数理解析研究所講究録
第1582巻 2008年 33-42

遅れを持つ非自励系集団モデルにおける大域漸近安定

早稲田大学院・理工学研究科　黒田　昌孝 (Masataka Kuroda)[a)]
早稲田大学院・理工学研究科　登坂　千尋 (Chihiro Noborisaka)[b)]
Department of Mathematical Sciences, Waseda University, Japan

[a)]email: bannyuaaai@fuji.waseda.jp
[b)]email: momora@toki.waseda.jp

1 序文

次の区分的定数遅れを持つ自励系微分方程式を考える。

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\{1 - aN(t) - bN([t])\}, \quad t \neq 0, 1, 2, \cdots, \quad t \in (0, \infty). \tag{1.1}$$

ここで、$N(t)$ は一種の生物の密度で、$\frac{dN(t)}{dt}$ は関数 $N(t)$ の t における右微分 (the right-hand side derivative)。r, a, b は正の数、$[t]$ は $t \in (0, \infty)$ の整数部分を表している。
K.Gopalsamy, P.Liu[1] により、$\alpha = \frac{a}{b}$ としたとき、$\alpha \in [1, \infty)$ の場合は、$r \in (0, \infty)$ において、平衡点 $N^* = \frac{1}{a+b}$ は大域漸近安定であることが示されている。しかし、$\alpha \in (0, 1)$ の場合においてはあまり調べられていなかった。K.Gopalsamy, P.Liu[1] では、(1.4) 式において $\alpha \in (0, 1)$ の場合も、$r \leq \frac{1}{\alpha}\log(1 + 2\alpha) + \log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})$ ならば、平衡点 $x^* = \frac{1}{1+\alpha}$ は大域漸近安定であると示した。証明は以下のような、微分方程式と同等の差分方程式を求め、リアプノフ関数 ($V(n) = (x(n) - x^*)^2$) を用いて示している。

$$N(n+1) = \frac{N(n)\exp\{r[1 - bN(n)]\}}{1 + aN(n)\frac{\exp\{r[1-bN(n)]\}-1}{1-bN(n)}} \tag{1.2}$$

これは、(1.1) 式より、

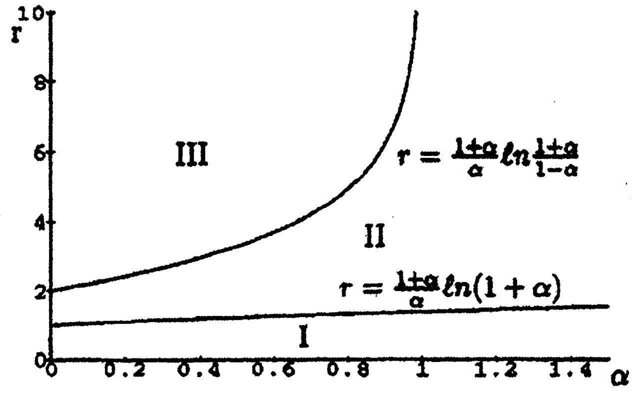
$$\frac{d}{dt}\{\frac{1}{N(t)}\exp\{r[1 - bN(n)]t\}\} = ar\exp\{r[1 - bN(n)]t\}, \tag{1.3}$$

が成り立つことより求められる。(K.Gopalsamy, P.Liu[1] 参照). しかし、K.Gopalsamy, P.Liu[1] は、r の条件がまだ拡張されると予想し、課題として、$r \leq \frac{1+\alpha}{\alpha}\log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})$ が必要十分条件であることが挙げられていた。Y.Muroya, Y.Kato[7] では、K.Gopalsamy, P.Liu[1] と同様に差分化を行い、その課題を関数 $f(t; r) = (1-t)\frac{e^{rt}-1}{t}$ を用いることで $\alpha \in (0, 0.63487\cdots)$ においては解決した。関数 f の定義と性質は二章で紹介する。そして、H.Li, R.Yuan[9] が、同様の関数 f を用いて、$\alpha \in [0.625, 1)$

において課題を解決している。これで、$\alpha \in (0,1)$ においても式 (1.1) において、大域安定性を持つ r の必要十分条件が $r \le \frac{1+\alpha}{\alpha}\log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})$ であることが示された。
つまり区分的定数遅れの項が一つの場合は、次の定理が成り立つ。

