

# ジャンプ拡散過程におけるデルタヘッジ ～MJD モデルと Kou モデルの比較～

電気通信大学システム工学科 伊藤 翔 (Sho Ito)  
電気通信大学システム工学科 宮崎 浩一 (Koichi Miyazaki)  
Department of systems Engineering,  
The University of Electro-Communications

## 1 はじめに

オプション評価式が Black and Scholes[1973] (以下, Black and Scholes は BS と略す) によって与えられてから 30 年以上経過した今日では, オプションが金融商品の一つであり, 「所定の期日 (満期  $T$ ) に原資産をあらかじめ定められた価格 (権利行使価格  $K$ ) で売買する権利」であることぐらいは, 金融関係者のみならず広く知られるようになった. また, BS 式に関する解説書は数多く出版されており, BS 式の主な導出法としてリスク中立評価法とデルタヘッジ法の 2 通りが示されている (例えば宮崎 [2005]を参照).

金融の実務と直接関連するデルタヘッジ法に関してみると, BS 式の導出に際しては, 連続的にヘッジ可能であるといった非現実的な仮定が課されており, この仮定がどの程度のものであるか, 具体的には, 連続的にヘッジできない現実の状況下ではどの程度のヘッジ誤差が生じるのかについて検討した文献は極めて少なく Kamal and Derman[1999], 矢萩・宮崎[2005]が挙げられるに留まる. 前者では, 株価過程として BS モデルと同様に幾何ブラウン運動 (株価収益率は一般化ウィナー過程) を仮定して株価のサンプルパスを数多く発生させ, 各株価のサンプルパスに対してデルタヘッジを行った際に収益が 0 から乖離する (オプションを連続的にヘッジすることが可能なら 0 から乖離しない) 程度やバイアスなどを検討している. また, 後者では, 売却するオプションに織り込まれている満期までの価格変動率 (インプライド・ボラティリティ) が実現するボラティリティよりもどの程度大きければ, 連続的にデルタヘッジができない現実の状況下においても一定の有意水準の下で収益を上げられるかについて売買コストを含めたシミュレーションに基づき考察した.

上記の先行研究は, 何れも株価過程として幾何ブラウン運動 (株価収益率は一般化ウィナー過程) を仮定している. しかし, 現実には大きなニュースが発生する際には, 株価がジャンプすることがしばしばみられるため, 株価過程が幾何ブラウン運動に従う場合のみを検討するだけでは不十分である. そこで, 本研究では株価過程がジャンプを含んでいる場合のデルタヘッジ収益のばらつきに関して数値実験を行った. ジャ

ンプを含むプロセスとしては、MJD モデルとジャンプの大きさが上下で非対称な指数分布に従うような Kou モデルを採り上げる。そして、オプショントレーダーが BS デルタ量に基づきデルタヘッジを行うと、先行研究に見られる収益の 0 からの乖離の程度やバイアスなどが MJD モデルや Kou モデルにおけるパラメータに対してどの程度の感応度を持つかについて確認する。

本論文の構成は、以下の通りである。次節では、株価過程が幾何ブラウン運動に従う場合、MJD モデルまたは Kou モデルに従う場合の 3 通りに分けて説明し、それぞれのデルタヘッジについて解説する。節 3 では、数値実験の手法と結果を示す。最終節では、まとめと結語を付す。

## 2 株価過程とデルタヘッジ

### 2.1 株価過程

BS モデルにおいて株価過程は、リスク中立測度の下で式(1)のような幾何ブラウン運動に従うと仮定されている。

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \alpha d\tilde{W}_t \quad (1)$$

ここで  $r$  は無リスク金利、 $\sigma$  はボラティリティ、 $d\tilde{W}_t$  はリスク中立測度におけるウィナー過程となる。式(1)において、 $rdt$  は株価リターンのトレンドを表すドリフト項であり、 $\alpha d\tilde{W}_t$  は株価リターンの変動を表す確率項である。よって、BS モデルにおける単位時間当りの株価リターンは、標準偏差(ボラティリティ)が  $\sigma$  の正規分布に従うことになる。また株価過程が幾何ブラウン運動に従うと仮定されている場合のオプション評価式いわゆる BS 式は以下に示す通りである。

$$BS(S_t, T-t, K, \sigma^2, r) = S\Phi(d_1) - K \exp(-r(T-t))\Phi(d_2) \quad (2)$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

続いて本研究で注目した、ジャンプ拡散過程について述べる。まず初めに、MJD モデルを採用する場合を考える。MJD モデルでは株価リターンを表現するために一般化ウィナー過程にジャンプ過程を加えたもので、式(3)のようにモデル化される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \alpha)dt + \sigma_{MJD}d\tilde{W}_t + (\exp(\omega + \eta\varepsilon) - 1)d\tilde{N}_t \quad (3)$$

ここで  $\sigma_{MJD}$  は株価リターンの連続的な変動の大きさを表す拡散係数であり、 $d\tilde{W}_t$  はリスク中立測度におけるウィナー過程、 $d\tilde{N}_t$  はリスク中立測度の下でインテンシティ(以下、強度と呼ぶ)が  $\lambda$  のポアソン過程である。 $\exp(\omega + \eta\varepsilon)$ (以下、これを  $J$  とおく)は、ジャンプが発生した際のジャンプ幅であり、ジャンプ幅が平均  $\omega$ 、分散  $\eta^2$  の正規分布に

