数理解析研究所講究録
第 1578 巻 2008 年 78-87

距離に依存するコンパクト化ーその周辺

赤池 祐次 (YUJI AKAIKE)
(呉工業高等専門学校)
(KURE NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY)
知念 直紹 (NAOTSUGU CHINEN)
(沖縄工業高等専門学校)
(OKINAWA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY)
友安 一夫 (KAZUO TOMOYASU)
(都城工業高等専門学校)
(MIYAKONOJO NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY)

1. 序章

本稿で使用される記号と用語は [17] と [18] に従う. $\mathbb{N}$ を自然数全体, $\mathbb{R}$ を実数全体, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とし, 距離空間 (X, d) の部分空間 Y の部分距離を $d|_Y$ とする. また, $\mathbb{R}^n$ の通常の距離を d_n で表す.

任意の有界閉集合がコンパクトであるような距離空間を**プロパーな距離空間**という. 本稿における研究対象の空間はコンパクトでないプロパーな距離空間とし, コンパクトでないプロパーな距離空間の大域的な位相的あるいは幾何的性質を調べることを目標とする (cf. [13], [27]).

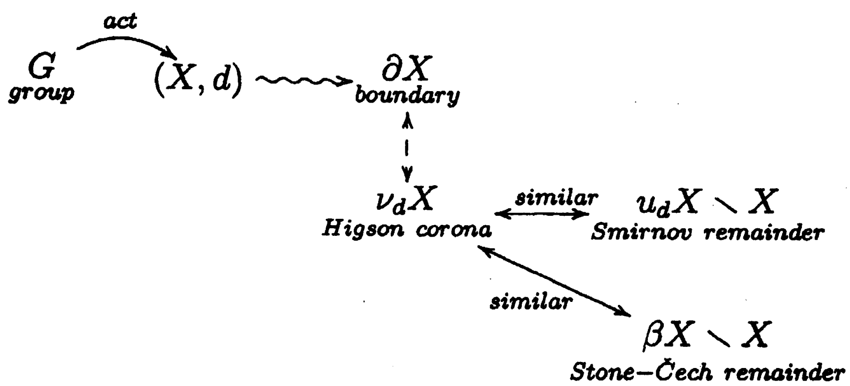
コンパクトな (距離) 空間はよく研究されており, コンパクトでないプロパーな距離空間をコンパクト化して調べることが有効な手段となる. また, コンパクト化したその剰余の位相的性質を調べることによって, もとの空間の大域的な位相的あるいは幾何的性質を調べるということが一般的な方法となる. つまり, コンパクトでない空間の大域的な特徴がコンパクト化した空間の剰余の位相的な特徴として現れるようなコンパクト化を考えることが重要である.

$\boxed{\text{コンパクトでない空間の大域的性質}} \rightsquigarrow \boxed{\text{コンパクト化の剰余の位相的性質}}$

昔からよく研究されている Stone-Čech コンパクト化は最大のコンパクト化であるがゆえにコンパクトでないプロパーな距離空間の大域的な位相的あるいは幾何的性質を調べるのは困難なことと, あるいは幾何的特徴が上手に現れないため適当ではないと考えられる. そのためコンパクトでないプロパーな距離空間の大域的な位相的あるいは幾何的性質を調べるためには, 幾何的なコンパクト化, 例えば [21, p.44] の中にも紹介されている, $X \cup \partial X$ がよく研究されている. ∂X は境界 (boundary) と呼ばれていて, この境界は双曲群あるいは双曲空間を研究するときに基本的な道具になっており, 多くの理論 (位相的, 力学的, 幾何学的, 代数的等) に対して有効な適用を有している. しかし, $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{H}^n$ の境界が同じ $\mathbb{S}^{n-1}$