定理 1.1 r, a, b を正の定数としたとき、次の二つの条件がある。
(1) $\alpha \in [1,\infty)$ かつ、$r \in (0,\infty)$
(2) $\alpha \in (0,1)$ かつ、$0 < r \le \frac{1+\alpha}{\alpha}\log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})$
このうち、どちらか一つを満たすとき、(1.1) の全ての正の解は、$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{1}{a+b}$ を満たす。

図で表すと、領域　と　においては、N^* の大域漸近安定性が言え、領域　では、不安定である。



次に、以下のような複数個の区分的定数遅れを持つ微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r(t)N(t)\{1 - aN(t) - \Sigma_{j=0}^{m} b_j N(n-j)\}, \\ n \le t < n+1, \quad n = 0,1,2,\cdots, \\ N(0) = N_0 > 0 \quad and \quad N(-j) = N{-j} \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,m. \end{cases} \tag{1.4}$$

ここで、$r(t)$ は $[0,\infty)$ で正の連続関数であり、$\Sigma_{j=0}^{m} b_j > 0,\ b_i \le 0,\ i = 0,1,2,\cdots,m,\ \ a + \Sigma_{j=0}^{m} b_j > 0$ である。この式は Y.Muroya[3] で研究されており、関数 f を用いて、解の縮小性 (contractibity) を調べている。大域漸近安定性よりも厳しい性質である縮小性を求めているので、先の r の条件よりは範囲は狭く $0 < r \le \hat{r}(\tilde{\alpha}) \le \frac{1+\alpha}{\alpha}\log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})$ となる。そしてさらに、遅れの項が複数となったことで、$\Sigma_{j=1}^{m} b_j < \alpha + b_0 < \Sigma^m j = 0 b_j$ という条件が必要になっている。この条件の生物学的意味は、遅れの項の影響が、現在の項の影響よりも大きく、かつ、複数ある遅れの項のうち、始めの遅れが最も影響力をもつということである。つまり、縮小性を求めたことで、r の範囲が狭まり、遅れを複数にした分、遅れの優劣に関する条件が必要になった。従い、前述した Y.Muroya, Y.Kato[7] は、$m = 0, r(t) = r$ の場合において、縮小性でなく、大域漸近安定性を求め、r の条件を改良したものと見ることも出来る。しかし、$m \ge 1$ の場合は、まだ改良されていない。また、Y.Muroya[3] では、ある始めの区分的遅れより、過去を表現する遅れの項を区分的にせず、一般化することで、式を拡張している。そして、同様に式が縮小性を持つ r の十分条件を証明している。

これらのことを踏まえ、本論文では、Y.Muroya[3] で拡張した式の係数を変数にする、つまり、$a = a(t), b = b(t)$ と非自励化することで、さらに式を拡張する。そして同様に、以下のような区分的遅れを持つ非自励系ロジスティック方程式の解が縮小性を持つ為の r の十分条件を示す。そして、展望としては、縮小性ではなく大域漸近安定性を求めることで、r の条件の改良を行うことが挙げられる。

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N(t)\{r(t) - a(t)N(t) - b_0(t)N(t_l) - \Sigma_{j=1}^{m} b_j(t)N(\tau_j(t))\}, \\ x(t) = \phi(t) \geq 0, \quad -\underline{\tau} \leq t \leq t_0, \qquad \text{and} \quad \phi(t_0) > 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

ここで、$\frac{dN(t)}{dt}$ は関数 $N(t)$ の t における右微分 (the right-hand side derivative)。$r(t)$ は $[t_0, \infty)$ において連続な関数で $r(t) > 0$ である。$\phi(t)$ は $[-\underline{\tau}, t_0]$ の区間で連続な関数。$a(t)$ は非負で $[t_0, \infty]$ において連続。$b_j(t), (j = 0, 1, \cdots, m)$ は $[t_0, \infty)$ において連続で $b_j(t) > 0$ である。また、$\tau_0(t)$ は以下のような区分的定数遅れである。

$$\tau_0(t) = t_l, \quad t_l \leq t < t_{l+1}, \quad l = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.6}$$

そして、$\tau_j(t)$ は (t_0, ∞) において区分的に連続で、

$$\begin{aligned} &-\underline{\tau} \leq \tau_j(t) \leq \tau_0(t) \leq t, \quad 1 \leq j \leq m, \\ &\underline{\tau}(t) \equiv \inf_{0 \leq j \leq m} \tau_j(t) \to \infty, \quad (t \to +\infty). \end{aligned} \tag{1.7}$$