従うことを表している。ドリフト項の $\alpha$ は、式(3)の第3項の期待値に相当しており、「ジャンプ幅率( $J-1$ )の期待値」と「ジャンプ回数の期待値」の積として算出され、式(3)の第1項のようにドリフト項において $\alpha$ を無リスク金利から差し引くことによって株価リターン期待値は無リスク金利 $r$ となる。式(3)で与えられる確率微分方程式の解として、時刻 $t+\Delta t$ の株価 $S_{t+\Delta t}$ は式(4)のように時刻 $t$ における株価 $S_t$ を用いて表せる。

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left\{ \left( r - \alpha \frac{\sigma_{MJD}^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_{MJD} d\tilde{W}_{\Delta t} + \sum_{i=1}^{N_{\Delta t}} \ln(J_i) \right\} \quad (4)$$

ここで、 $N_{\Delta t}$ は微小時間 $\Delta t$ におけるジャンプの回数、 $J_i$ は $i$ 回目のジャンプの幅である。式(4)から単位時間( $\Delta t=1$ )の株価リターン $X_{\Delta t} = \ln(S_{t+\Delta t}/S_t)$ が従う分布の標準偏差 $\sigma$ は式(5)で与えられる。

$$\sigma^2 = \sigma_{MJD}^2 + \lambda \eta^2 + \lambda \omega^2 \quad (5)$$

ここで、株価リターンにジャンプを含まないBSモデルのボラティリティとMJDモデルのボラティリティとの相違点をそれぞれ2乗した分散の形で確認しておく。BSモデルのボラティリティが全て拡散項から得られるのに対して、式(5)をみるとMJDモデルのボラティリティは、拡散項から得られる $\sigma_{MJD}^2$ とジャンプ過程から得られる $\lambda \eta^2 + \lambda \omega^2$ から構成されることがわかる。また、ジャンプ過程から得られる $\lambda \eta^2 + \lambda \omega^2$ は、強度とジャンプ幅の分散との積から成る $\lambda \eta^2$ と、強度とジャンプ幅の平均の2乗との積から成る $\lambda \omega^2$ との和であることがわかる。式(4)で与えられる解から式(5)の標準偏差を導出する詳細は佐々木・宮崎・野村[2006]を参照されたい。また株価過程がMJDモデルに従う際にオプションの価格はMerton[1976]にあるように式(6)を用いて算出できる。

$$F_{MJD}(S_t, T-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda'(T-t)) (\lambda'(T-t))^n}{n!} f_n(S, T-t) \quad (6)$$

$$f_n(S, T-t) = BS(S, T-t, K, v_n^2, r_n)$$

$$v_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\eta^2}{(T-t)}$$

$$r_n = r - \alpha + \frac{n \left( \omega + \frac{\eta^2}{2} \right)}{T-t}$$

$$\lambda' = \lambda(1 + \alpha/\lambda)$$

本研究で注目したもう1つの代表的なジャンプ過程であるKouモデルは、株価リターンを表現するために一般化ウィナー過程にMJDモデルとは異なるジャンプ過程を加えたもので、式(7)のようにモデル化される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \beta)dt + \sigma_{Kou} d\tilde{W}_t + (V-1)d\tilde{N}_t \quad (7)$$

ここで、 $\sigma_{Kou}$ はMJD同様に株価リターンの連続的な変動の大きさを表す拡散係数であり、 $d\tilde{W}_t$ はリスク中立測度におけるウィナー過程、 $d\tilde{N}_t$ はリスク中立測度のもとでの強度 $\lambda$ のポアソン過程であることもMJDと同様である。MJDモデルとの違いとして、ジャンプ幅に違いがあり、Kouモデルにおいてジャンプ幅 $V$ は非対称のダブル指数分布密度関数である。ジャンプ発生時におけるジャンプ幅は毎回が独立で同一の分布の列であり、非負の確率変数である $\gamma = \log(V)$ としてみると、非対称の2乗指数分布密度関数であるので、式(8)のように表現できる。

$$f_\gamma(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{y \geq 0} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{y < 0} \quad (8)$$

$$\eta_1 > 1, \eta_2 > 0$$

ここで、 $p, q$ はそれぞれ上方向と下方向のジャンプの確率であり、 $p, q$ は $p+q=1, p, q \geq 0$ という条件を持つ。式(8)を書き換えると式(9)のようになる。

$$\log(V) = \gamma = \begin{cases} \xi^+ & \text{with probability } p \\ -\xi^- & \text{with probability } q \end{cases} \quad (9)$$