であることからもすべての幾何的性質を境界が保持しているわけではない等，取り扱いが困難な点も有している (cf. [9], [10])．

このような研究背景の中，本稿では距離に依存するコンパクト化として Higson と Smirnov コンパクト化を扱う．定義は次章を参照されたい．この Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化は似た性質を持つことが知られている．Higson コンパクト化は Higson によりコンパクトでないリーマン多様体においての Roe index の K 理論解析に関して導入された．さらに，Roe より一般的な空間においても Higson コンパクト化を定義している (cf. [27])．Higson コンパクト化は定義から幾何的なコンパクト化をより一般化したコンパクト化なので，幾何的なコンパクト化より多くの情報が得られると推測される．また Higson コンパクト化は Stone-Čech コンパクト化と似た特徴をもっていることが知れており，Stone-Čech コンパクト化の知られている情報を利用できる可能性を含んでいる (cf. [23], [24])．つまり，Higson コンパクト化の剰余 $\nu_d X$ (Higson corona) は境界 ∂X と類似した特徴をもち，さらに Stone-Čech コンパクト化の剰余 $\beta X \setminus X$ あるいは Smirnov コンパクト化の剰余 $u_d X \setminus X$ とも類似した性質を持つことが幾つか知られている．



G. Yu は１９９０年代後半頃次のことを証明した：幾何的な有限群 Γ の asymptotic 次元が有限ならば，基本群が Γ である多様体に関して Novikov 予想と Gromov-Lawson 予想の両方とも成立する (cf. [32])．この予想において，n 次元 aspherical 多様体が重要な研究対象になるのだが，その多様体を研究することはその多様体の普遍被覆が $\mathbb{R}^n$ になっている場合を調べれば十分であり，また，その Higson コンパクト化の剰余を調べることが重要になる (cf. [13])．

このような歴史的な背景を踏まえて本研究の目標は Higson あるいは Smirnov コンパクト化の剰余の位相的性質あるいは次元を研究対象とし，コンパクトでないプロパー距離空間の大域的な位相的あるいは幾何的性質の解明を目標としており本稿では現時点で得られた結果について紹介する．

2. Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化の定義

Definition 2.1 (Higson コンパクト化). (X, d) をプロパーな距離空間とする．

(1) 連続写像 $f : X \to \mathbb{R}$ が **slowly oscillating** であるとは，任意の $r > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対してコンパクト集合 $K \subset X$ が存在し，$x \in X \setminus K$ に対して

diam $f(B_r(x,d)) < \varepsilon$ が成立するときをいう．ここで $B_r(x,d) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ とする．

(2) $C^*(X)$ を (X,d) 上の実数値有界連続関数全体で一様収束位相が入っているものとし，$C^*_d(X)$ を (X,d) 上の slowly oscillating な実数値有界連続関数全体とする．このとき，$C^*_d(X)$ は $C^*(X)$ の閉部分環となり，(X,d) 上の位相を生成する．このとき，$C^*_d(X)$ から生成されたコンパクト化を **Higson コンパクト化**といい $\overline{X}^d$ と表記する．また，$\nu_d X = \overline{X}^d \setminus X$ と表し **Higson corona** と呼ぶ．

上述の定義からも分かるように Higson コンパクト化は距離に依存するコンパクト化であり，以下の特徴付けは Higson コンパクト化をよく表している．詳しいことは [15] を参照するとよい．

Proposition 2.2. [15, Proposition 2.3] (X,d) をコンパクトでないプロパーな距離空間とする．互いに素な閉集合 $A, B \subset X$ に対して，次は同値である．

(1) $\mathrm{Cl}_{\overline{X}^d} A \cap \mathrm{Cl}_{\overline{X}^d} B = \emptyset$.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してコンパクト集合 $K \subset X$ が存在し，$x \in X \setminus K$ に対して $d(x,A) + d(x,B) > n$ を満たす．

上述の Proposition 2.2 は，互いに素な閉集合 $A, B \subset X$ に対して，遠くに行くに従って離れていればその閉集合はコンパクト化において閉包をとっても交わらないことを示している．

Definition 2.3 (Smirnov コンパクト化). (X,d) を距離空間とする．$U^*_d(X)$ を距離空間 (X,d) 上の実数値有界一様連続関数全体とする．$U^*_d(X)$ を $C^*(X)$ の部分集合と考えると閉部分環となり，(X,d) 上の位相を生成する．このとき，$U^*_d(X)$ により生成されたコンパクト化を **Smirnov コンパクト化**といい $u_d X$ と表記する．

この表記からも分かるように Smirnov コンパクト化は距離に依存するコンパクト化であり，以下の特徴付けは Smirnov コンパクト化をよく表している．詳しいことは [31] を参照するとよい．

Proposition 2.4. [31, Theorem 2.5] (X,d) をコンパクトでない距離空間とする．互いに素な閉集合 $A, B \subset X$ に対して，次は同値である．

(1) $\mathrm{Cl}_{u_d X} A \cap \mathrm{Cl}_{u_d X} B = \emptyset$.