である。ここで、$a(t) \geq \Sigma_{j=0}^{m} b_j(t)$ の場合は、(1.5) の解が大域漸近安定であることは知られている。そこで、本論文では以下、$\alpha(t) = \frac{a(t)}{\Sigma_{j=0}^{m} b_j(t)}$ とおいたとき、$0 \leq \alpha(t) \leq 1$ であるときの条件を調べる。証明の手法は、K.Gopalsamy, P.Liu[1] と同様に差分化を行い、Y.Muroya, Y.Kato[7], H.Li, R.Yuan[9] と同様に、関数 f(t;r) を用いて評価する。係数を変数化し、非自励系にしたことから、0 解が周期解など、変数を含むようになる。そこで、既知の周期解又は概周期解を $u(t)$ とし、$x(t) = \frac{N(t)}{u(t)}$ とすることで、平衡点 x^* を定数 1 にするという B.Lisena[8] の手法を取り入れる。また、遅れを一般化したことから、差分化を完全には行えないため、縮小性の表現が問題になる。その問題は、Y.Muroya[3] の手法を取り入れて、t を $t_l < t < t_{l+1}$ の区分で考え、縮小性を $\max_{t_l \leq t \leq t_{l+1}} |x(t) - 1| \leq \max_{\underline{\tau}(t_l) \leq t \leq t_l} |x(t) - 1|$, と表現することで解決した。
そして、今回の主定理である次の結果を得られた。

定理 1.2 (1.5) 式は、$x(t) = \frac{N(t)}{u(t)}, A(t) = a(t)u(t), B(t) = b(t)u(\tau_j(t))$ としたとき、次のように表される。

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\{(A(t) + \Sigma_{j=0}^{m} B_j(t)) - A(t)x(t) - \Sigma_{j=0}^{m} B_j(t)x(\tau_j(t))\}, \tag{1.8}$$

このとき、平衡点は $x^* = 1$ となる。
この式において、$A(t), B_j(t) \geq 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, m), \quad \tau_j(t) \leq \tau_0(t) = t_l, \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$, である。
次の条件を満足する定数 $0 \leq \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} < 1$ 及び、$0 < \gamma \leq 1$ が存在すると仮定する。

$$\begin{aligned} &0 \leq \underline{\alpha} \leq \frac{A(t)}{\Sigma_{j=0}^{m} B_j(t)} \leq \overline{\alpha} \leq 1, \\ &\gamma \leq \frac{B_0(t)}{\Sigma_{j=0}^{m} B_j(t)} \leq 1, \end{aligned} \tag{1.9}$$

すると、もし、

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma_{j=1}^{m} B_j(t) < A(t) + B_0(t), \\ \underline{A} B_l \le \max(\hat{r}(\underline{\tilde{\alpha}}), K\hat{r}(\underline{\alpha})), \\ \left\{\begin{array}{l} \underline{A} = (\underline{\alpha} + 1), \\ B_l = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \Sigma_{j=0}^{m} B_j(s) ds, \\ K = \gamma \exp\{B_l(\underline{\alpha} - \overline{\alpha})\}, \\ \underline{\tilde{\alpha}} = 1 - \frac{1-\alpha}{K}. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{1.10}$$

が成り立つのならば、縮小性

$$\max_{t_l \le t \le t_{l+1}} |x(t) - 1| \le \max_{\underline{\tau}(t_l) \le t \le t_l} |x(t) - 1|, \tag{1.11}$$

を持ち、かつ、大域漸近安定性

$$\lim_{l \to \infty} x(t_l) = x^*, \tag{1.12}$$

を持つ。

この結果は、Y.Muroya[3] の区分的複数遅れを持つ非自励系モデルで得られた結果の一般化にあたる。

次に、本結果の精度の目安として、K.Uesugi, Y.Muroya[6] で挙げられている定理とグラフを以下に書く。以下の式を考える。

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\{1 - \Sigma_{j=0}^{m} b_j N([t-j])\}, \quad t \ge 0, m \ge 1, \\ N(0) = N_0 > 0, \quad N(-j) = N_{-j} \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m, \end{array}\right. \tag{1.13}$$

ここで、$r > 0$, $b_i \ge 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $\Sigma_{j=0}^{m} b_j > 0$ である。

定理 A- 1 (Muroya[4] 定理 2.1 を参照)

