

### 3次元線形微分方程式系の零解の一様安定性と漸近安定性

島根大学 総合理工学部  
島根大学 総合理工学部

杉江実郎 (Jitsuro Sugie)  
尾上雄一 (Yuichi Ogami)

Department of Mathematics  
Shimane University

## 1 序文

本稿では、変数係数をもつ3次元線形微分方程式系の零解が一様安定かつ漸近安定になるための十分条件を報告する。

係数が定数である場合の線形微分方程式系の零解の安定性の研究は19世紀に遡ることができる。J. Watt によって発明された蒸気機関は産業革命の主役であったことは言うまでもない。産業革命の進展によって、蒸気機関は改良され続けられた。その設計変更の過程で、蒸気機関の作動速度を一定に保つ役割を果たす遠心调速機 (Governor) がうまく作用しなくなり、作動速度に持続的な変動が生じるようになった。この作動速度の不安定化はハンティング現象と呼ばれ、産業界に大打撃を与えた。この社会的窮地を脱するため、多くの科学者や技術者が力を尽くした。最初にこの原因を突き止めたのが、マクスウェル方程式で有名な J. C. Maxwell だった。彼は 1868 年に遠心调速機の仕組みを3階線形微分方程式 (2次元方程式系と1次元方程式の結合系) によって記述し、遠心调速機不安定化現象の解析に成功した ([5])。その結果は Maxwell の同級生だった E. J. Routh によって一般化され、 $n$  階線形微分方程式に対する安定判別法が与えられた ([7])。約 20 年後、A. Hurwitz が、Routh の安定判別法を知らずに、行列式によって簡便に表現する別の解法を与えた ([4])。両者の安定判別法は形式が異なるが、同値であることが後に示されたため、現在では、Routh-Hurwitz の安定判別法と呼ばれている。この安定判別法は制御工学などで今も有効な基礎定理として使われている。

定数係数3階線形微分方程式

$$x''' + ax'' + bx' + cx = 0 \tag{E}$$

に Routh-Hurwitz の安定判別法を適用すると、条件

$$a > 0 \text{ かつ } ab > c > 0 \tag{1.1}$$

が、方程式 (E) の平衡点  $(x(t), x'(t), x''(t)) = (0, 0, 0)$  が (一様安定かつ) 漸近安定になるために必要十分であることが容易に分かる。

方程式 (E) を同値変換する方法はいくつもある。例えば、新しい変数として、 $y = x'$ ,  $z = x''$  とすると

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -cx - by - az$$

となる。これは同伴形式と呼ばれている。また、 $y = x'$ ,  $z = x'' + cx/a$  とすると

$$x' = y, \quad y' = -\frac{c}{a}x + z, \quad z' = -\left(b - \frac{c}{a}\right)y - az$$

に変換される。これは Routh-Hurwitz の安定判別法の証明にも用いられるもので、シュワルツ形式と呼ばれている。当然、これらの方程式系の係数は定数であるが、これらを変数係数にすると、零解の漸近安定性を論じることは困難になる。そこで、本研究では、方程式系

$$x' = \sqrt{\frac{c}{a}}y, \quad y' = -\sqrt{\frac{c}{a}}x + z, \quad z' = -\left(b - \frac{c}{a}\right)y - az$$

に着目する。条件 (1.1) の下で、これも方程式 (E) と同値である。

変数係数 3 階線形微分方程式

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \quad (L)$$

を考える。ただし、任意の  $t \geq 0$  に対して、 $a(t)$  は連続微分可能で、 $b(t)$  と  $c(t)$  は連続であるとする。係数  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  を用いて

$$e^2(t) = \exp(-2A(t)/3) \left\{ d + \frac{2}{3} \int_0^t c(s) \exp(2A(s)/3) ds \right\},$$