(2) $d(A,B) > 0$.

上述の Proposition 2.4 は，互いに素な閉集合 $A, B \subset X$ に対して，遠くに行ったとしても近づいていなければその閉集合をコンパクト化において閉包をとっても交わらないことを示している．また上述の 2 つの特徴付けから，Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化は似た特徴を持つことが予想される．

ここで，ある種の稠密性の概念を導入する．

Definition 2.5. $r > 0$ とし，(X,d) をプロパーな距離空間とする．

(1) (X,d) の部分集合 D が r-稠密であるとは，$X = \{x \in X : d(x,D) < r\}$ のときをいう．

(2) (X,d) の部分集合 D が ∞ で稠密であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある X のコンパクト集合 K_ε で $D \cap (X \setminus K_\varepsilon)$ が $X \setminus K_\varepsilon$ で ε-稠密となっているときをいう．

この概念に関連して次のことが知られている (cf. [15], [31])．

Proposition 2.6. (X,d) をプロパーな距離空間とし，D を X の閉集合とする．

(1) D が (X,d) おいて r-稠密ならば，$\nu_d X$，$\mathrm{Cl}_{\overline{X}^d} D$，$\nu_{d|_D} D$ は互いに同相である．

(2) D が (X,d) において ∞ で稠密ならば，$u_d X \setminus X$，$\mathrm{Cl}_{u_d X} D$，$u_{d|_D} D \setminus D$ は互いに同相である．

Stone-Čech コンパクト化においては，このような結果はほとんど期待できないが，それゆえに，Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化の特徴になっている．また，この章の最後に簡単な例を挙げる．

Example 2.7. $X_1 = \{(2(n-1+t)\pi, \sin 2nt\pi) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}, t \in [0,1]\}$，$\rho_1 = d_2|_{X_1}$，$X_2 = \mathbb{R}_+ \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$，$\rho_2 = d_2|_{X_2}$ とする．明らかに，$\mathbb{R}_+ \cong X_1$．Proposition 2.6 より，$\nu_{\rho_1} X_1 \cong \nu_{d_1|_{\mathbb{R}_+}} \mathbb{R}_+$，$u_{\rho_1} X_1 \setminus X_1 \cong u_{\rho_2} X_2 \setminus X_2$ となる．また，$\nu_{d_1|_{\mathbb{R}_+}} \mathbb{R}_+ \not\cong u_{d_1|_{\mathbb{R}_+}} \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+$ であり，[2] より $\mathrm{Ind}\, u_{d_1|_{\mathbb{R}_+}} \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+ \neq \mathrm{Ind}\, u_{\rho_2} X_2 \setminus X_2$ であり，$\nu_{\rho_1} X_1$，$u_{\rho_1} X_1 \setminus X_1$，$u_{d_1|_{\mathbb{R}_+}} \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+$ は互いに同相ではない．

3. 剰余の位相的性質と STONE-ČECH コンパクト化との関係

Proposition 3.1 (cf. [23], [31]). (X,d) をコンパクトでないプロパーな距離空間とする．このとき，$\nu_d X$ と $u_d X \setminus X$ のいづれの中にも $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ と同相な閉部分集合を持つ．特に，$\nu_d X$ と $u_d X \setminus X$ は距離化不可能である．

上述より，距離化可能でないことが Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化の剰余を研究する上での障害になっている．一方，Stone-Čech コンパクト化の剰余は常に距離化可能ではないことが知られており，現在までに幾つかの有効な手法が知られている ([8], [11], [22], [30] 等の D. P. Bellamy，A. Calder と J. Keesling の一連の論文を参照されたい)．一方，Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化の剰余に関しては次の結果が知られている．