(1.13) 式において、

$$b_0 > \Sigma_{j=1}^{m} b_j, \quad \text{かつ} \quad 0 < r \le 1. \tag{1.14}$$

ならば、

$$|N(n+1) - N^*| \le \max_{0 \le j \le m} |N(n-j) - N^*|, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.15}$$

(1.13) 式の解は縮小性を持ち、さらに正の解 N^* は大域漸近安定性を持つ。

定理 A- 2 Muroya[5] を参照

(1.13) 式において、

$$b_j \ge 0, \quad b_0 > \Sigma_{j=1}^{m} b_j, \quad \text{かつ} \tag{1.16}$$

$$r < 1 + \log\{\frac{2}{1 + \frac{\Sigma_{j=1}^{m} b_j}{b_0}} \le 1 + \log 2 < 2. \tag{1.17}$$

ならば、(1.13) の解 N^* は大域漸近安定である。

定理 A-3 Muroya[3] 定理 3.5 を参照
$m \geq 1$, $b_0 > \Sigma_{j=1}^{m} b_j$, $\tilde{\alpha} = -\frac{\Sigma_{j=1}^{m} b_j}{b_0}$ と仮定する。このときもし、$\hat{r}(\alpha)$ が本論文の命題 2.2 で定義され、

$$r \leq \hat{r}(\tilde{\alpha}), \tag{1.18}$$

ならば、(1.13) の解は縮小性を持ち、正の解 N^* は大域漸近安定である。

定理 A-4 Uesugi[6] を参照
(1.13) 式において、$r_1 = rN^*b_0$, $r_2 = rN^*\Sigma_{j=1}^{m} b_j$ としたとき、

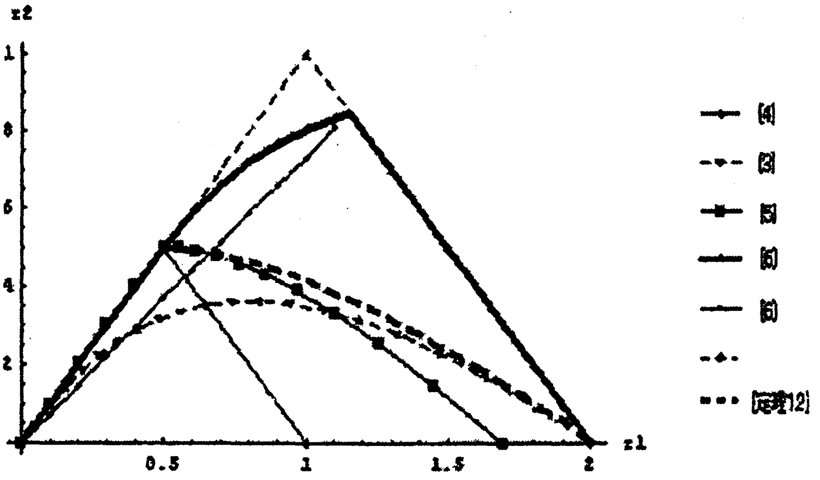
$$r_1 > r_2 \geq 0, \quad r = r_1 + r_2 \leq 2, \quad r_1 + r_2 - \frac{r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1} \geq 0, \tag{1.19}$$

となるような r_1, r_2 に対して、もし、

$$r_1 + r_2 > 1, \tag{1.20}$$

ならば、正の解 N^* は大域漸近安定である。

本論分の結果と、定理 A1-3 を比べるため図を描く。



Results of several papers.

図からも、本論文の結果は、縮小性を求めた条件の中で、今までの研究結果 A-1,2,3 を含む、最も条件の広いものと分かる。他には、W.Wendi[2] が、複数種でのより一般的な式において、条件を出している。その条件は一般的な式を扱っており、(1.13) 式に適応すると、$r_1 \leq 1, r_2 = 0$ となる。

2 準備

証明に使用する関数 $f(r;t)$ の定義といくつかの性質を紹介する。$r > 0, -1 < \alpha < 1$ において、

$$f(t;r) = \begin{cases} (1-t)^{\frac{e^{rt}-1}{t}}, & t \neq 0, \\ r, & t = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

とおく。そして、$-1 < \alpha < 1$ において、次のような $Y \in (-1, 1)$ の関数 $g(Y;\alpha)$ を考える。

$$g(Y;\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2(\alpha+Y)} \log \frac{(1+\alpha)(1+Y)}{(1-\alpha)(1-Y)}, & Y \neq -\alpha, \\ \frac{1}{1-\alpha^2}, & Y = -\alpha. \end{cases} \tag{2.2}$$

