数理解析研究所講究録
第 1578 巻 2008 年 11-15

BOX PRODUCT と帰納的極限

筑波大学 数理物質科学研究科
嶺 幸太郎・酒井 克郎

無限次元多様体の研究の一つに LF-空間をモデルとする位相多様体（以下 LF-多様体）の研究がある．LF-空間の位相は箱位相と呼ばれる特殊な積位相空間で表現され，今回の研究はこの点に着目し，LF-空間の開部分集合の分類を行った．

1. LF-空間と SMALL BOX PRODUCT

LF-空間及び箱位相は次のように定義される．

定義. 局所凸線形位相空間 F_n の可算増大列[1] で表現される線形空間

$$F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3 \subsetneq \cdots \subset F = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$$

において，F_n から F への自明な埋め込みを連続とするような最強の局所凸線形位相空間 $F = \text{ind-lim}\, F_n$ を帰納的極限と呼ぶ．特に Fréchet 空間[2] の帰納的極限を LF-空間と呼ぶ．

定義. 位相空間 X_n $n \in \mathbb{N}$ に対して，積集合 $\prod_{n \in \mathbf{N}} X_n$ 上に集合 $\prod_{n \in \mathbf{N}} U_n$（各 U_n は X_n の開集合）を基底とするような位相を導入し，これを *box product* と呼び $\square_{n \in \mathbf{N}} X_n$ と表す．

更に各 X_n において固定点 $*_n \in X_n$ を定めておけば，$\prod_{i=1}^{n} X_i = (\prod_{i=1}^{n} X_i) \times \{*_{n+1}\}$ を $\prod_{i=1}^{n+1} X_i$ の部分空間と見なすことで $\square_{n \in \mathbf{N}} X_n$ の部分空間 $\boxdot_{n \in \mathbf{N}} X_n = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \prod_{i=1}^{n} X_i$ が定義され，これを *small box-product* と呼ぶ．

各 $(X_i, *_i)$ がすべて空間 $(X, *)$ に等しいとき，$\square_{n \in \mathbf{N}} X_n$ 及び $\boxdot_{n \in \mathbf{N}} X_n$ を省略してそれぞれ $\square^{\mathbf{N}} X$ 及び $\boxdot^{\mathbf{N}} X$ と書く．

帰納的極限の位相は small box product の位相と一致する．即ち，次がいえる．

事実. 任意の局所凸線形位相空間 V に対して

$$\text{ind-lim}\, V^n = \boxdot^{\mathbf{N}} V.$$

[1]一般には非可算の場合も同様に帰納的極限が定義される．また，必ずしも増大列である必要はない．

[2]完備距離付け可能な局所凸線形位相空間のことを Fréchet 空間と呼ぶ．

定義から明らかなように, 帰納的極限の位相は位相空間としての通常の弱位相よりやや弱い位相である. 一致するための必要十分条件として次が与えられる.

命題. $(X,*)$ を距離空間[3] とし, $* \in X$ を集積点とする. この時, $\boxdot^{\mathbf{N}} X = \varinjlim X^n$ であるための必要十分条件は X が局所コンパクトであることである.

したがって, 数直線 $\mathbb{R}$ 及び無限次元ヒルベルト空間 ℓ_2 においては

$$\boxdot^{\mathbf{N}} \mathbb{R} = \varinjlim \mathbb{R}^n, \quad \boxdot^{\mathbf{N}} \ell_2 \neq \varinjlim {\ell_2}^n$$

ということになる. 以下, 局所コンパクト空間 X に対して $X^n (n \in \mathbb{N})$ による弱位相 $\varinjlim X^n = \boxdot^{\mathbf{N}} X$ を簡単のため X^∞ と書く. 特に

$$\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^n = \boxdot^{\mathbf{N}} \mathbb{R} = \text{ind-lim}\, \mathbb{R}^n.$$

2. *LF*-多様体の分類

モデルとなる位相空間 E が与えられたとき, 局所的に E と同相なパラコンパクト空間を E-多様体と定義し, LF-空間をモデル空間とする多様体を LF-多様体と呼ぶ.