ここで用いられている $\xi^+$ と $\xi^-$ は指数分布における確率変数であり、平均はそれぞれ $1/\eta_1$ と $1/\eta_2$ である。また、 $d\tilde{W}_t, d\tilde{N}_t, \gamma$ はそれぞれ独立である。式(7)の $\beta$ はMJD同様「ジャンプ幅率 $\nu-1$ の期待値」と「ジャンプ回数の期待値」の積であり、ジャンプ幅 $V$ の期待値は式(10)に示すとおりである。

$$E(V) = E(e^\gamma)$$

$$= p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} \quad \eta_1 > 1, \eta_2 > 0 \quad (10)$$

MJDモデルとKouモデルはジャンプ幅を表現している確率変数のみ異なり、ジャンプの発生に関する確率変数は同じである。Kouモデルにおいて式(4)を考える際には、ジャンプ幅 $J_t$ が $V_t$ になったと考えればよい。またKouモデルにおける標準偏差 $\sigma$ は、式(11)で与えられる。

$$\sigma^2 = \sigma_{Kou}^2 + \lambda \left\{ pq \left( \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right)^2 + \left( \frac{p}{\eta_1^2} + \frac{q}{\eta_2^2} \right) \right\} + \lambda \left( \frac{p}{\eta_1} + \frac{q}{\eta_2} \right)^2 (1-\lambda) \quad (11)$$

ここでは、拡散項から得られるボラティリティは $\sigma_{Kou}^2$ であり、残りの部分がジャンプ過程から得られるものである。また、株価過程がKouモデルに従う際にオプションの価格は式(12)を用いて算出できる。

$$F_{Kou}(S, T-t) = S Y \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 - \beta, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \log \left( \frac{K}{S_t} \right), T-t \right)$$

$$- Ke^{-r(T-t)} Y \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \beta, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \log \left( \frac{K}{S_t} \right), T-t \right) \quad (12)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{1 + \beta/\lambda}, \tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1, \tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 1, \tilde{\lambda} = \beta + \lambda$$

$$Y(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) = P\{Z(T) \geq a\}$$

Kou モデルにおいて、 $Z(T)$ は式(7)にある $S_t$ の満期 $T$ における分布を表す確率変数である。詳しい導出は Kou[2002]を参照されたい。

本研究の主たる関心は、BS モデルのボラティリティと各ジャンプモデルのボラティリティを揃えたうえで、次節で示すデルタヘッジを行うことであり、デルタヘッジ誤差が生じる構造を把握した上で、デルタヘッジ誤差がBS モデルの場合より大きくなることを確認し、その大きさやバイアス、各パラメータに対する感応度などについての数値実験を行うことである。

## 2.2 デルタヘッジ

ここでは、デルタヘッジとして、株式のコール・オプション（以下、オプションと呼ぶ）を売却したリスクを、株式を購入することでヘッジするものを探り上げて説明する。売買が逆の場合も議論は全く同じである。

### 株価過程が幾何ブラウン運動に従う場合

株価過程（式(1)）に伊藤の公式を適用すれば、オプション価格 $f$ の微小時間の価値の変化 $df$ は式(13)で与えられる。

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t d\tilde{W}_t \quad (13)$$

式(13)において確率項は $\frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t d\tilde{W}_t$ であり、この部分が変動することがオプションのリスクである。オプション $f$ を1単位売却した場合におけるオプションの価格変動リスクは、株式をデルタ単位 $(\partial f / \partial S_t)$ 購入することによりヘッジ可能である。実際、ヘッジしたポートフォリオ $\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t$ の変動 $d\Pi$ を確認すると、売却したオプションの確率変動と購入した株式の確率変動とが相殺されて式(14)のように確定的な過程となる。

$$d\Pi = - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt = r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t \right) dt = r\Pi dt \quad (14)$$

式(12)は確定的な過程であり、確率項によるリスクが無い場合ポートフォリオ $\pi$ のリターンは無リスク金利 $r$ で運用した収益 $r\Pi dt$ に等しく、これらを実際に等式表現したものが、Black-Scholes-Merton(以下、BSM)偏微分方程式であり、満期におけるオプションのペイオフを境界条件としてBSM 偏微分方程式を解けば、式(2)にあるオプション価格 $f$ を与える有名なBS公式が得られる。

上記の議論を単純化して表現すると、

$$-(1 \text{ 単位のオプション}) + (\text{デルタ単位の株式}) = (\Pi \text{ 単位の割引債})$$

となり、オプションがデルタ量の株式と割引債を用いてダイナミックに複製されることを表している。株式の保有量であるデルタ量の変動は、ボラティリティの大きさに大きく依存し、他のパラメータが同じであればボラティリティが大きくなるほどオプションの複製コスト（オプション価格）は大きくなる。繰り返しになるが、オプションを1単位売却して、売却したオプションを複製すべくデルタヘッジを行って得られ

る収益は0となる。しかしながら、現実には連続的にデルタヘッジを行うことができないから僅かながら損益（誤差）が発生し、この誤差に関して議論した文献が節1で紹介した Kamal and Derman[1999], 矢萩・宮崎[2005]である。