このようにおいたとき、次の３つの命題が成り立つ。証明は、Y.Muroya[3] を参照。

命題 2.1 $0 < \hat{Y} < \alpha$, for $0 < \alpha < 1$ かつ $\alpha < \hat{Y} < 0$, for $-1 < \alpha < 0$ の下で、次の方程式の一意解 $\hat{Y} = \hat{Y}(\alpha)$ が存在する。

$$\frac{1}{1-\hat{Y}^2} = g(\hat{Y};\alpha), \quad -1 < \alpha < 1, \tag{2.3}$$

特に、$\hat{Y}(0) = 0$ で、

$$\lim_{\alpha \to 0} \hat{Y}(\alpha) = \hat{Y}(0). \tag{2.4}$$

命題 2.2 $-1 < \alpha < 1$ において、$\hat{Y}(\alpha)$ を命題 2.1 で定義するとき、

$$\hat{r}(\alpha) = \frac{2(1+\alpha)}{1-\hat{Y}^2(\alpha)}, \quad \hat{t}(\alpha) = \frac{\alpha + \hat{Y}(\alpha)}{1+\alpha}. \tag{2.5}$$

とおく。そのとき、$\hat{r}(\alpha)$ は、$\alpha \in (-1, 1)$ について強単調増加関数である。また、

$$\lim_{\alpha \to -1+0} \hat{r}(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \to -1-0} \hat{r}(\alpha) = +\infty, \tag{2.6}$$

となる。従って、

$$\lim_{\alpha \to -1+0} \hat{Y}(\alpha) = -1, \quad \lim_{\alpha \to -1-0} \hat{Y}(\alpha) = 1, \tag{2.7}$$

さらに、

$$\begin{cases} \hat{t}(\alpha) < 1, \quad f'(\hat{t}(\alpha);\hat{r}(\alpha)) = 0, \\ f'(t;\hat{r}(\alpha)) > 0, \quad \text{for } -\infty < t < \hat{t}(\alpha) \text{ and,} \\ f'(t;\hat{r}(\alpha)) < 0, \quad \text{for } \hat{t}(\alpha) < t < 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

従って、任意の $0 < r \leq \hat{r}(\alpha)$ に対して、次が得られる。

$$\begin{cases} f(t;r) \leq f(t;\hat{r}(\alpha)) \leq f(\hat{t}(\alpha);\hat{r}(\alpha)) = \frac{2}{1-\alpha}, \quad \text{for } t < 1, \\ f(t;\hat{r}(\alpha)) < \frac{2}{1-\alpha}, \quad \text{for } t < 1, \quad \text{and} \quad t \neq \hat{t}(\alpha), \end{cases} \tag{2.9}$$

さらに、$-1 < \alpha < 0$ に関して、$\hat{r}(\alpha) < \hat{r}(1+2\alpha)$ であり、$r < \hat{r}(1+2\alpha)$ について、

$$1 + \alpha f(t;r) > 0, \quad \text{for any } t < 1. \tag{2.10}$$

命題 2.3 $\beta\gamma > 0$ に関して、

$$\tilde{\tilde{f}}(x;r,\beta,\gamma) = x\frac{e^{r(\beta-\gamma x)}-1}{\beta - rx}, \tag{2.11}$$

とおいたとき、$t = 1 - \frac{\gamma}{\beta}x$, $\tilde{r} = \beta r$, とすると、

$$\tilde{\tilde{f}}(x;r,\beta,\gamma) = \frac{1}{\gamma} f(t;\tilde{r}). \tag{2.12}$$

である。

3 区分的遅れを持つ非自励系ロジスティック方程式の縮小性

3.1 式の変形

命題 3.1 (1.5) 式は、$x(t) = \frac{N(t)}{u(t)}, A(t) = a(t)u(t), B_j(t) = b_j(t)u(\tau_j(t))$ とすることで、次のように表される。ここで、$u(t)$ は既知の解（周期解や概周期解）である。

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\{(A(t) + \Sigma_{j=0}^{m} B_j(t)) - A(t)x(t) - \Sigma_{j=0}^{m} B_j(t)x(\tau_j(t))\}, \tag{3.1}$$

