数理解析研究所講究録
第 1580 巻 2008 年 114-123

NIG レヴィ 過程下における効率的な準モンテカルロ法を用いたオプション評価

東北大学大学院・経済学研究科 今井潤一 (Junichi Imai)[1]
Graduate School of Economics and Management,Tohoku University

1 イントロダクション

ブラック・ショールズによるヨーロピアンコールオプションの評価公式の提案以来，オプション評価は，理論と実務が共に大きく発展した．彼らのモデルでは株価が幾何ブラウン運動に従うと想定されていた．それ以降数多くのモデルが提案されてきているが近年に至るまで，それらの大部分はガウス過程にとどまっていた．一方，様々な種類の資産価格の収益率が正規分布で表せないクラスの分布であることが多くの実証分析において指摘されはじめた．古くは，Mandelbrot (1963) がこの点を指摘し，それに代わる分布として安定分布を提案している．また，Cont (2001) はいわゆる"stylized empirical facts"について議論しているが，分布の裾野の厚さや 4 次モーメントの違いなど価格変化の非正規性はその中心に位置しているといえる．すなわち，より正確な資産価格のモデリングのためには，実証データを正しく反映する正規性を有しない確率過程を用いる必要が認識されはじめている．

それに対応して，多くの理論研究では株価変動を表す新たな確率過程として，レヴィ過程の導入を提案している．レヴィ過程とは，その増分が独立で同一な無限分解可能分布として表される確率過程である．したがって，レヴィ過程は，その増分の分布により規定できる．

本稿では，オプションの原資産が幾何 NIG(Normal Inverse Gaussian) 過程に従う場合に，オプションの価格を評価する効率的なシミュレーション技法を提案する．本稿では，Hörmann and Leydold (2003) が提案している数値解法による逆関数法が適用できることを確認し，これを用いた乱数化準モンテカルロ法の利用を提案する．さらに，Imai and Tan (2007) の提案した変換法を用いて準モンテカルロ法の精度を向上させる方法を適用して，アジア型オプションとプレインバニラ・オプションの評価を行い，その効率性について議論する．

NIG 過程は，その増分が NIG 分布に従うレヴィ過程である．Barndorff-Nielsen (1995) や Barndorff-Nielsen (1998) が NIG レヴィ過程を導入した．他のレヴィ過程と比較して，NIG 分布が持つ一つの重要な特徴は，その再生性である．Rydberg (1997) はドイツとデンマークの金融データを用いて NIG 分布が株式の対数収益率が従う分布として有望であることを報告している．さらに，Rydberg (1999) は米国の株式の適合性についても分析している．Albrecher and Predota (2004) や Benth, Groth, and Kettler (2006) は，原資産価格が NIG レヴィ過程に従う場合のオプション評価について議論を行っている．

モンテカルロ法 (MC)，準モンテカルロ法 (QMC) は，オプション価格が解析的に導出できないときに用いられる強力な数値計算手法の一つである．これらのシミュレーション手法は，高い次元の経路依存型のエキゾチック・オプションの価格を同様の手法で求めることができる．原資産価格がレヴィ過程を扱う場合には，解析的な価格を導出することがより困難になることから，シミュレーションのような数値計算手法の役割はますます大きくなると考えられる．Rydberg (1997) はレヴィ過程のサンプルパスを発生させる方法について議論を行っている．また，具体的に NIG 分布に従う乱数を発生させる方法を提案している．Benth, Groth, and Kettler (2006) はその方法を QMC に適用している．Raible (2000) も NIG 分布に従う乱数生成法について議論している．

モンテカルロ法の重大な問題点は，その計算効率，精度の悪さであると考えられている[2]．この問題を解決する一つの方法として準モンテカルロ法の利用があげられる．特にファイナンスの問題では，原資産がガウス過程に従う場合に準モンテカルロ法の利用によって計算の精度が向上する例が数多く知られている．また，Owen (1995) 等が準モンテカルロ法で用いられる LD 列 (low-discrepancy sequence) を乱数化することで，さらに計算精度をあげられることを示している．さらに，Owen (1998) は LSS (Latin Supercube Sampling) を提案し，低次元の LD 列から効率よく高次元の LD 列を作成する方法を議論している．評価する問題の実質次元 (effective dimension) を小さくすることで，準モンテカルロ法の効率化を図る方法も提案されている．Moskowitz and Caflisch (1996) はブラウン橋を利用した LD 列の作成を提案している．Acworth, Broadie, and Glasserman (1996) は分散共分散行列の主成分を利用して実質次元を低下させる方法を提案し，多くのオプションに有効であること