### 株価過程がジャンプモデルに従う場合

株価過程は MJD モデルでは式(4), Kou モデルでは式(4)の  $J_i$  を  $v_i$  とすれば良いことは上述した。このため MJD モデルも Kou モデルもジャンプ幅を  $J$  と統一することで、ここでは同様に扱えるので、ジャンプ幅を  $J$  と置き議論すすめる。それに合わせて「ジャンプ幅率  $J-1$  の期待値」と「ジャンプ回数の期待値」の積を  $\alpha$ , 連続成分のボラティリティを  $\sigma_j$  とする。またジャンプ過程に対し伊藤の公式を適用すれば、オプション価格  $f$  の微小時間の価値の変化  $df$  は式(15)で与えられる。

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (r - \alpha) S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_j^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma_j S_t d\tilde{W}_t + (f(JS_t) - f(S_t)) d\tilde{N}_t \quad (15)$$

式(15)において確率変動を与えるのは第2項と第3項であり、前者が拡散項から生じる連続的な確率変動であり、後者がジャンプ過程から生じる不連続な確率変動となる。オプションを1単位売り、デルタ単位の株式を購入して得られるポートフォリオ  $\Pi$  の微小時間の価値変化  $d\Pi$  は、式(16)で与えられる。

$$d\Pi = - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_j^2 S_t^2 \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (J-1) S_t - (f(JS_t) - f(S_t)) \right) d\tilde{N}_t \quad (16)$$

式(16)の右辺における第1項目のドリフト項に、ジャンプモデルにおける偏微分方程式(17)を代入して整理すると式(16)で与えたジャンプモデルにおけるデルタヘッジポートフォリオ  $\Pi$  の微小時間における価値変化  $d\Pi$  は、式(18)のように整理できる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_j^2 S_t^2 = \left( -(r - \alpha) S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + r f \right) dt - \lambda E[f(JS_t) - f(S_t)] \quad (17)$$

$$d\Pi = r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S_t} \right) dt - \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} E[J-1] S_t - E[f(JS_t) - f(S_t)] \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (J-1) S_t - (f(JS_t) - f(S_t)) \right) d\tilde{N}_t \quad (18)$$

ここで、デルタヘッジポートフォリオ  $\Pi$  の微小時間における価値変化  $d\Pi$  を、株価過程が幾何ブラウン運動に従う場合 (式(14)) と株価過程がジャンプモデルに従う場合 (式(18)) に関して比較すると、相違点として後者の場合には、

$$- \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} E[J-1] S_t - E[f(JS_t) - f(S_t)] \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (J-1) S_t - (f(JS_t) - f(S_t)) \right) d\tilde{N}_t \quad (19)$$

が新たに付加されていることがわかる。式(19)について注目すると、第1項は、単位時間あたりのジャンプ成分に関するデルタヘッジポートフォリオの価値変化の期待値を表しており、連続的に表現されている。ここで期待値は、2通りの意味で用いられている。一つは、ジャンプが発生する頻度に関するもので、それはパラメータ  $\lambda$  で

表現される。もう一方は、ジャンプ幅に関するもので、株価に関しては  $E[J-1]S_t$  で表され、オプション価格に関しては  $E[f(JS_t) - f(S_t)]$  で表される。これに対し、第2項は、ジャンプ成分に関するデルタヘッジポートフォリオの価値変化の実現値（ここでは、第2項の確率過程から発生する多くのサンプルの一つ一つという気分を表現するために実現値という用語を採用した）を表しており、不連続である。理論的にこの2つの項をヘッジする手法はないが、式(19)の期待値をとれば0となり、式(18)は式(14)と同じ枠組みに帰着される。ここで収益が期待値0から外れる要因を述べる。第2項は満期まで「日々の期待ジャンプ回数」×「日々のジャンプ発生によるデルタヘッジ誤差の期待値」を足し合わせたものである。どちらか一方が期待値と異なれば収益にばらつきが生まれる要因となる。まず期待ジャンプ回数との差に着目する。実現したジャンプが期待値である  $\lambda dt$  ではない場合に、第3項は期待値である第2項より大きくまたは小さくなる可能性があり、これにより収益がばらつく。続いて「日々のジャンプ発生によるデルタヘッジ誤差の期待値」と第3項のジャンプが生じた際の影響に着目する。この2つの決定的な違いとして、株価×デルタである。第2項は日々の株価×デルタが用いられているが、第3項は実際ジャンプが起こったときの株価×デルタである。この違いに積として関わっているのはジャンプ幅である。このジャンプ幅が大きければ、当然この差による影響が大きくなり、ばらつきが大きくなる。

本研究は、上記に詳述したように式(19)部分が通常の幾何ブラウン運動におけるデルタヘッジとは異なることを明確に指摘したうえで、その相違点がどの程度のマグニチュードであるかについて、実験を行う。

