\gamma)i} + j\mu_1 e^{2^{-1}(\beta+\gamma)i}, \\ \mu_0(-*(d\beta) + *(d\gamma)) &= \mu_1((d\beta) + (d\gamma))\end{aligned}$$

でなければならないことが分かる. ここで  $\mu_0$  と  $\mu_1$  は  $\mu_0 - \mu_1 i$  が複素正則関数となる実数値関数である.

まず  $M$  が閉リーマン面である場合を考える. このとき次が言える.

**補題 1.**  $M$  が閉リーマン面である場合,  $\mu_0$  と  $\mu_1$  は定数で,  $\mu_0\mu_1 \neq 0$  であり,  $\Psi = \mu_0(\beta - \gamma) + \mu_1(\beta + \gamma)i$  は正則写像である.

このとき  $\mu$  は二つの円の直積である. このラグランジュ曲面は閉リーマン面上の正則関数が定数関数になることに対応している.

次に  $M$  が開リーマン面である場合を考える. このとき, 次が言える.

**定理 1.**  $M$  が開リーマン面である場合  $\{p \in M \mid \mu_0(p) = 0\}$  上で  $(d\beta) + (d\gamma) = 0$ ,  $\{p \in M \mid \mu_1(p) = 0\}$  上で  $(d\beta) - (d\gamma) = 0$ , であり,  $\{p \in M \mid \mu_0(p)\mu_1(p) \neq 0\}$  上で  $\Psi$  はカーレマン・ベルス・ベクア方程式

$$\bar{\partial}\Psi = 2^{-1}\Psi\{\bar{\partial}\log(\mu_0\mu_1)\} + 2^{-1}\bar{\Psi}\{\bar{\partial}\log(\mu_0\mu_1^{-1})\},$$

の解として定義される一般化された解析関数である.

上の一般化された解析関数は、その積分表示を利用することによって、リーマン面上の解析関数とよく似た性質をもつことが示される ([7], [8]).

$\mu, \nu, \eta$  のどれかがハミルトンの的に安定なラグランジュ曲面の場合はより詳しいことが分かる。まず  $\mu$  も  $\eta$  もハミルトンの的に安定なラグランジュ曲面である場合を考えよう。このときは  $\mu_0, \mu_1, \beta, \gamma$  はいたって限定的である。

**定理 2.**  $M$  が閉リーマン面であり、 $\beta$  と  $\gamma$  が調和的である場合、 $\mu_0$  と  $\mu_1$  が定数であり、 $\mu_0(\beta - \gamma) + \mu_1(\beta + \gamma)i$  は定値でない複素正則写像である、または、 $\mu_0 - \mu_1 i$  が定数関数ではなく  $\beta$  と  $\gamma$  が定値写像である。

このとき  $\phi$  は円の直積か複素正則写像を適当に変換したものになる。

次に  $\mu, \nu$  がハミルトンの的に極小なラグランジュ曲面であり、 $\eta$  がハミルトンの的に極小ではないラグランジュ曲面の場合を考える。

**定理 3.**  $M$  が開リーマン面で  $\beta$  が調和的で、 $\gamma$  が調和的でない場合、 $\mu_0 - \mu_1 i$  が定数関数ではなく、 $\beta$  と  $\gamma$  が任意の零でない実数  $A$  と任意の実数  $B$  と  $C$  にたいして、

$$\beta(\mu_0, \mu_1) = A \frac{(\mu_0^2 - \mu_1^2)}{(\mu_0^2 + \mu_1^2)^2} + B, \quad \gamma(\mu_0, \mu_1) = \frac{A}{\mu_0^2 + \mu_1^2} + C,$$

となる。

最後に  $\mu, \nu$  がハミルトンの的に極小でないラグランジュ曲面であり、 $\eta$  がハミルトンの的に極小なラグランジュ曲面の場合を考える。

**定理 4.**  $M$  が開リーマン面で  $\beta$  が調和的でなく、 $\gamma$  が調和的である場合、 $\mu_0 - \mu_1 i$  が定数関数ではなく、 $\beta$  と  $\gamma$  が任意の零でない実数  $A$  と任意の実数  $B$  と  $C$  にたいして、

$$\beta(\mu_0, \mu_1) = A(\mu_0^2 + \mu_1^2) + B, \quad \gamma(\mu_0, \mu_1) = A(\mu_0^2 - \mu_1^2) + C,$$