とおく。ただし、 $A(t) = \int_0^t a(s) ds$  であり、 $d$  は適当な正の数である。まず、 $f(t) \equiv 1$  とし

$$g(t) = b(t) - e^2(t) - \frac{1}{3}a'(t) - \frac{2}{9}a^2(t) + \frac{a(t)c(t)}{3e^2(t)} + \frac{c'(t)}{3e^2(t)} - \frac{c^2(t)}{9e^4(t)},$$

$$h(t) = \frac{1}{3}a(t) + \frac{2c(t)}{3e^2(t)}$$

とおくと、変換

$$y = \frac{1}{e(t)}x', \quad z = \frac{1}{e(t)}x'' - \frac{e'(t)}{e^2(t)}x' + e(t)x$$

によって、方程式 (L) は方程式系

$$x' = e(t)y, \quad y' = -e(t)x + f(t)z, \quad z' = -g(t)y - h(t)z \quad (S)$$

になる。特に、 $a(t) \equiv a$ ,  $b(t) \equiv b$ ,  $c(t) \equiv c$  ならば  $d = c/a$  とおくことにより

$$e(t) \equiv \pm \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad g(t) \equiv b - \frac{c}{a}, \quad h(t) \equiv a$$

が得られる。既に述べてきたように、この場合は、零解が漸近安定になるための必要十分条件は (1.1) であった。この事実から類推すると、『任意の  $t \geq 0$  に対して

$$a(t) > 0 \quad \text{かつ} \quad a(t)b(t) > c(t) > 0$$

ならば、方程式 (L) の平衡点  $(x(t), x'(t), x''(t)) = (0, 0, 0)$  が一様安定かつ漸近安定になるのか?』という疑問が生じる。また、方程式系 (S) に関していうならば、『変数係数  $e(t)$ ,  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  にどのような条件を課せば、零解は一様安定かつ漸近安定となるのだろうか?』という第 2 の疑問も起こる。本稿の目的はこれらの疑問に答えることである。

## 2 条件設定と主定理

任意の  $t \geq 0$  に対して、係数  $e(t)$ ,  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  は連続であり、 $g(t)/f(t)$  は微分可能であるという仮定の下で、方程式系 (S) を考える。以下では、 $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  とし、 $\|\cdot\|$  をユークリッドノルムとする。また、初期条件  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  を満たす解を  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  と表す。明らかに、方程式系 (S) は零解  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  をもつ。

任意の  $t \geq 0$  に対して、係数  $f(t)$  と  $g(t)$  は有界であるとし、条件

$$f(t)g(t) > 0 \quad (t \geq 0), \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)g(t) > 0 \quad (2.1)$$

を仮定する。このとき、ある  $k > 0$  と  $K > 0$  が存在し、任意の  $t \geq 0$  に対して

$$k \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq K \quad (2.2)$$

となる。任意の  $t \geq 0$  に対して、 $g(t)/f(t)$  は微分可能であるから

$$\psi(t) = 2h(t) + \frac{f(t)}{g(t)} \left( \frac{g(t)}{f(t)} \right)'$$

と定義することができる。また、便宜上

$$\psi_+(t) = \max\{0, \psi(t)\}, \quad \psi_-(t) = \max\{0, -\psi(t)\}$$

と書く。このとき、次のことが成り立つ。

**Theorem 2.1.** 任意の  $t \geq 0$  に対して、係数  $f(t)$  と  $g(t)$  は有界であるとし、条件 (2.1) を仮定する。このとき

$$\int_0^\infty \psi_-(s) ds < \infty \quad (2.3)$$

が成り立つならば、(S) の零解は一様安定である。

**Proof.** 2つの関数

$$V(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( x^2 + y^2 + \frac{f(t)}{g(t)} z^2 \right), \quad W(t, \mathbf{x}) = V(t, \mathbf{x}) \exp \left( - \int_0^t \psi_-(s) ds \right)$$

を  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^3$  上で定義する。ただし、 $\mathbf{x}$  はベクトル  $(x, y, z)$  である。条件 (2.3) より、 $L = \int_0^\infty \psi_-(s) ds$  となるような  $L > 0$  が存在する。したがって、(2.2) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + kz^2) e^{-L} &\leq V(t, \mathbf{x}) e^{-L} \leq W(t, \mathbf{x}) \\ &\leq V(t, \mathbf{x}) \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + Kz^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。方程式系 (S) の解に沿った  $V(t, \mathbf{x})$  の微分を求めると

$$\dot{V}_{(S)}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \psi(t) \frac{f(t)}{g(t)} z^2 \leq \frac{1}{2} \psi_-(t) \frac{f(t)}{g(t)} z^2 \leq \psi_-(t) V(t, \mathbf{x})$$