[1]本研究は，科学研究費補助金 (1871026) の支援を受けている．
[2]モンテカルロ法のサーベイについては，Boyle, Broadie, and Glasserman (1997) を参照すると良い．

を示している．Imai and Tan (2006) は，LT 法 (Linear Transformation method) を提案した．この方法は上記 2 つの方法の一般化として捉えることができ，評価するオプションに応じて最適な直交行列を選択することで，実質次元の最小化を図る方法であり，確率ボラティリティモデルなどより複雑な確率過程にも適用することが出来る一般的な効率化手法である．

原資産がレヴィ過程に従う場合にも，準モンテカルロ法を効率的に適用しようとするアイディアは自然な拡張といえるが，現在のところこのような研究はそれほど多くない．準モンテカルロ法を適用するためには，(0,1) の値を取る LD 列を対象となる無限分解可能な確率分布の値へと変換する必要がある．ガウス過程の場合には，対象となるのは標準正規分布であるが，この逆関数の近似法は広く知られている（例えば Moro (1995) など）．ところが，レヴィ過程からのサンプルパスを発生させるために必要な無限分解可能分布の累積分布関数の逆関数をは解析的に表現することが一般に難しく，また近似関数も知られてはいないことが多い．一般的な数値解法を用いて，逆関数を求めることも原理的には可能であるが，計算時間がかかりすぎて現実的ではない．

Hörmann and Leydold (2003) は累積分布関数の定義域を区分に分割し，それぞれの区分をエルミート近似によって近似することで，累積分布関数の逆関数を効率的に計算する数値アルゴリズムを提案した．彼らは，正規分布，ガンマ分布，ベータ分布などでこの手法の有効性を確認している．本稿では，彼らの方法を利用して原資産がレヴィ過程に従う場合のオプション評価を準モンテカルロ法を用いて行う．さらに，Imai and Tan (2006) の LT 法を拡張し，準モンテカルロ法の効率化を行う．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 章において本論で扱う NIG レヴィ過程の概要を述べる．続いて Hörmann and Leydold (2003) が提案している数値計算による逆関数法の概略を述べる．最後に準モンテカルロ法の効率化を促す一般的な変換法についての説明を行う．第 3 章では，実際の株式市場から推定されたパラメータを利用して，原資産価格が幾何 NIG レヴィ過程に従う場合のアジア型コールオプションとプレインバニラ・コールオプションの評価を提案された準モンテカルロ法で行い，従来の方法と比べたときの計算精度について分析を行う．最後に第 4 章で結言を述べる．

2 モデル

2.1 NIG レヴィ過程

本稿では，原資産の従う確率過程として NIG レヴィ過程に焦点を絞る．まず，価格評価を行うための標準的な仮定をおく．満期 T を固定し，確率空間 $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$ が通常の条件を満たすと仮定する．ただし Ω は標本空間，$\mathcal{F}$ は σ 代数，$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ は $\mathcal{F}$ に関するフィルトレーション，そして P は確率測度とする．さらに，同値マルチンゲール測度の存在も仮定する．レヴィ過程 $L(t)$ は，この確率空間上で独立で同一な増分を持つ確率過程として定義される．

NIG レヴィ過程 $L_{NIG}(t)$ は，その増分が NIG 分布に従うレヴィ過程である．NIG 分布は再生性を持つことが知られている．したがって，NIG レヴィ過程の時点 t における分布もまた NIG 分布であり，次のように表せる．

$$f^{NIG}(x,t;\alpha,\beta,\mu,\delta) = \frac{\alpha}{\pi}\exp\{\delta t(\gamma+\beta s(x))\}\frac{K_1\left(\alpha\delta t\sqrt{1+s(x)^2}\right)}{\sqrt{1+s(x)^2}} \tag{1}$$

ここで α,β,μ,δ は NIG レヴィ過程のパラメータで $\delta>0$, $\alpha>0, 0\le|\beta|\le\alpha, \mu\in\mathbb{R}$ を満たす．ただし，式において $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}, s(x)=\frac{x-\mu t}{\delta t}$ とおいている．また，K_1 はパラメータ 1 をもつ第 3 種の修正ベッセル関数である．NIG 分布の裾での挙動は，

$$f^{NIG}(x,t;\alpha,\beta,\mu,\delta) = O\left(|x|^{-\frac{3}{2}}\exp\{\beta x-\alpha|x|\}\right) \text{ as } |x|\to\infty \tag{2}$$