LF-多様体を研究するにあたり, 次の Mankiewicz [2] による LF-空間の分類定理は重要である. 簡単のため可分な場合についてのみ述べれば,

定理 (Mankiewicz, 1974). F を可分な LF-空間とすれば, F は $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$ または $\mathbb{R}^\infty$ と同相である. 特に, $\text{ind-lim}\, {\ell_2}^n = \boxdot^{\mathbf{N}} \ell_2 \approx \ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$ である.

したがって, 位相的観点から見れば, 可分な LF-多様体とは $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$-多様体と $\mathbb{R}^\infty$-多様体に限られることになる. $\mathbb{R}^\infty$-多様体については Heisey [1] や Sakai [3] などによる先行研究があり ℓ_2-多様体と同様に次のようなことが知られている.

定理. M, N を連結な $\mathbb{R}^\infty$-多様体 (または ℓ_2-多様体) とする.

- *Stability* : $M \times \mathbb{R}^\infty \approx M$ $(M \times \ell_2 \approx M)$.
- *Classification* : $M \simeq N \iff M \approx N$.
- *Open embedding* : $\exists f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ (ℓ_2).
- 三角形分割 : $\exists |K|$: 多面体
  such that $|K| \times \mathbb{R}^\infty \approx M$ $(|K| \times \ell_2 \approx M)$.

また, $\mathbb{R}^\infty$-多様体の特徴づけとして次が与えられる.

---

[3] 簡単のため距離空間としているが, もっと弱い条件の空間でもこの命題は成立する.

定理. 有限次元コンパクト距離空間の増大列 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ に対して, $X = \varinjlim X_n$ が $\mathbb{R}^\infty$-多様体となるための必要十分条件は次で与えられる.

$\forall A$: 有限次元コンパクト距離空間,
$\forall B \subset A$: 閉集合,
$\forall f : B \hookrightarrow X$: *embedding*,
$\exists U$: B の近傍, $\exists \tilde{f} : U \hookrightarrow X$: *embedding such that* $\tilde{f}|_U = f$.

例えば上記の特徴づけから $[0,1)^\infty$ や $[0,1]^\infty$ は $\mathbb{R}^\infty$-多様体であることがわかり, さらに Classification と合わせることで次が得られる.

$$\mathbb{R}^\infty \approx [0,1)^\infty \approx [0,1]^\infty.$$

以上のようなことから, もう一つの LF-多様体である $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$-多様体についても, 上述のような結果が期待される. しかしながら Heisey [1] や Sakai [3] では $\mathbb{R}^\infty$ を $\varinjlim \mathbb{R}^n$ と見なすことで上述のような結果を導き出しており, $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty \neq \varinjlim(\ell_2 \times \mathbb{R}^n)$ (あるいは $\boxdot^{\mathbb{N}}\ell_2 \neq \varinjlim \ell_2{}^n$) であることから, $\mathbb{R}^\infty$-多様体においての手法がそのまま適用できるわけではない. この問題が今回の研究におけるポイントである. $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$-多様体の研究の手始めとして今回我々が示したのが次の定理である.

主結果. $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$ の任意の開部分空間 U に対し, ある ℓ_2-多様体 M が存在し, U は $M \times \mathbb{R}^\infty$ と同相になる.

この定理と ℓ_2-多様体の結果を合わせることで, $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$ の開集合については次が成立する.

系. U, V を $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$ の開集合とする.

- *Stability* : $U \times \ell_2 \times \mathbb{R}^\infty \approx U$
- *Classification* : $U \simeq V \iff U \approx V$.
- 三角形分割 : $\exists |K|$: 多面体 *such that* $|K| \times \ell_2 \times \mathbb{R}^\infty \approx M$

上述の ℓ_2-多様体や $\mathbb{R}^\infty$-多様体をはじめとし, 多くの連結な無限次元多様体はモデル空間に開集合として埋め込めることが知られており (Open embedding), $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$-多様体についても同様の事が予想される. この予想の肯定的解決がなされれば, 今回我々が得た $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$ の開集合に関する結果は, すべての $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$-多様体に対して拡張される.

3. 証明の概略

この節では主結果の証明のアイデアについて簡単ではあるが概説する.