このとき、平衡点は $x^* = 1$ となる。

命題 3.1 の証明

B.Lisena[8] の手法に習い、$x(t) = \frac{N(t)}{u(t)}$ とすることで、平衡点 $x^* = 1$ とする。条件より、$\log x(t) = \log N(t) - \log u(t)$ が成り立ち、この両辺を微分して式を整理すると

$$\begin{aligned}\frac{x'(t)}{x(t)} &= \{r(t) - a(t)N(t) - b_0(t)N(t_l) - \Sigma_{j=1}^{m} b_j(t)N(\tau_j(t))\} \\ &\quad -\{r(t) - a(t)u(t) - b_0(t)u(t_l) - \Sigma_{j=1}^{m} b_j(t)u(\tau_j(t))\}, \\ &= a(t)u(t)(1 - \tfrac{N(t)}{u(t)}) + b_0(t)u(t_l)(1 - \tfrac{N(t_l)}{u(t_l)}) + \Sigma_{j=1}^{m} b_j(t)u(\tau_j(t))(1 - \tfrac{N(\tau_j(t))}{u(\tau_j(t))}), \\ &= (A(t) + \Sigma_{j=0}^{m} B_j(t)) - A(t)x(t) - \Sigma_{j=0}^{m} B_j(t)x(\tau_j(t)). \quad \square\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 準差分化

命題 3.2 (3.1) 式は次のように書き換えられる。

$$x(t) = \frac{x(t_l)\exp\{\int_{t_l}^{t} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}. \tag{3.3}$$

さらに、もし、$\Sigma_{j=1}^{m} B_j(t) - B_0(t) \le A(t)$ であるならば、

$$\begin{aligned}(x(t) - 1) = &\frac{1-x(t_l)\int_{t_l}^{t} B_0(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}(x(t_l) - 1) \\ &- \frac{x(t_l)\int_{t_l}^{t} \Sigma_{j=1}^{m} B_j(s)(x(\tau_j(s))-1)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds},\end{aligned} \tag{3.4}$$

が成り立つ。

命題 3.2 の証明

Y.Muroya[3] の手法を取り入れつつ、K.Gopalsamy,P.Liu[1] とほぼ同様に差分化を行う。まず、(1.5) 式より次が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}[\tfrac{1}{x(t)}\exp\{\textstyle\int_{t_l}^{t}(A(\sigma) + \Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma))) - \Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)x(\tau_j(\sigma))d\sigma\}] \\ &\quad = A(t)\exp\{\textstyle\int_{t_l}^{t}(A(\sigma) + \Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma))) - \Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)x(\tau_j(\sigma))d\sigma\}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

上式の両辺を $t_l \le t < t$ で積分し、$t \to t_{l+1}$ として整理すると次が得られる。

$$x(t) = \frac{x(t_l)\exp\{\int_{t_l}^{t} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}.$$

次に、上式の両辺から、平衡点 $x^{*}=1$ を引いた形を部分積分を用いて求める。

$$
\begin{aligned}
(x(t)-1) &= \frac{x(t_l)\exp\{\int_{t_l}^{t} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds} \\
&\quad -\frac{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)d\sigma\}\exp\{\int_{t_l}^{s}\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}, \\
&= \frac{(x(t_l)-1)-x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m} B_j(s)(1-x(\tau_j(s)))\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}, \\
&= \frac{1-x(t_l)\int_{t_l}^{t} B_0(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}(x(t_l)-1) \\
&\quad -\frac{x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=1}^{m} B_j(s)(x(\tau_j(s))-1)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

□

3.3 定理 1.2 の証明

(3.4) 式より、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\{\max_{t_l\le t\le t_{l+1}}|x(t)-1|\} &\le \max_{t_l\le t\le t_{l+1}}\left|\frac{1-x(t_l)\int_{t_l}^{t} B_0(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}\right||x(t_l)-1| \\
&\quad +\max_{t_l\le t\le t_{l+1}}\left|\frac{x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=1}^{m} B_j(s)(x(\tau_j(s))-1)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}\right| \\
&\quad \times\{\max_{\underline{\tau}(t_l)\le t\le t_l}|x(t)-1|\},
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

このとき、$1-x(t_l)\int_{t_l}^{t} B_0(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds\ge 0$ ならば、

$$
\begin{aligned}
\{\max_{t_l\le t\le t_{l+1}}|x(t)-1|\} &\le \max_{t_l\le t\le t_{l+1}}\left|\frac{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t}\{\Sigma_{j=1}^{m} B_j(s)-B_0(s)\}\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}\right| \\
&\quad \times\{\max_{\underline{\tau}(t_l)\le t\le t_l}|x(t)-1|\}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