と表せる．

NIG レヴィ過程の詳しい分析は，Rydberg (1997) や Ribeiro and Webber (2003) が行っている.NIG 分布の特性関数 $\phi_{NIG}(u)$ およびモーメント母関数は次のように表される．

$$\phi_{NIG}(u) = \exp\left\{i\mu tu-\delta t\sqrt{\alpha^2-(\beta+iu)^2}-\gamma\right\}, \tag{3}$$

$$M_{NIG}(u) = \exp\left\{\mu t u - \delta t\sqrt{\alpha^2 - (\beta+u)^2} - \gamma\right\}. \tag{4}$$

したがって，時点 t における NIG 分布の平均と分散は

$$\text{期待値}\ \mu t + \frac{\beta\delta t}{\gamma}, \tag{5}$$

$$\text{分散}\ \alpha^2\delta t\gamma^{-3}, \tag{6}$$

と表される．また NIG 分布のの歪度と尖度は，それぞれ

$$\text{歪度}\ \frac{3\beta}{\alpha\sqrt{\delta t}\gamma^{\frac{1}{2}}}, \tag{7}$$

$$\text{尖度}\ \frac{3\left(\alpha^2+4\beta^2\right)}{\alpha^2\delta t\gamma}, \tag{8}$$

となる．

次に，原資産の価格が幾何レヴィ過程に従う場合のオプション評価法についての概要を述べる．$S(t)$ を時刻 t における原資産の価格とする．$S(t)$ は以下のように幾何レヴィ過程に従うと仮定する．

$$S(t) = S(0)\exp\{L(t)\}. \tag{9}$$

ヨーロピアンオプションの満期におけるペイオフを $H_T(\omega)$ とおく．ただし $\omega \in \Omega$. 例えば，アジア型コールオプションの場合には，

$$H_T(\omega) = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S(t_n) - K\right)_+, \tag{10}$$

と書ける．ただし，$t_n, n = 1,\ldots,N$ は観察時点とする．また，K をオプションの行使価格とする．アジア型オプションの観察時点の間隔を $[0,T]$ の期間中一定であると仮定すると，$t_n = n\Delta t, n = 1,\ldots,N$ と書くことが出来る．同値マルチンゲール測度が存在する場合には，時点 t におけるオプションの価格 P_t は次のように表現できる．

$$P_t = e^{-r(T-t)}E^Q\left[H_T|\,\mathcal{F}_t\right]. \tag{11}$$

ただし $E^Q[\cdot]$ は同値マルチンゲール測度 Q のもとでの期待値を表すものとする．

2.2 累積分布関数の逆関数の近似

準モンテカルロ法を利用したシミュレーションを行う場合，LD 列の一様性を保って利用する必要があることから，逆関数法は必要不可欠な方法といえる．逆関数法は以下の定理に基づく．$F(x)$ を連続確率変数の累積分布関数とし，U を区間 $(0,1)$ の一様乱数とする．このとき，確率変数 $X = F^{-1}(U)$ は累積分布関数 F をもつ．ただし，F^{-1} は関数 F の逆関数を表す．また，確率変数 X が累積分布関数 F を持つ場合，確率変数 $U = F(X)$ は一様分布に従う．この定理に基づき，目標となる確率分布に従う確率変数は，一様分布から生成できる．また，準モンテカルロ法については $X = F^{-1}(U)$ によって LD 列が変換され，数値的な積分が行われる．ただし，いくつかの特殊な確率分布を除いて，確率分布関数の逆関数を求めること自体が困難な問題である．目標となる分布の確率密度関数を f とおくと，この問題は，次の式を x について解くことに対応する．

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = u \text{ for arbitrary } u \in (0,1),$$

数値計算上は，ニュートン法などの方法を用いて解くことも可能であるが，シミュレーションのためにこの方法を用いるのは効率が悪い．この問題に対し，Hörmann and Leydold (2003) は効率的な数値解法による逆関数法を提案した (以下 HL 法と呼ぶ)．HL 法は単純な数値的な逆関数法よりも効率

性が高く，準モンテカルロ法にも適用可能である．HL 法では，確率分布の定義域を細かく区間に分割し，それぞれの区間 i においてをエルミート近似 $H_i(u)$ を用いて逆関数 $F^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$ を近似する方法である．本論文では，Hörmann and Leydold (2003) に基づき 3 次のエルミート近似式を用いる．