### 3 数値実験

#### 3.1 基本パラメータ値と実験の手順

オプションの基本パラメータを表1に、MJDモデルの基本パラメータを表2に、Kouモデルの基本パラメータを表3に示した。数値実験の対象となるオプションの基本パラメータを確認すると、現在価格の株価が15000円、残存期間が60営業日、ボラティリティは日率1.26%（年率20%）、無リスク金利は日率0.02%（年率5%）である。MJDモデルの基本パラメータは、ジャンプの頻度として強ジャンプ（日率0.32回）と弱ジャンプ（日率0.17回）の2通りが用意されている。また、強ジャンプと弱ジャンプの双方において、ジャンプ幅の期待値が正負（±0.008）の何れの場合も検討する。ここでの大前提は、MJDモデルにおけるどのようなパラメータセットも、式(4)で与えられる出来上がりのボラティリティが日率1.26%（年率20%）となるように設定されていることである。Kouモデルの基本パラメータとして、ジャンプ頻度は日率0.17回、上方ジャンプパラメータ  $\eta_1$  を80,70,60、下方ジャンプパラメータ  $\eta_2$  を60,70,80とそれぞれおく。  $\sigma_{kou}$  はKouモデル全体のボラティリティを日率1.26%（年率20%）に合わせるために調節した。

表1 オプションの基本パラメータ

$S_0$ 円	$T-t$ 日	$\sigma$ %(日率)	$r$ %(日率)
15000	60	1.26	0.02

表2 MJD モデルの基本パラメータ

	$\lambda$ 回/日	$\omega$	$\eta$	$\sigma_{MJD}$ %(日率)
強ジャンプ	0.32	$\pm 0.008$	0.02	0.34
弱ジャンプ	0.17	$\pm 0.008$	0.02	1.12

表3 Kou モデルの基本パラメータ

	$\lambda$ 回/日	$p$	$\eta_1$	$\eta_2$
ジャンプ1	0.17	0~1(0.2刻み)	80	60
ジャンプ2	0.17	0~1(0.2刻み)	60	80
ジャンプ3	0.17	0~1(0.2刻み)	70	70

数値実験の基本的な手順は、次に示す(I)~(IV)の通りである。

- (I) 1単位売却するオプションの価格を導出する。
- (II) 各モデルに従う株価のサンプルパスを1000本発生させる。
- (III) サンプルパス毎にデルタヘッジを行う。但しリバランスは1営業日ごとに行い、リバランスの際のコストは無リスク金利で借り入れる。
- (IV) オプションの売却代金を無リスク金利で運用したもののからリバランスの際に借り入れたコストを差し引いた差額を収益(誤差)とする。

### 3.2 実験結果

節2で述べたように、株価過程がジャンプモデルに従う場合でも幾何ブラウン運動に従う場合と同様にデルタヘッジ収益の期待値は0となる。しかしパス毎にデルタヘッジを行った収益は0から乖離する。この乖離の主な要因として(1)デルタヘッジのリバランスが連続的ではない、(2)株価過程自体にジャンプが加わっているため連続的でない、の2点が挙げられる。Kamal and Derman[1999]、矢萩・宮崎[2005]は、(1)に関して検討しており、本研究では(1)と(2)を合わせた要因によるデルタヘッジ誤差をジャンプの頻度とジャンプ幅の両面から数値例に基づいて調べる。加えて、(1)と(2)を



合わせた要因によるデルタヘッジ収益の標準偏差と(1)の要因のみのデルタヘッジ収益の標準偏差を比較することで、(2)の要因のみによるデルタヘッジ収益の標準偏差の大きさを凡そ把握しておく。具体的には、ジャンプ幅パラメータの平均と分散が共に0の場合にはジャンプは無く、ボラティリティが拡散項のみで生成されることから、節 3.2.2 のジャンプ幅パラメータに関するデルタヘッジ収益の感応度分析において、ジャンプ幅パラメータの平均と分散が共に0の場合のデルタヘッジ収益の標準偏差も合わせて掲載する。

### 3.2.1 実現ジャンプ回数とデルタヘッジの収益

ここでは、ジャンプモデルにおけるデルタヘッジ収益をジャンプの頻度とジャンプ幅の両面から考察する。図 1,2 には、実験手順 (II) において発生させた 1000 本のサンプルパスを各パスに含まれるジャンプの回数ごとに分け、各パスに基づいてデルタヘッジを行った際の収益をプロットした。よって、横軸にあるジャンプ回数差とは、各パスにおけるジャンプの実現回数から強ジャンプや弱ジャンプで期待される期待ジャンプ回数を差し引いたものである。図 1 は MJD モデルのパラメータ値としてジャンプ幅の期待値が正のものを採用した結果であるが、ジャンプ幅の期待値が負の場合も同様の結果であった。また図 2 の Kou モデルに関しては、上方ジャンプ確率が  $p=0.6$ 、ジャンプ 3 のパラメータ値  $\lambda=0.17$  に加えて  $\lambda=0.32$  の場合も合わせて示した。図 1、図 2 から、次の 4 点が読み取れる。