となる。

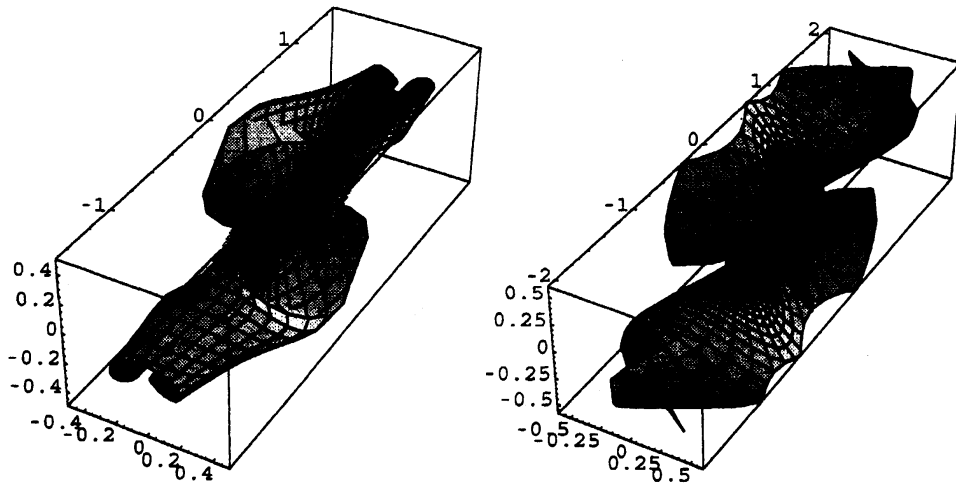


図 1:  $U = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid 0.5^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4^2\}$ ,  $\mu_0 = x$ ,  $\mu_1 = -y$ ,  $A = 1$ ,  $\text{Im}\mu: U \rightarrow \text{Im}\mathbb{H}$ .

## 5 具体例

上の定理 3, 定理 4 において  $\mu$  が具体的に与えられたので,  $\mu$  と同じ右法ベクトル  $je^{\beta i}$  をもつラグランジュ曲面があると, それに対応して, 右法ベクトル  $je^{\gamma i}$  をもつラグランジュ曲面が得られる. 右法ベクトル  $je^{\beta i}$  をもつラグランジュ曲面をどう構成するかはまた別の話であるが, いくつか例をあげる.

以下では  $M = \mathbb{C}$  とし  $(x, y)$  は  $x + yi = z$  であるような座標系であるとする.

図 1 は定理 3 の例で,  $\mu_0 = x$ ,  $\mu_1 = y$ ,  $A = 1$ ,  $B = C = 0$  のときの

$$\mu(x, y) = xe^{-y^2(x^2+y^2)^{-2}i} - jye^{x^2(x^2+y^2)^{-2}i}$$

の虚部のグラフィックであり, 右は  $v = 1$  としたときの,

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left( xe^{y^2(x^2+y^2)^{-2}i} + jye^{x^2(x^2+y^2)^{-2}i} \right)$$

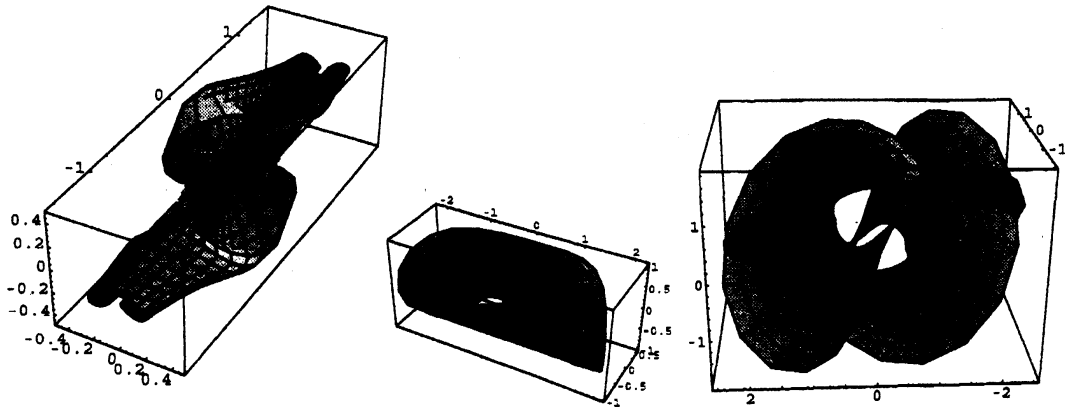


図 2:  $U = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid 0.68^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1.5^2\}$ ,  $\mu_0 = x$ ,  $\mu_1 = -y$ ,  $A = 1$ ,  $\text{Im}(iv): U \rightarrow \text{Im } \mathbb{H}$ .