HL 法を実装するには，まず定義域 $[b_l, b_r]$ を決定する必要がある．この場合，定義域をはずれた部分の確率 $F(b_l)$ や $1-F(b_r)$ が最大許容誤差 ε_u 以下になるよう設定する．いったん定義域を設定すると，次にこれを十分細かくなるまで区間を分割していく．具体的には区間 $b_l = p_0 < p_1 < \cdots < p_N = b_r$ は以下の 3 つの条件を満たすよう適合的に分割されてゆく．

1. それぞれの区間の長さは最大許容区間 $u_{\max}$ を上回らないとする．すなわち，以下の不等式を満たす．
$$u_{i+1} - u_i = F(p_{i+1}) - F(p_i) < u_{\max}. \tag{12}$$
これを満たさない場合は区間を等分割する．すなわち，$\widetilde{p} = \frac{1}{2}(p_i + p_{i+1})$．

2. 各区間の中点における近似誤差は，最大許容誤差 ε_u 以下でなければならない．すなわち，
$$|F(H_i(\overline{u})) - \overline{u}| < \varepsilon_u \tag{13}$$
を満たさなければならない．ただし，$\overline{u} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})$ とおき，H_i は区間 (u_i, u_{i+1}) での HL 法による近似関数とする．

各区間では，単調性を満たさなければならない．3 次のエルミート近似においてこの条件は，次の不等式で表される．
$$\frac{1}{f(p_i)} \le 3\frac{p_{i+1} - p_i}{u_{i+1} - u_i}, \frac{1}{f(p_i+1)} \le 3\frac{p_{i+1} - p_i}{u_{i+1} - u_i}. \tag{14}$$
より細かい条件は，Hörmann and Leydold (2003) を参照すると良い．$u \in (u_i, u_{i+1})$ のときエルミート近似式は，以下の式で表される．
$$H_i(u) = a_{i0} + a_{i1}u + a_{i2}u^2 + a_{i3}u^3, \tag{15}$$
ただし，
$$a_{i0} = p_i, \tag{16}$$
$$a_{i1} = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{f(p_i)}, \tag{17}$$
$$a_{i2} = 3(p_{i+1} - p_i) - (u_{i+1} - u_i)\left(\frac{2}{f(p_i)} + \frac{1}{f(p_{i+1})}\right), \tag{18}$$
$$a_{i3} = -2(p_{i+1} - p_i) + (u_{i+1} - u_i)\left(\frac{1}{f(p_i)} + \frac{1}{f(p_{i+1})}\right). \tag{19}$$
生成した乱数あるいは LD 列を u とすると，適切な区間 $u \in (u_i, u_{i+1})$ を探す場合には，バイナリーサーチ法やインデックスサーチ法を用いることが出来る．本論の数値実験においては，インデックスサーチ法を用いている．

2.3 Linear Transformation 法の拡張

Imai and Tan (2006) は原資産がガウス過程に従う場合の準モンテカルロ法における一般的な分散減少法として LT 法を提案している．本稿では，より一般的な確率過程であるレヴィ過程においても適用できるようこの変換法を拡張する方法を提案する．

それぞれの要素が対象となる確率分布に従う独立な N 次元確率ベクトル $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ に関する連続関数 g を考える．Ω を $\mathbf{X}$ の定義域とする．各要素が従う分布の確率密度関数を f とする．また，$F(x)$ を $X_i, i = 1, \ldots, N$ の累積分布関数とし，次の期待値 I を考える．
$$I = E[g(\mathbf{X})] = \int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) f(x_1) \cdots f(x_N)\, dx_1 \cdots dx_N. \tag{20}$$

標準的な議論により，期待値 I は以下のように書き換えられる．$y_i = F(x_i), i = 1, \ldots, N$ とおくと

$$I = \int \cdots \int_{[0,1]^N} g\left(F^{-1}(y_1), \ldots, F^{-1}(y_N)\right) dy_1 \cdots dy_N. \tag{21}$$

式 (21) は期待値 I が N 次元の一様分布に従う確率変数 $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_N)$ の期待値 $g\left(F^{-1}(y_1), \ldots, F^{-1}(y_N)\right)$ として表現できることを示している．

Imai and Tan (2007) によると，LT 法を単純に拡張する一つの方法は，ベクトルの変換方法を正規分布の枠内で議論することである．$Z = \Phi^{-1}(Y)$ とおく．ただし，Φ は標準正規分布の累積分布関数とする．このとき，I は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} I =& \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g\left(F^{-1}(\Phi(z_1)), \ldots, F^{-1}(\Phi(z_N))\right) \phi(z_1) \cdots \phi(z_N)\, dz_1 \cdots dz_N \\ =& E\left[g\left(F^{-1}(\Phi(Z_1)), \ldots, F^{-1}(\Phi(Z_N))\right)\right], \end{aligned} \tag{22}$$