Proposition 3.2. (X,d) をコンパクトでないプロパーな距離空間とする．

(1) (cf. [24]) $\nu_d X$ は *arc* を含まない．

(2) $u_d X \setminus X$ が連結ならば，*arc* を含む．

(3) (cf. [12]) $\nu_d X$ と $u_d X \setminus X$ は任意の点で *cik* でない．

次に Stone-Čech コンパクト化との関連について述べる．

Definition 3.3 (**完全コンパクト化**). (X,d) を距離空間，αX を (X,d) のコンパクト化，$p:\beta X\to\alpha X$ を自然な射影 (i.e.,　$p|_X=\mathrm{id}_X$) とする．αX が **完全コンパクト化**であるとは，任意の $z\in\alpha X$ (すなわち $z\in\alpha X\setminus X$) に対して $p^{-1}(z)$ が連結となることである．

完全性は E.G. Sklyarenko[29] によって導入されたが，[25] に詳しく書かれている．ここで，最初に距離に依存する大域的な性質として粗一様連結性と一様局所連結性を導入する．

Definition 3.4 (**粗一様連結性** cf. [1], [16]). (X,d) を距離空間とする．

(1) (X,d) が**粗一様連結**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在し，$d(x,y)<\varepsilon$ を満たす $x,y\in X$ に対して，X のある連結な部分集合 P で $x,y\in P$ かつ $\operatorname{diam}P<\delta$ となるものが存在する．

(2) (X,d) が ∞ で**粗一様連結**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ と X のコンパクト集合 K_ε が存在し，$d(x,y)<\varepsilon$ を満たす $x,y\in X\setminus K_\varepsilon$ に対して，X のある連結な部分集合 P で $x,y\in P$ かつ $\operatorname{diam}P<\delta$ となるものが存在する．

Definition 3.5 (**一様局所連結性** cf. [1], [26]). (X,d) を距離空間とする．

(1) (X,d) が **一様局所連結**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在し，$d(x,y)<\delta$ を満たす $x,y\in X$ に対して，X のある連結な部分集合 P で $x,y\in P$ かつ $\operatorname{diam}P<\varepsilon$ となるものが存在する．

(2) (X,d) が ∞ で**一様局所連結**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ と X のコンパクト集合 K_ε が存在し，$d(x,y)<\delta$ を満たす $x,y\in X\setminus K_\varepsilon$ に対して，X のある連結な部分集合 P で $x,y\in P$ かつ $\operatorname{diam}P<\varepsilon$ となるものが存在する．

[1] において，以下のことを示した．

Theorem 3.6 (**Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化の完全性** cf. [1]). (X,d) をコンパクトでないプロパーな距離空間とする．

(1) このとき，(X,d) が ∞ で粗一様連結 (∞ で一様局所連結) であれば，$\overline{X}^d(u_dX)$ は完全コンパクト化である．

(2) (X,d) が局所連結ならば，$\overline{X}^d$ (u_dX) が X の完全コンパクト化である必要十分条件は X が ∞ で粗一様連結 (∞ で一様局所連結) であることである．

[1, Corollary 2.8 and 3.8]，[8]，[20]，Theorem 3.6 から以下の結果が得られる．

Corollary 3.7 (cf. [12]).　(1) $(\mathbb{R}_+,d)$ が 粗一様連結 (一様局所連結) ならば，$\nu_d\mathbb{R}_+$ $(u_d\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{R}_+)$ は *indecomposable continuum* になる．

(2) $(\mathbb{R}^n,d)$ $(n>2)$ が 粗一様連結 (一様局所連結) ならば，$\nu_d\mathbb{R}^n(u_d\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n)$ は *unicoherent continuum* になる．

(3) $(\mathbb{R}^n_+, d)$ $(n > 1)$ が 粗一様連結 (一様局所連結) ならば，$\nu_d\mathbb{R}^n_+(u_d\mathbb{R}^n_+ \setminus \mathbb{R}^n_+)$ は *unicoherent continuum* になる.

indecomposable continuum と unicoherent continuum の定義は [26] を参照されたい. 上述の結果と [24] から以下の結果が得られる.

Corollary 3.8. $\mathcal{S} = \{\nu_{d_2}\mathbb{R}^2, u_{d_2}\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2, \nu_{d_2|_{\mathbb{R}^2_+}}\mathbb{R}^2_+, u_{d_2|_{\mathbb{R}^2_+}}\mathbb{R}^2_+ \setminus \mathbb{R}^2_+, \nu_{d_1|_{\mathbb{R}_+}}\mathbb{R}_+, u_{d_1|_{\mathbb{R}_+}}\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+\}$ とおく. このとき，$\mathcal{S}$ に属する 2 つの空間は同相ではない.