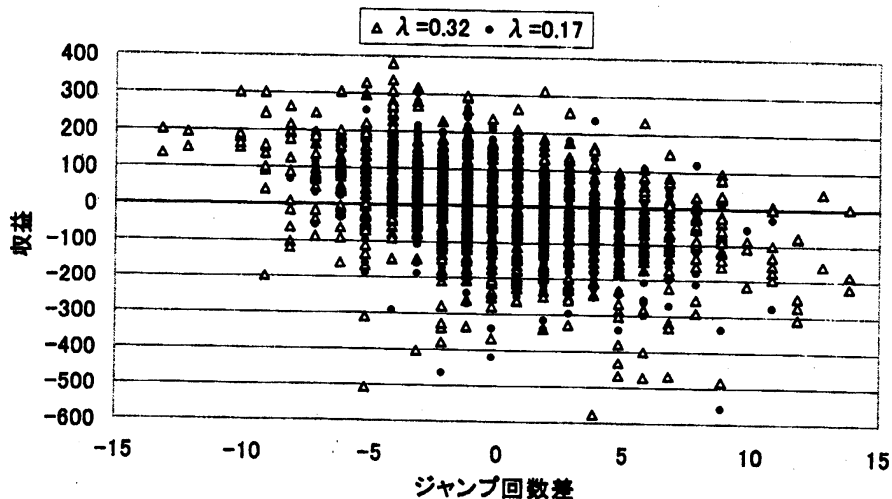


図 1 MJD モデルにおける期待ジャンプ回数からの乖離と収益のばらつき

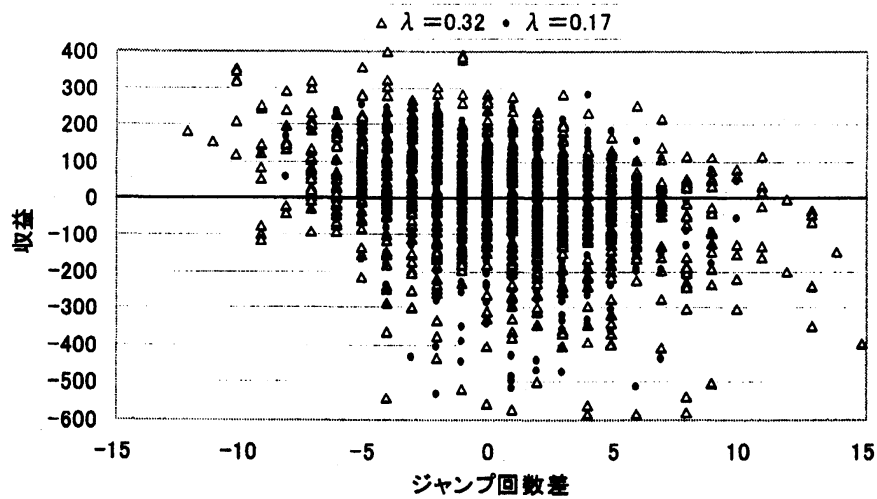


図2 Kouモデルにおける期待ジャンプ回数からの乖離と収益のばらつき

(実験結果)

- 図1のMJDモデルと図2のKouモデルの収益のばらつきを見ると、ジャンプ回数差と収益との関係にはモデル間の差異が見られない。よって、以下では実験結果を図1に則して言及する。
- 図1においてジャンプ回数の差が-3から+3の範囲を逸脱するパスは概ね強ジャンプの場合である。
- 図1においてジャンプ回数の差が-3から+3程度の領域では、強ジャンプと弱ジャンプの場合でデルタヘッジ収益のばらつきに大きな差異は見られない。
- 全体的にジャンプ回数の差がマイナスからプラスへなるに従って、デルタヘッジの収益はプラスからマイナスへと変わるバイアスがあり、このバイアスは、ジャンプ回数の差が-3以下の領域と+3以上の領域を比較すると顕著に見られる。

### 3.2.2 ジャンプ幅パラメータに関するデルタヘッジ収益の感応度

まずMJDモデルの結果から見ていく。強度パラメータ $\lambda$ を0.17に固定したうえで、ジャンプ幅の平均パラメータ $\omega$ とジャンプ幅の標準偏差パラメータ $\eta$ を変化させてデルタヘッジ収益の標準偏差がどのように影響を受けるかについて、それぞれ、図3、図4に示した。節3.2.1と同様に、式(5)で与えられる出来上がりのボラティリティが日率1.26%（年率20%）となるような設定は維持する。よって、ジャンプ幅パラメータ $\omega$ 、 $\eta$ が大きくなる設定では拡散パラメータ $\sigma_{MJD}$ は小さくなっていることに注意されたい。図3、図4から、次の3点が読み取れる。