が成り立ち、仮定 $\Sigma_{j=1}^{m}B_j(t)-B_0(t)\le A(t)$ より、縮小性、つまり $\max_{t_l\le t\le t_{l+1}}|x(t)-1|\le\max_{\underline{\tau}(t_l)\le t\le t_l}|x(t)-1|$ が言える。

従って、以降は、$1-x(t_l)\int_{t_l}^{t} B_0(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds<0$ の場合のみを考える。このとき (3.7) 式より、

$$
\begin{aligned}
\{\max_{t_l\le t\le t_{l+1}}|x(t)-1|\} &\le \max_{t_l\le t\le t_{l+1}}\left|\frac{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m} B_j(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}{1+x(t_l)\int_{t_l}^{t} A(s)\exp\{\int_{t_l}^{s} A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m} B_j(\sigma)(1-x(\tau_j(\sigma)))d\sigma\}ds}\right| \\
&\quad \times\{\max_{\underline{\tau}(t_l)\le t\le t_l}|x(t)-1|\}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

が成り立つ。ここで新しく記号を、$t_l\le t<t_{l+1}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
&x(t)=1-z(t), \\
&X(x)=x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(s)\exp\{\int_{t_l}^{s}A(\sigma)+\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)\{1-x(\tau_j(\sigma))\}d\sigma\}ds, \\
&F(x)=\frac{1-X(x)}{1+\underline{\alpha}X(x)},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

とすると、(3.9) より、

$$
\{\max_{t_l\le t\le t_{l+1}}|x(t)-1|\}\le|F(x)|\{\max_{\underline{\tau}(t_l)\le t\le t_l}|x(t)-1|\}
\tag{3.11}
$$

となる。また、

$$\begin{aligned} X(x) &= x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(s)\exp\{\int_{t_l}^{s}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)\{\tfrac{A(\sigma)}{\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)}+\{1-x(\tau_j(\sigma))\}\}d\sigma\}ds, \\ &\le x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(s)\exp\{\int_{t_l}^{s}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)\{\bar{\alpha}+\{\{1-x(\tau_j(\sigma))\}+\underline{\alpha}\}-\underline{\alpha}\}d\sigma\}ds, \\ &= K_0x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(s)\exp\{\int_{t_l}^{s}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)\{\{1-x(\tau_j(\sigma))\}+\underline{\alpha}\}d\sigma\}ds \end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。ここで、$K_0 = \exp\{B_l(\bar{\alpha}-\underline{\alpha})\}$ である。そして、

$$\begin{aligned} \Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)\{\{1-x(\tau_j(\sigma))\}+\underline{\alpha}\} &= \Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)(\underline{\alpha}+1)-\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)x(\tau_j(\sigma)) \\ &\le \Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)(\underline{\alpha}+1)-B_0(\sigma)x(t_l) \\ &= \Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)\{(\underline{\alpha}+1)-\tfrac{B_0(\sigma)}{\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)}x(t_l)\} \\ &\le \Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)\{\underline{A}-\gamma x(t_l)\}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

が成り立つ。また、命題 2.3 より、

$$\begin{aligned} &K_0x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(s)\exp\{\int_{t_l}^{s}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)\{\{1-x(\tau_j(\sigma))\}+\underline{\alpha}\}d\sigma\}ds \\ &\quad\le K_0x(t_l)\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(s)\exp[\int_{t_l}^{s}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)d\sigma\{\underline{A}-\gamma x(t_l)\}]ds, \\ &\quad= K_0x(t_l)\tfrac{1}{(\underline{\alpha}+1)-\gamma x(t_l)}\Big(\exp[\int_{t_l}^{t}\Sigma_{j=0}^{m}B_j(\sigma)d\sigma\{\underline{A}-\gamma x(t_l)\}]-1\Big), \\ &\quad\le K_0x(t_l)\tfrac{e^{B_l(\underline{A}-\gamma x(t_l))}-1}{\underline{A}-\gamma x(t_l)} \\ &\quad= K_0\tilde{\tilde{f}}(x(t_l);B_l,\underline{A},\gamma) \\ &\quad= K_0\tfrac{1}{\gamma}f(1-x(t_l);\underline{A}B_l) \end{aligned} \tag{3.14}$$

である。ここで、$\frac{1}{K}=\frac{K_0}{\gamma}$ とおくと、$F(z)$ は $X(z)$ について、単調減少であるので、

$$F(z) \ge \frac{1-\frac{1}{K}f(1-x(t_l);\underline{A}B_l)}{1+\underline{\alpha}\frac{1}{K}f(1-x(t_l);\underline{A}B_l)}, \tag{3.15}$$