証明. $\mathbb{R}^\infty \approx [0,1)^\infty$ であるから, $\ell_2 \times [0,1)^\infty$ 上の開集合 U に対して成り立つことを示せばよい. $U_n = U \cap (\ell_2 \times [0,1)^n \times \{(0,0,\ldots)\})$ とすれば, 各 U_n は ℓ_2-多様体である. また, U_n の定義から, collar[4] の列

[4]連続写像 $\varphi : X \times [0,1) \to Y$ が任意の $x \in X$ について $\varphi(x,0) = x$ を満たす open embedding であるとき $X \subset Y$ における collar と呼ぶ.

$\Psi = (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ここで $\psi_n : U_n \times [0,1) \to U_{n+1}$) を取ることができるので, これを一つ固定する. ψ_n から次のような自然な open embedding が定義できる.

$$\psi_n \times \mathrm{id} : U_n \times [0,1) \times [0,1)^\infty \to U_{n+1} \times [0,1)^\infty.$$

この open embedding によって $U_n \times [0,1)^\infty$ を $U_{n+1} \times [0,1)^\infty$ の開部分空間とみなすことにより, つぎのような開集合の増大列が得られる.[5]

$$U_1 \times [0, \tfrac{1}{2})^\infty \underset{\psi_1\times\mathrm{id}}{\subset} U_2 \times [0, \tfrac{2}{3})^\infty \underset{\psi_2\times\mathrm{id}}{\subset} \cdots .$$

そこで, U_Ψ を上の増大列による順極限 $U_\Psi = \varinjlim U_n$ で定義する. U_Ψ の位相は collar の列 Ψ の取り方に依存し, また U_Ψ は集合としてはもとの U と一致していることに注意したい. ある U_Ψ に関して次が成り立つ.

補題. *$U_\Psi \approx U$ となる collar の列 Ψ が存在する.*

この補題によって, U がより単純な形の空間の極限で表現できることになり, 若干位相的に扱いやすくなった. さらに, ℓ_2-多様体 M を次で定義する.

$$M = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} [n-1, n] \times U_n.$$

M の定義において, U_n は U_{n+1} の部分空間であるから $U_n \times \{n\}$ が $U_{n+1} \times \{n\}$ の部分空間になっていることに注意したい. また, M の部分空間と $[0,1)^\infty$ の積として次のような $\ell_2 \times \mathbb{R}^\infty$-多様体による開集合の列を定義する.

$$M_n^\infty = \left(\bigcup_{i=1}^{n} [i-1, n) \times U_i\right) \times \left[0, \frac{n}{n+1}\right)^\infty.$$

最後に ℓ_2-多様体の理論 (特に unknotting theorem など) を駆使することで, 同相写像 h_n $(n \in \mathbb{N})$ による以下の可換図式を作る.

$$\begin{array}{ccc} M_n^\infty & \xrightarrow{\subset} & M_{n+1}^\infty \\ {\scriptstyle \exists h_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exists h_{n+1}} \\ U_n \times [0, \frac{n}{n+1})^\infty & \xrightarrow[\psi_n\times\mathrm{id}]{\subset} & U_{n+1} \times [0, \frac{n+1}{n+2})^\infty. \end{array}$$

この可換図式から直ちに次の式が示され, 主結果の主張を得る.

$$M \times [0,1)^\infty = \varinjlim M_n^\infty \approx \varinjlim U_n \times [0, \tfrac{n}{n+1}) = U_\Psi.$$

□

[5]なお区間の幅が 1 に収束するように細工してあるのは後の証明における技術的な問題によるものであるが, 詳しい理由は省略する.

なお, 上述の可換図式は任意の collar の列 Ψ に対して示すことができるため, U_Ψ は Ψ に依存する位相が入っているものの, これらはすべて同相であることが分かる.

References

[1] R.E. Heisey, *Manifolds modelled on the direct limit of lines,* Pacific J. Math. **102** (1982), 47–54.

[2] P. Mankiewicz, *On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces,* Studia Math. **52** (1974), 109–142.

[3] K. Sakai, *On* $\mathbb{R}^\infty$*-manifolds and* Q^∞*-manifolds,* Topology Appl. **18** (1984), 69–79.