Corollary 3.9. (X, d) をノルム線形空間 M の部分距離をもつコンパクトでない有限次元凸閉部分集合とする. このとき，(X, d) はプロパーな距離空間で，$\overline{X}^d$ は (X, d) の完全コンパクト化になっている. 特に，$\overline{\mathbb{R}^n}^{d_n}$ は n 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_n)$ の完全コンパクト化になっている.

Proof. 完全性は部分空間に遺伝することと，有限次元線形空間は Theorem 3.6 の条件を満たすことより以下の Claim を示せば十分である.

Claim : X を含む M の有限次元線形部分空間 L が存在する. 特に L 上のノルムから導かれる部分距離は X のプロパーな距離になっている.

$\lim_{n\to\infty} \dim L_n = \infty$ であるような M の有限次元部分線形空間の任意の上昇列 $L_1 \subset L_2 \subset \cdots$ に対し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in X \setminus L_n$ が取れたとする. このとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ から生成される凸空間は無限次元となるが，X に含まれるので有限次元となり矛盾する. よって，X を含む M の有限次元線形部分空間 L が存在する. 特に，M のノルムから導かれる L の距離はプロパーなので，X はプロパーな距離空間である. □

Smirnov コンパクト化に関しての類似した結果は [1] あるいは [3] を参照されたい.

4. ASYMPTOTIC 次元

asympototic 次元は Gromov が [19] において大域的な次元として定義した.

Definition 4.1 (asymptotic 次元). (X, d) を距離空間とする. $\operatorname{asdim}(X, d) \le n$ とは，任意の $r > 0$ に対して X の被覆 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n$ と $R > 0$ が存在して以下を満たす.

(1) 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して，$\operatorname{diam} U < R$.
(2) 任意の $i = 0, \ldots, n$ に対し、相異なる $U, U' \in \mathcal{U}_i$ に対して，$d(U, U') > r$.

asdim$(X,d) \leq n$ で asdim$(X,d) \not\leq n-1$ のときに asdim$(X,d)=n$ とする．
特に，G を群とし，その Cayley グラフを Cay(G)，そこでの道の長さから導かれる距離を d とすると，asdim $G=$ asdim(Cay$(G),d$) と決める．Cayley グラフは生成元に依存するが， asymptotic 次元の決め方は G の生成元の決め方に依存しないことが知られている．

Remark 4.2. asymptotic 次元に関して次の基本的な結果が知られている (cf. [7]).

(1) asdim$(\mathbb{R}^n, d_n) = n$.
(2) 任意の双曲群 G に対して asdim $G < \infty$(cf. [28]).
(3) $Y \subset X$ に対して， asdim$(Y, d|_Y) \leq$ asdim(X,d).
(4) ある $r > 0$ に対して Y が (X,d) の中で r-稠密ならば， asdim$(Y, d|_Y) =$ asdim(X,d).
(5) asdim$(X \times Y, d_X + d_Y) \leq$ asdim$(X, d_X) +$ asdim(Y, d_Y).

asymptotic 次元を研究する動機は以下の結果による．

Theorem 4.3 (cf. [32]). Γ を幾何学的有限群で asdim $\Gamma < \infty$ とする．このとき，基本群が Γ である多様体に関して *Novikov* 予想と *Gromov-Lawson* 予想が成立する．

この結果から，asymptotic 次元が有限になる十分条件を探すのが大きな目的となる．この章の残りでは粗一様連結性と asymptotic 次元の関係を述べる．最初に基礎的な例を挙げる．

Example 4.4 (cf. [6]). 任意の $n, k \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}^n$ の位相を変えないプロパーな距離 d が存在して asdim$(\mathbb{R}^n, d) = k$ を満たすものがある．

これは，$\mathbb{R}^k$ 内の $\mathbb{R}_+$ と同相な 1-稠密である部分空間を利用して構成する．ただし，粗一様連結性は望めない．つぎに，接合を利用して以下のことが示せる．

Theorem 4.5 (cf. [6]). $1 \leq k \leq n$ を満たす $n, k \in \mathbb{N}$ とする．このとき，以下の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ の位相を変えないプロパーな距離 $d_{n,k}$ が存在する．

(1) $(\mathbb{R}^n, d_{n,k})$ は粗一様連結.
(2) asdim$(\mathbb{R}^n, d_{n,k}) = \dim \nu_{d_{n,k}} \mathbb{R}^n = \operatorname{ind} \nu_{d_{n,k}} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \nu_{d_{n,k}} \mathbb{R}^n = k$.