が成り立つ。式 (3.10) より、$F(z)<1$ は明らか、よって $F(z)\ge -1$ を (3.15) を用いて示す。
まず始めに、$\underline{A}B_l \le \hat{r}(\underline{\tilde{\alpha}})$ を仮定する。この時、$\underline{\tilde{\alpha}}=(1-\frac{(1-\underline{\alpha})}{K})$ とすると、命題 2.2 より、

$$\begin{aligned} f(1-x(t_l);\underline{A}B_l) &\le \tfrac{2}{1-\underline{\tilde{\alpha}}} \\ &= \tfrac{2}{1-(1-\frac{(1-\underline{\alpha})}{K})} \\ &= \tfrac{2K}{1-\underline{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

が示され、$\frac{1}{K}f(1-x(t_l);\underline{A}B_l) < \frac{2}{1-\underline{\alpha}}$ であることが分かる。従って、$|F(z)|\le 1$ が示され、縮小性 ($\max_{t_l\le t\le t_{l+1}}|x(t)-1| \le \max_{\underline{\tau}(t_l)\le t\le t_l}|x(t)-1|$) が示された。
次に、$\frac{\underline{A}B_l}{K}\le \hat{r}(\underline{\alpha})$ を仮定する。すると $1-x(t_l)\ge 0$ の場合、命題 2.2 より、

$$\begin{aligned} \tfrac{f(1-x(t_l);\underline{A}B_l)}{K} &\le f(K(1-x(t_l));\tfrac{\underline{A}B_l}{K}) \\ &\le \tfrac{2}{1-\underline{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

となり、縮小性が示される。また、$1-x(t_l)\le 0$ の場合も、仮定と命題 2.2 より、

$$\begin{aligned} \tfrac{f(1-x(t_l);\underline{A}B_l)}{K} &\le \tfrac{f(0;\underline{A}B_l)}{K} \\ &= \tfrac{\underline{A}B_l}{K}, \\ &\le \hat{r}(\underline{\alpha}), \\ &\le \tfrac{2}{1-\underline{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

となり、縮小性が示される。また、縮小性より、一様安定性を持つ。大域吸引性については、$\lim_{l\to\infty}|x(t_l)-1|=C$ とおくと、Y.Muroya[3] と同様の手法を用いることによって、$C=0$ であることが示される。従って、(3.1) の正の平衡点 x^* は一様安定かつ、大域吸引性を持つので、(1.5) 式の解は大域漸近安定性を持つ。 □

4 謝辞

本論文は指導教官の室谷義昭教授のご指導の下、作成いたしました。心よりお礼申し上げます。

参考文献

[1] K. Gopalsamy, P. Liu, Persistence and global stability in a population model, *J. Math. Anal. Appl.* **224** (1998), 59-80.

[2] W.Wendi, Global Stability of Discrete Population Models with Time Delays and Fluctuating Environment, *J. Math. Anal. Appl.***264** (2001), 1-21.

[3] Y. Muroya, Persistence, contractivity and global stability in logistic equations with piecewise constant delays, *J. Math. Appl.* **270** (2002), 602-635.

[4] Y. Muroya, A sufficient condition on global stability in a logistic equation with piecewise constant arguments, *Hokkaido Math. J.* **32** (2003), 75-83.

[5] Y. Muroya, Global stability in dscrete models of nonautonomous Lotka-Volterra type, *Hokkaido Math. J.* **33** (2004), 115-126.

[6] K. Uesugi, Y. Muroya, E. Ishiwata, On the global attractivity for a logistic equation with piecewise constant arguments, *J. Math. Appl.* **270** (2002), 602-635.

[7] Y. Muroya, Y Kato, On Gopalsamy and Liu's conjecture for global stability in a population model, *Journal of Computational and Applied Mathematics.* **181** (2005), 70-82.

[8] B. Lisena, Global attractivity in nonautonomous logistic equations with delay, *Nonlinear Anal, Real World Appl.* (2006), doi: 10.1016/j. nonrwa.2006.09.002.

[9] H. Li, R. Yuan, An affirmative answer to Gopalsamy and Liu's conjecture in a population model, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008), 1152-1168.

[10] Y.Muroya, New contractivity condition in a population model with piecewise constant arguments.

[11] Y.Muroya, A global stability condition in a population model with piecewise constant delays.