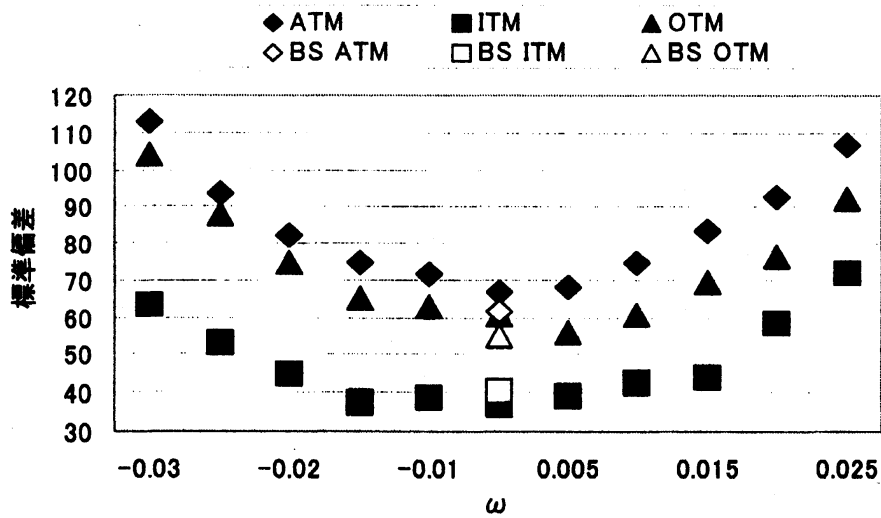


図3 ジャンプ幅の平均 $\omega$ に関する感応度

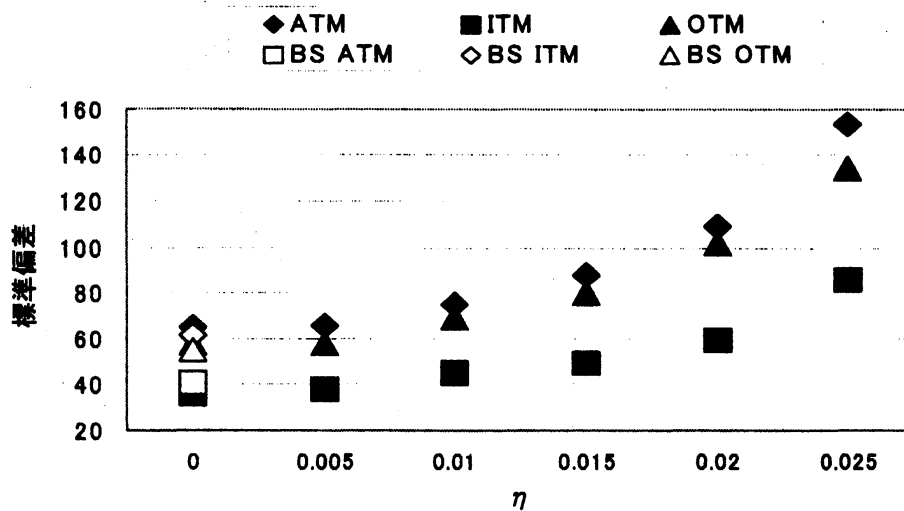


図4 ジャンプ幅の標準偏差 $\eta$ に関する感応度

(実験結果)

- 図3より、ジャンプ幅の平均パラメータ $\omega$ が正負の何れの方角であれ、0から乖離するに従ってデルタヘッジ収益の標準偏差は増大している。
- 図4より、ジャンプ幅の標準偏差パラメータ $\eta$ が0から乖離するに従って、デルタヘッジ収益の標準偏差は増大している。
- デルタヘッジ収益の標準誤差の水準は、何れのジャンプパラメータ値の下でも、大きい順にATMオプション、OTMオプション、ITMオプションとなる。

(注)上記において、ATM オプション、OTM オプション、ITM オプションとは、コールオプションの場合、順に、権利行使価格が現在の株価に等しい、大きい、小さいオプションのことである。図 3、図 4 では、OTM オプション、ITM オプションの権利行使価格をそれぞれ、16500 円、13500 円とした。