ここで，ϕ は標準正規分布の確率密度関数であり，$\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_N)$ は N 次元の各要素が独立な正規ベクトルを表す．上の式は，I が正規ベクトルの関数として表現できることを示している．LT 法では，標準正規ベクトル ε が直交行列 A によって変換された別の標準正規ベクトル $\widehat{\mathbf{Z}}= \mathbf{A}\varepsilon$ に置き換えられる．これを用いると，I は

$$I = E\left[g\left(F^{-1}(\Phi(A_{1.}\varepsilon)), \ldots, F^{-1}(\Phi(A_{N.}\varepsilon))\right)\right], \tag{23}$$

と書き換えられる．ただし，$A_{i.}, i = 1, \ldots, N$ は直交行列 $\mathbf{A}$ の第 i 列ベクトルを表すものとする．そこで，最適な直交行列 $\mathbf{A}^*$ を求めるために関数 $G(\varepsilon) = G\left(F^{-1}(\Phi(A_{1.}\varepsilon)), \ldots, F^{-1}(\Phi(A_{N.}\varepsilon))\right)$ を考える．$\varepsilon = \widehat{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$ として，1 次のテイラー展開により関数 G は

$$G(\varepsilon) \approx G(\widehat{\varepsilon}) + \sum_{n=1}^{N} \left.\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_n}\right|_{\varepsilon=\mathbf{b}} \Delta\varepsilon_n, \tag{24}$$

と近似できる．まず，LD 列の第 1 次元の影響を最大化するため，$\Delta\varepsilon_1$ の係数を最大化するような数理計画問題を考える．

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_n} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \varepsilon_n} \\ &= \sum_{i=1}^{N} g_{x_i}(\mathbf{x}) \left(F^{-1}(y_i)\right)' \phi(z_i)\, a_{i1} \end{aligned} \tag{25}$$

ここで $g_{x_i}(\mathbf{x})$ は関数 g の x_i に関する偏微分を表し，プライム' は逆関数 F^{-1} の微分を表す．また，a_{i1} 行列 $\mathbf{A}$ の $(i,1)-$ 成分を表す．ベクトル $\mathbf{d}$ を第 1 列の成分に対する係数とすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \left(g_{x_1}(\widehat{\mathbf{x}}) \left(F^{-1}(\widehat{y}_1)\right)' \phi(\widehat{z}_1), \ldots, g_{x_N}(\widehat{\mathbf{x}}) \left(F^{-1}(\widehat{y}_N)\right)' \phi(\widehat{z}_N)\right) \\ &= \left(g_{x_1}(\widehat{\mathbf{x}}) \frac{\phi(\widehat{z}_1)}{f(\widehat{x}_1)}, \ldots, g_{x_N}(\widehat{\mathbf{x}}) \frac{\phi(\widehat{z}_N)}{f(\widehat{x}_N)}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

であり，次の式が成り立つ．

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_1}\right|_{\varepsilon=\mathbf{b}} = \langle \mathbf{d}, \mathbf{A}_{\cdot 1} \rangle \tag{27}$$

ここで，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を表す．Imai and Tan (2006) はこの問題の最適解 $\mathbf{A}^*_{\cdot 1}$ が次のように表せることを示した．

$$\mathbf{A}^*_{\cdot 1} = \pm \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}. \tag{28}$$

Table 1: Parameter values for numerical examples

α	β	δ	μ
75.49	-4.089	3	0

Table 2: The accuracy and computing time of the numerical inversion method

	#intervals	time	Absolute Errors	
		(秒)	max	mean
$N=4$	1013	4.2	9.9e-11	1.4e-11
$N=16$	940	4.0	1.0e-10	2.0e-11
$N=64$	1106	5.5	1.0e-10	1.2e-11
$N=256$	1126	5.5	1.0e-10	1.3e-11

実際にベクトル $\mathbf{d}$ を計算する場合には，$x_i = F^{-1}(\Phi(A_{i}.\varepsilon))$，つまり累積分布関数の逆関数を計算する必要がある．すなわち，この方法の実現にも前節で述べた HL 法が用いられる．