の虚部のグラフィックである。

図 2 は定理 3 の例で、左が上と同じ  $\mu$  のグラフィックであり、中央が

$$v(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - j i e^{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}i}$$

としたときの  $iv$  の虚部のグラフィックであり、右が

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \left\{ \left[ -2x^2 y e^{y^2(x^2 + y^2)^{-2}i} - y(x^2 + y^2)^2 i e^{y^2(x^2 + y^2)^{-2}i} \right] \right. \\ \left. + j \left[ -2xy^2 e^{x^2(x^2 + y^2)^{-2}i} - x(x^2 + y^2)^2 i e^{x^2(x^2 + y^2)^{-2}i} \right] \right\}$$

の虚部のグラフィックである。

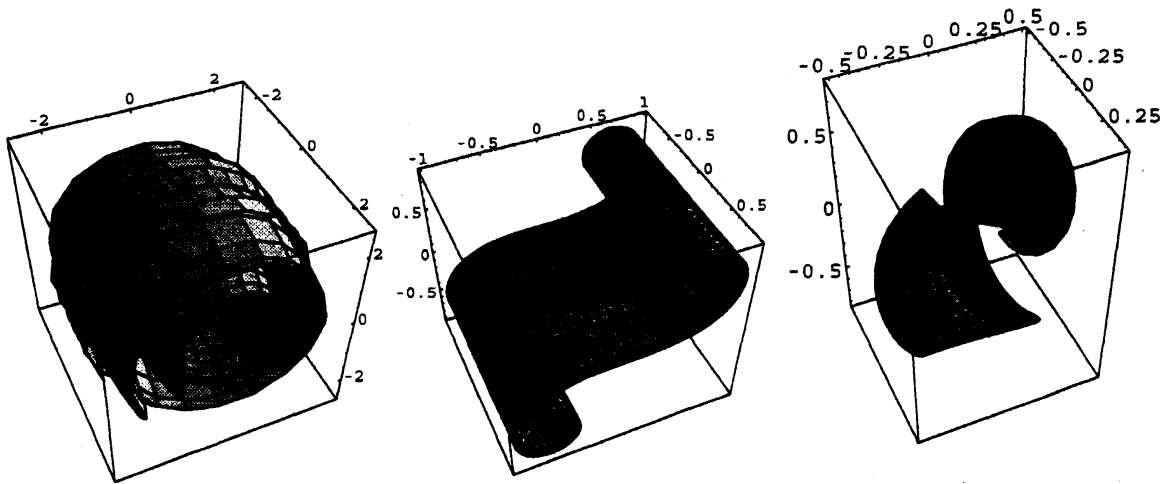


図 3:  $U = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid 0.1 \leq |x| \leq 2.6, |y| \leq 2.6\}$ ,  $\mu_0 = x$ ,  $\mu_1 = -y$ ,  $A = 1$ ,  $\text{Im } v: U \rightarrow \text{Im } \mathbb{H}$ .

図 3 は, 定理 4 の例で, 左から順に

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= xe^{y^2 i} - jye^{x^2 i}, \\ v(x, y) &= \int^x e^{t^2 i} dt + j \int^{-y} e^{t^2 i} dt, \\ \lambda(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \\ &\times \left\{ \left[ xe^{-y^2 i} \int^x e^{t^2 i} dt - ye^{x^2 i} \int^{-y} e^{-t^2 i} dt \right] \right. \\ &\left. + j \left[ xe^{-y^2 i} \int^{-y} e^{t^2 i} dt + ye^{x^2 i} \int^x e^{-t^2 i} dt \right] \right\} \end{aligned}$$

の虚部のグラフィックである.



## 参考文献

- [1] F. E. Burstall, D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit, and U. Pinkall, *Conformal geometry of surfaces in  $S^4$  and quaternions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1772, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit, and U. Pinkall, *Quaternionic holomorphic geometry: Plücker formula, Dirac eigenvalue estimates and energy estimates of harmonic 2-tori*, *Invent. Math.* **146** (2001), no. 3, 507–593.
- [3] F. Hélein and P. Romon, *Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in  $\mathbb{C}^2$* , *Comm. Anal. Geom.* **10** (2002), no. 1, 79–126.
- [4] K. Moriya, *The denominators of Lagrangian surfaces in complex Euclidean plane*. Mathematical Research Note 2006-002, University of Tsukuba.
- [5] Y.-G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, *Invent. Math.* **101** (1990), no. 2, 501–519.
- [6] F. Pedit and U. Pinkall, *Quaternionic analysis on Riemann surfaces and differential geometry*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II* (Berlin, 1998), 1998, pp. 389–400 (electronic).
- [7] Y. L. Rodin, *Generalized analytic functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1288, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [8] I. N. Vekua, *Generalized analytic functions*, Pergamon Press, London, 1962.