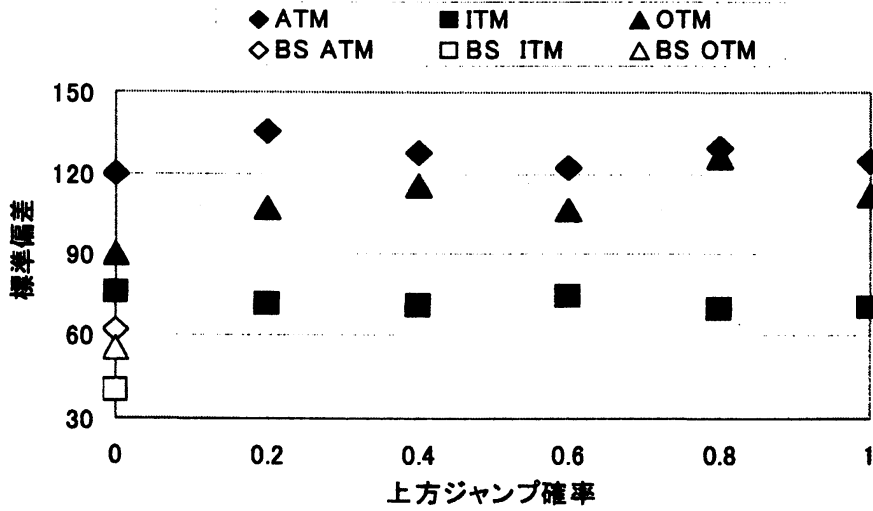


図 6  $\eta_1 = 80, \eta_2 = 60$ における上方確率  $p$  に関する感応度

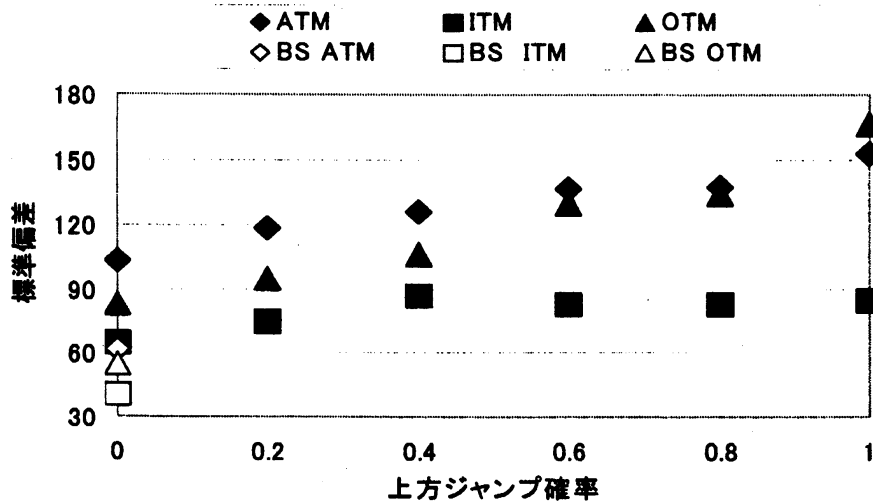


図 7  $\eta_1 = 60, \eta_2 = 80$ における上方ジャンプ確率  $p$  に関する感応度

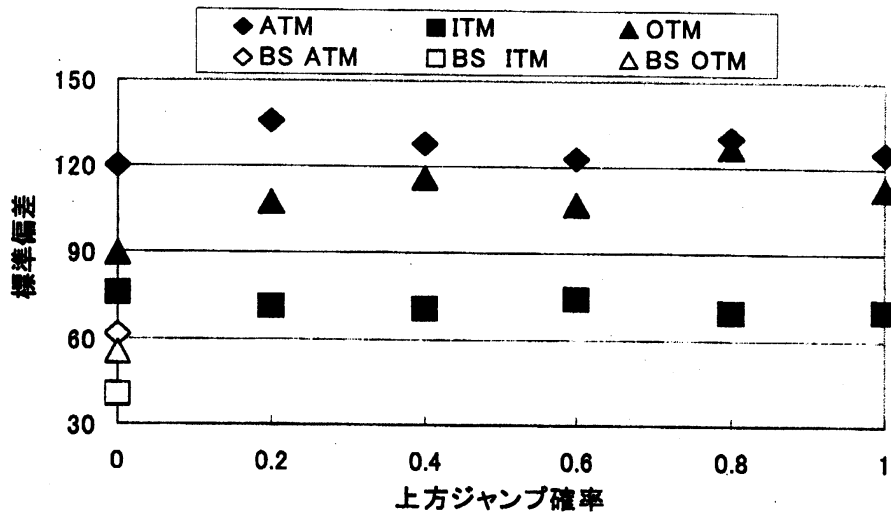


図8  $\eta_1 = 70$ ,  $\eta_2 = 70$ における上方ジャンプ確率  $p$  に関する感応度

#### (実験結果)

- 図6のように下方ジャンプ幅が大きい場合には, ITM, ATM オプションは下方ジャンプの発生する確率  $(1-p)$  が大きくなるにつれて標準偏差が大きくなっていく.
- 図7の上方ジャンプ幅が大きい場合には, OTM, ATM オプションは上方ジャンプの発生確率  $p$  が大きくなると標準偏差が大きくなっていく.
- どちらの方向のジャンプ幅も同じならば, 標準偏差は上方ジャンプの発生確率  $p$  に関する感応度をあまりもたない.

#### 4 まとめと結語

本研究では, 連続成分に加えてジャンプ成分も含むモデルとしてMJDモデルとKouモデルに注目し, 株価がそれらのモデルに従う場合に, まず, デルタヘッジ誤差(収益)がジャンプ回数差, ジャンプ幅の2つの点から生じることを明確に指摘した. 次に, ジャンプパラメータに関するデルタヘッジ誤差(収益)のばらつきのマグニチュードや感応度を数値例によって検証した.

## 参考文献

- [1] C. He, J.S. Kennedy, T. Coleman, P.A. Forsyth, Y. Li and K. Vesta: Calibration and Hedging under Jump Diffusion (2005) 18-21
- [2] M. Kamal and E. Derman: Correcting Black-Scholes, *Risk*, pp82-85 (1999)
- [3] S. G. Kou: A Jump-Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science*, (2002) 1086-1101.
- [4] R. C. Merton: Option Pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3 (1976) 125-144.
- [5] D.ラムベルトン, B.ラペール: 『ファイナンスへの確率解析』, 朝倉書店, (2000)
- [6] 宮崎浩一: 『証券分析への招待』, サイエンティスト社, (2005)
- [7] 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: Edgeworth 展開に基づくオプション評価～原資産収益率が Merton の Jump-Diffusion モデルに従う場合～, *応用統計学*, 32, No2 (2006) 113-128.
- [8] 東京大学教養学部統計学教室編: 『統計学入門』, 東京大学出版会, (1991)
- [9] 矢萩一樹, 宮崎浩一: デルタヘッジによる収益の不確実性に関する検証モデル, *情報処理学会論文誌: 数理モデル化と応用*, 46 No. SIG 10 (TOM12) (2005) 158-171.