本論文で提案する変換方法は LT 法の拡張になっている．すなわち，LT 法は，本論文で提案した方法の特別な場合 $(f=\phi)$ に対応する．また，実際の計算では，LT 法で用いられるベクトル $\mathbf{d}$ の各成分に確率密度関数の比 $f(x_i)/\phi(z_i)$ を掛けたものとして解釈できる．この解釈は，実際のプログラムの作成上は重要である．なぜなら，本論文で取り上げる変換法は，ガウス過程の時に用いられる LT 法に確率密度関数の比を掛けることで達成できるからである．直交行列の第 2 列以降の設定には，異なる点 $\hat{\varepsilon}$ 周りでのテイラー 1 次展開が用いられる．より詳しい内容は，Imai and Tan (2006) を参照．

3 Numerical Experiences

本節では，数値例を用いて提案された準モンテカルロ法の精度について分析する．ここでは，原資産価格が NIG レヴィ過程に従う場合のアジア型コールオプションとプレインバニラ・コールオプションの価格を推定する．パラメターの値は，Rydberg (1997) の推定したドイツ銀行の数値を用いる．NIG 分布のパラメータの値は Table 1 に示す．安全利子率は 10 %と仮定し，原資産の価格，及び行使価格は共に 100，満期までの残存期間を 1 年とする．

NIG 分布には再生性があるため，これらのパラメータを用いて，Ribeiro and Webber (2003) と同様に監視頻度の異なるアジア型オプションの価格を推定する．

3.1 逆関数の数値計算に関する精度

本章では，まず Hörmann and Leydold (2003) の提案した逆関数の近似の精度が本研究で実用的に利用できるかどうかについての確認を行う．シミュレーションを利用してオプション評価を行うためには，最初にこの近似手法を行う必要があり，この計算時間と近似の精度が後のシミュレーションの正確性と効率性に影響することは明らかである．本数値実験においては，$\varepsilon_u = 10^{-10}$ とした．表 2 は分割数とその計算時間，及び計算制度を表したものである．すべての実験は，Inter Xeon CPU3.60GHz, 2.00GB RAM の PC 上で行われ，プログラムは，JAVA によって書かれている．

パラメータ N は，残存期間 T の分割数を表す．これによると，分割数によって区間の数は変化するものの概ね 1000 程度に分割され，計算時間は約 5 秒程度である．一方，計算の精度として，以下の式で表される絶対誤差を測定した．

$$AE_i = \left| u_i - \int_{-\infty}^{x_i} f(s)\,ds \right|, i = 1, \ldots, 100000. \tag{29}$$

ここで f は対応する確率密度関数で，u は i 番目の一様乱数を表す．x_i は上で述べた近似式によっ

て推定された数値である．すなわち

$$x_i = F_H^{-1}(u_i). \tag{30}$$

ここで $F_H^{-1}(\cdot)$ はエルミート近似による累積分布関数の逆関数である．"*max*"と"*mean*"はそれぞれ10万回のモンテカルロ・シミュレーションのうち，誤差の最大値と平均値である．この表から，本研究に十分利用できる精度を持っていると判断できる．

3.2 分析結果

数値実験では，原資産価格の収益率がNIGレヴィ過程に従う場合の，アジア型コールオプションとプレインバニラ・コールオプションの評価を行う．NIG分布の再生性を利用して，同じ満期，異なる観察頻度のアジア型オプションの評価を行い，シミュレーションの次元とオプション価格の精度の関係を含めて分析する．原資産の初期価格は100，行使価格は，アットザマネーにあたる100，安全利子率は，１０％とする．

計算精度を比較するため４種類のシミュレーションを行う．$MC(INV)$ はHL法を利用して乱数を発生させるモンテカルロ法を表す．$MC(IG)$ は同じモンテカルロ法ではあるが，乱数の発生の仕方が異なる．$MC(IG)$ ではRydberg (1997) が提案したNIG分布からの乱数発生方法に従ってNIG乱数を発生させる．この方法では，NIGレヴィ過程が時間がランダムなブラウン運動と見なせることを用いる．一つのNIG乱数を発生させるために，標準正規乱数，カイ二乗乱数，そして一様乱数を利用する．シミュレーションの結果は，30回の独立なバッチの平均値を計算することで得られる．一つのバッチは $2^{12} = 4096$ 個のサンプルパスによって構成されている．計算方法の精度を比較するため，30回の繰り返しに対する標準誤差，それから30回のバッチのうちの推定値の最大値，及び最小値が計算されている．標準誤差が小さいほど，また (最大値 − 最小値) が小さいほど，その手法の計算精度が高いことを意味している．このような 30×4096 のモンテカルロ法を行う理由は，以下に述べる乱数化された準モンテカルロ法との比較を行うためである．第3の方法は $QMC(INV)$ でこれはHL法を用いた準モンテカルロ法を表す．本稿で利用する準モンテカルロ法では，LD列として乱数化したSobol' 列を利用し，さらに50次元以上のシミュレーションの場合にはLatin Supercube Sampling(LSS) を用いている．モンテカルロ法の場合と同様に準モンテカルロ法の場合にも 30×4096 のシミュレーションを行い，30回のバッチを元に平均，標準誤差，最大値，最小値が測定される．第4の方法 $QMC(T)$ は，$QMC(INV)$ に本稿で提案した変換法を組み合わせたものである．比較のため，$QMC(T)$ と $QMC(INV)$ は常に同じLD列を用いて計算している．変換法に用いられる直交行列 A は，最大でも最初の6列のみを最適化し，残りは適当な数字を割り当てた後QR分解によって直交化されている．従って，このプロセスが計算時間全体に与える影響は小さい．また，本稿ではアジア型オプションのために最適化された直交行列を用いて，プレインバニラオプションの $QMC(T)$ を計算している．