$\mathbb{R}^n$ でなくてもいい場合は，次のような例を構成することができる．

Example 4.6 (cf. [6]). $2 \leq n \leq k$ を満たす $n, k \in \mathbb{N}$ とする．このとき，以下を満たすコンパクトでない n 次元多様体 $(M_{k,n}, \rho_{k,n})$ が存在する．

(1) $(M_{k,n}, \rho_{k,n})$ は粗一様連結.
(2) asdim$(M_{k,n}, \rho_{k,n}) = \dim \nu_{\rho_{k,n}} M_{k,n} = \operatorname{ind} \nu_{\rho_{k,n}} M_{k,n} = \operatorname{Ind} \nu_{\rho_{k,n}} M_{k,n} = k$.

次の結果がこの章の主定理になる．

Theorem 4.7 (cf. [6]). (X,d) をコンパクトでない1次元多面体で分割 $\mathcal{T}$ を持ち，以下の条件を満たすとする．

(1) d はプロパー．
(2) (X,d) は粗一様連結．
(3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|\{\sigma : \sigma \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^{(0)}, \operatorname{diam}|\sigma| < n\}|$ は有限．

このとき，$\operatorname{asdim}(X,d) = \dim \nu_d X = \operatorname{ind} \nu_d X = \operatorname{Ind} \nu_d X = 1$.

Corollary 4.8 (cf. [6]). X を $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{R}_+$ とし，プロパーな距離 d を持つとする．もし (X,d) が粗一様連結ならば，$\operatorname{asdim}(X,d) = \dim \nu_d X = \operatorname{ind} \nu_d X = \operatorname{Ind} \nu_d X = 1$ となる．

Remark 4.9. 上述の結果から「もし $(\mathbb{R}^n, d)$ が粗一様連結ならば，$\operatorname{asdim}(\mathbb{R}^n, d) \leq n$ か?」というような問題が考えられるが，これには反例がある．[14] において，$\mathbb{R}^8$ 上に一様可縮なリーマン計量 d が存在して $\operatorname{asdim}(\mathbb{R}^8, d) = \dim \nu_d \mathbb{R}^8 = \infty$ を満たすものがある．ここで，(X,d) が **一様可縮**であるとは，任意の $R > 0$ に対し，十分大きな $S > 0$ が存在して，任意の点 x について $B_R(x,d)$ が $B_S(x,d)$ の中で可縮であることをいう．

Example 4.4 から Corollary 4.8 までの Smirnov コンパクト化に対応する結果は [4]，[5] を参照されたい．

5. $\mathbb{R}_+$ の位相を変えないプロパー距離と Smirnov コンパクト化の剰余

[2]，[3] の中で以下のような問題を提起した．

Question 5.1 (cf. [2], [3]). あるプロパーな距離空間 (X,ρ) で $u_\rho X \setminus X$ が連結かつどんな $\mathbb{R}_+$ 上の距離 d に対しても $u_d \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+$ と $u_d X \setminus X$ が同相でないようなものが存在するか?

[5] において上述の問題の否定的な結果を導きだした．

Theorem 5.2 (cf. [5]). (X,d) をコンパクトでない連結かつプロパー距離空間とし，$u_d X \setminus X$ は連結とする．このとき，任意のコンパクトでない連結かつプロパー距離空間 (Y,ρ) に対し，Y の位相を変えないプロパー距離 ρ_Y が存在して $u_d X \setminus X$ と $u_{\rho_Y} Y \setminus Y$ は同相となるものがある．

Sketch of Proof. 次のように3段階に分けて証明する．

Step 1. コンパクトでない無限連結グラフ (P,σ) で，$u_d X \setminus X$ と $u_\sigma P \setminus P$ が同相なものを構成する．

Step 2. $\mathbb{R}_+$ の位相を変えないプロパーな距離 η で $u_\sigma P \setminus P$ と $u_\eta \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+$ が同相なものを構成する．

Step 3. Y の位相を変えないプロパー距離 ρ_Y で $u_\eta \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+$ と $u_{\rho_Y} Y \setminus Y$ が同相なものを構成する． □

REFERENCES

[1] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Perfectness of the Higson and Smirnov compactifications*, Colloq. Math. 107 (2007), 89-98.