価格を推定するアジア型オプションは，4つの異なる観察頻度を持っている場合を考える．$N = 4$ の場合は満期 $T = 1$ までの期間中4回, つまり四半期ごとの4つの原資産価格の算術平均と行使価格との差によってペイオフが特定される．その他本稿では，Ribeiro and Webber (2003) にしたがって，$N = 16, 64, 256$ のケースを考えている．一方，プレインバニラオプションの場合は，満期における原資産価格のみがペイオフに影響を与えるが，アジア型オプションとの比較のため，満期までの機関を $4, 16, 64, 256$ 分割してサンプルパスを発生させることで，シミュレーションの次元とオプション価格の精度の関連をみる．

表3から

- シミュレーションの N が大きくなると $MC(INV)$ の精度が，$MC(IG)$ のそれを上回る．これは，$MC(INV)$ のシミュレーション次元が N で表されるのに対し，$MC(IG)$ のシミュレーション次元が $3N$ で表されることによると考えられる．

- 2つのモンテカルロ法に比べると，$QMC(INV)$ の精度は特に次元 N が低い場合には非常に高い．これは，標準誤差, (最大値-最小値) のいずれの指標からも結論づけられる．次元 N が高くなると，相対的な優位性は小さくなる．

- $QMC(T)$ は4つの方法の中で常に最も精度が高い．$QMC(INV)$ と比較した場合，最も低い場合でも約2倍，最も高い場合には約10倍の差がある．また，$QMC(T)$ の [min, max] インターバルは，常に $QMC(INV)$ のインターバルに含まれている．

Table 3: Asian call option prices under NIG Levy process

	$MC(INV)$	$MC(IG)$	$QMC(INV)$	$QMC(T)$
		$N=4$		
average	8.558	8.626	8.579	8.581
std.err.	.036	.031	$7.81e-4$	$3.18e-4$
[min,max]	[8.066, 8.846]	[8.181, 8.881]	[8.571, 8.587]	[8.579, 8.587]
		$N=16$		
average	7.400	7.438	7.420	7.421
std.err.	.029	.026	.002	$3.67e-4$
[min,max]	[7.088, 7.677]	[7.202, 7.742]	[7.387, 7.442]	[7.418, 7.427]
		$N=64$		
average	7.142	7.139	7.133	7.130
std.err.	.025	.028	.006	.002
[min,max]	[6.933, 7.475]	[6.867, 7.522]	[7.061, 7.210]	[7.113, 7.154]
		daily monitoring($N=256$)		
average	7.087	7.074	7.062	7.064
std.err.	.022	.031	.012	.006
[min,max]	[6.819, 7.283]	[6.814, 7.526]	[6.945, 7.219]	[7.003, 7.137]

Table 4: Plain vanilla call option prices under NIG Levy process

	$MC(INV)$	$MC(IG)$	$QMC(INV)$	$QMC(T)$
		$N=4$		
average	13.238	13.336	13.261	13.263
std.err.	.050	.049	.002	$7.33e-4$
[min,max]	[12.562, 13.646]	[12.524, 13.809]	[13.248, 13.274]	[13.255, 13.271]
		$N=16$		
average	13.250	13.294	13.259	13.263
std.err.	.044	.044	.006	.001
[min,max]	[12.766, 13.689]	[12.856, 13.861]	[13.176, 13.324]	[13.246, 13.279]
		$N=64$		
average	13.292	13.302	13.262	13.260
std.err.	.045	.054	.013	.005
[min,max]	[12.880, 13.870]	[12.785, 14.059]	[13.086, 13.432]	[13.205, 13.298]
		$N=256$		
average	13.325	13.258	13.244	13.277
std.err.	.033	.047	.021	.006
[min,max]	[12.846, 13.687]	[12.728, 14.203]	[12.985, 13.514]	[13.153, 13.402]

表4はプレインバニラ・コールオプションの推定結果である．この場合，N の値にかかわらずコールオプションの推定値は理論上一致するはずである．先の表3のケースとほぼ同じ結論が得られる．ここで注意しなければならないことは，$QMC(T)$ に利用される変換は，プレインバニラオプションには最適化されていないことである．にもかかわらず，$QMC(T)$ の精度が相対的高いことは，この変換にはある種のロバスト性があることを示唆している．

4 Concluding Remarks

本論では，数値計算手法による逆関数法と問題の実質次元を最小化する変換法を組み合わせた効率的な準モンテカルロ法を提案し，それをオプション評価に適用した．数値実験では原資産価格が幾何NIGレヴィ過程に従う場合の，アジア型オプションとプレインバニラ・オプションの評価を行い，対応するモンテカルロ法，準モンテカルロ法よりもより正確な価格を推定できることを示した．

本稿で提案された方法は，NIG分布ではなく，より広いクラスのレヴィ過程にも容易に適用することが出来る．また，本稿で取り上げたアジア型オプション以外の多数のエキゾティックオプションにも適用できる．Imai and Tan (2007) は同様のアプローチでより一般的な GH(generalized hyperbolic) レヴィ過程のケースを扱っている．

References

ACWORTH, P., M. BROADIE, AND M. GLASSERMAN (1996): "A Comparison of Some Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods for Option Pricing," in *Monte and quasi-Monte Carlo Methods 1996: proceedings of a conference at the University of Salzburg*, ed. by H. Niederreiter, vol. 127 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag.

ALBRECHER, H., AND M. PREDOTA (2004): "On Asian option pricing for NIG Lévy processes," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 172, 153–168.

BARNDORFF-NIELSEN, O. E. (1995): "Normal inverse Gaussian processes and the modelling of stock returns," Discussion Paper Research Report 300, Dept. Theor. Statistics, Aarhus University.

——— (1998): "Processes of normal inverse Gaussian type," *Finance and Stochastics*, 2, 41–68.

BENTH, F. E., M. GROTH, AND P. C. KETTLER (2006): "A quasi-Monte Carlo algorithm for the normal inverse Gaussian distribution and valuation of financial derivatives," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 9(6), 843–867.

BOYLE, P. P., M. BROADIE, AND P. GLASSERMAN (1997): "Monte Carlo Methods for Security Pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8-9), 1276–1321.

CONT, R. (2001): "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues," *Quantitative Finance*, 1, 223–236.

HÖRMANN, W., AND J. LEYDOLD (2003): "Continuous Random Variate Generation by Fast Numerical Inversion," *ACM Tansactions on Modeling and Computer Simulation*, 13(4), 347–362.

IMAI, J., AND K. S. TAN (2006): "A General Dimension Reduction Technique for Derivative Pricing," *Journal of Computational Finance*, 10(2), 129–155.

——— (2007): "An Accelerating Quasi-Monte Carlo Method for Option Pricing under the Generalized Hyperbolic Levy Process," working paper.

MANDELBROT, B. (1963): "The variation of certain speculative prices," *Journal of Business*, 36(4), 394–419.

MORO, B. (1995): "The full monte," *Risk*, 8, 57–58.

MOSKOWITZ, B., AND R. CAFLISCH (1996): "Smoothness and dimension reduction in quasi-Monte Carlo methods," *Mathematical and Computer Modeling*, 23(8-9), 37–54.

OWEN, A. B. (1995): "Randomly permuted (t,m,s)-nets and (t,s)-sequences," in *Monte and quasi-Monte-Carlo Methods in Scientific Computing*, ed. by Niederreiter, and P.J-S.Shiue, Lecture Notes in Statistics, pp. 299–317, New York. Springer-Verlag.

——— (1998): "Latin Supercube Sampling for Very High-Dimensional Simulations," *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8(1), 71–102.

RAIBLE, S. (2000): "Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts," Ph.D. thesis, University of Freiberg.

RIBEIRO, C., AND N. WEBBER (2003): "A Monte Calro for the normal inverse Gaussian option valuation model using an inverse Gaussian bridge," working paper.

RYDBERG, T. H. (1997): "The normal nnverse Gaussian Levy process: simulation and approximation," *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 13(4), 887–910.

——— (1999): "Generalized hyperbolic diffusion processes with application in finance," *Mathematical Finance*, 9(2), 183–201.