[2] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Large inductive dimension of the Smirnov remainder*, to appear in Houston J. Math. available at arXiv:0708.0310

[3] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Remainders and Smirnov compactifications*, 数理解析研究所講究録 1492, 1–21.

[4] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Large inductive dimension of remainders of Smirnov compactifications*, 数理解析研究所講究録 1531, 55–62.

[5] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *The Smirnov remainders of uniformly locally connected proper metric spaces*, submitted.

[6] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Dimension of the Higson corona and coarse uniform connectedness*, submitted.

[7] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension in Bedlewo*, Preprint arXiv:math.GR/0507570 (2005)

[8] D. P. Bellamy, *A non-metric indecomposable continuum*, Duke Math. J. 38 (1971), 15–20.

[9] B. H. Bowditch, *A course on geometric group theory*, MSJ Memoirs, 16. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2006.

[10] M. Bridson and A. Haefliger *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften , 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[11] A. Calder, *The cohomotopy groups of Stone-Čech increments*, Indag. Math. 34 (1972), 37–44.

[12] N. Chinen, On the local connectedness and aposyndesis of the remainders of Higson and Smirnov compactificaitons, preprint.

[13] A. N. Dranishnikov, *Asymptotic topology*, Uspekhi Mat. Nauk 55 (2000), no. 6(336), 71–116; translation in Russian Math. Surveys 55 (2000), no. 6, 1085–1129.

[14] A. N. Dranishnikov, S. C. Ferry and S. Weinberger, *Large Riemannian manifolds which are flexible*, Ann. of Math. (2) 157 (2003), 919–938.

[15] A.N. Dranishnikov, J. Keesling and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology 37 (1998), 791-803.

[16] A.N. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Universal spaces for asymptotic dimension*, Topology Appl. 140 (2004), 203–225.

[17] R. Engelking, *General Topology*, Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[18] R. Engelking, *Theory of Dimension Finite and Infinite*, Helderman Verlag, Berlin, 1995.

[19] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, vol. 2 London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[20] A. Illanes P., *Hereditary multicoherence degree and multicoherence degree of remainders of perfect extensions*, Glasnik Math. 42 (1987), 463–479.

[21] I. Kapovich and N. Benakli, *Boundaries of hyperbolic groups*, Combinatorial and geometric group theory , 39–93, Contemp. Math., 296, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[22] J. Keesling, *Decompositions of the Stone-Čech compactification which are shape equivalences*, Pacific J. Math. 75 (1978), no. 2, 455–466

[23] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology Proceedings 19 (1994), 129-148.

[24] J. Keesling, *Subcontinua of the Higson corona*, Top. Appl. 80 (1997), 155-160.

[25] Y. Kodama and K. Nagami, *General topology* (*Japanese*), Iwanami, Tokyo, 1974.

[26] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[27] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, 2003.

[28] J. Roe, *Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 2489–2490.
[29] E.G. Sklyarenko, *On perfect bicompact extensions*, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 238-240.
[30] R.C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.
[31] R.G. Woods, *The minimum uniform compactification of a metric space*, Fund. Math. 147 (1995), 39-59.
[32] G. Yu, *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 2, 325–355.

KURE NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY, 2-2-11 AGA-MINAMI KURE-SHI HIROSHIMA 737- 8506, JAPAN
E-mail address: `akaike@kure-nct.ac.jp`

OKINAWA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY, NAGO-SHI OKINAWA 905-2192, JAPAN
E-mail address: `chinen@okinawa-ct.ac.jp`

MIYAKONOJO NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY, 473-1 YOSHIO-CHO MIYAKONOJO-SHI MIYAZAKI 885-8567, JAPAN
E-mail address: `tomoyasu@cc.miyakonojo-nct.ac.jp`