であるから、任意の  $t \geq 0$  かつ  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  に対して

$$\dot{W}_{(S)}(t, \mathbf{x}) = \left\{ \dot{V}_{(S)}(t, \mathbf{x}) - \psi_-(t)V(t, \mathbf{x}) \right\} \exp \left( - \int_0^t \psi_-(s) ds \right) \leq 0$$

となる。したがって、 $W(t, \mathbf{x})$  は positive definite かつ decrescent であり、 $\dot{W}_{(S)}(t, \mathbf{x})$  は非負であるから、Persidski [6] による Liapunov 型の定理を使うことによって、 $(S)$  の零解は一様安定であることが分かる。□

簡単のため、 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 、 $v(t) = V(t, \mathbf{x}(t))$  とする。このとき、Lemma 2.1 の証明で示したように、 $t \geq t_0$  において

$$v'(t) \leq \psi_-(t)v(t) \quad (2.4)$$

が成り立つ。不等式 (2.4) は  $v(t)$  の収束性を保証する。

**Lemma 2.2.** 条件 (2.3) と (2.4) が成り立つならば、 $v'(t)$  は絶対可積分である。その結果、 $v(t)$  は非負の極限值をもつ。

**Proof.** 条件 (2.4) より

$$v'(t) \leq v(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^{\infty} \psi_-(s) ds \right) \psi_-(t)$$

が得られる。この不等式の右辺は  $t \geq t_0$  に対して、非負であるから

$$v'_+(t) \leq v(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^{\infty} \psi_-(s) ds \right) \psi_-(t)$$

であり、両辺を  $t_0$  から  $\infty$  まで積分すると

$$\int_{t_0}^{\infty} v'_+(s) ds \leq v(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^{\infty} \psi_-(s) ds \right) \int_{t_0}^{\infty} \psi_-(s) ds$$

となる。したがって、条件 (2.3) より

$$\int_{t_0}^{\infty} v'_+(s) ds < \infty$$

であることが分かる。一方、 $t \geq t_0$  に対して、 $v(t) \geq 0$  であるから

$$\int_{t_0}^{\infty} v'_-(s) ds \leq v(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} v'_+(s) ds < \infty$$

を得る。したがって

$$\int_{t_0}^{\infty} |v'(s)| ds = \int_{t_0}^{\infty} (v'_+(s) + v'_-(s)) ds < \infty$$

が導ける。故に、Lemma 2.2 は証明された。□

ここで、本稿において重要な役割をする概念を紹介する。正値関数  $\phi(t)$  が *integrally positive* であるとは、ある  $\omega > 0$  が存在し、 $\tau_n + \omega \leq \sigma_n < \tau_{n+1}$  なる任意の  $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n, \sigma_n]$  に対して

$$\int_I \phi(s) ds = \infty$$

を満たすときをいう。正値関数  $\phi(t)$  が *integrally positive* であるとき、積分条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int^t \phi(s) ds = \infty$$

が必然的に成り立つ。これに加えて、ある  $\Omega > 0$  が存在し、 $\tau_{n+1} \leq \sigma + \Omega$  を満たすならば、関数  $\phi(t)$  は *weakly integrally positive* であるという。例えば、 $2/(1+t)$  や  $\sin^2 t/(1+t)$  は *weakly integrally positive* ではあるが、それらは *integrally positive* ではない ([1-3] を参照せよ)。

主定理を述べる準備が整った。

**Theorem 2.3.** 任意の  $t \geq 0$  に対して、係数  $e(t), f(t), g(t), h(t)$  は有界であるとし、条件 (2.1) と (2.3) を仮定する。このとき

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |e(t)| > 0, \quad (2.5)$$

$$\psi_+(t) \text{ が } \textit{weakly integrally positive} \quad (2.6)$$

であるならば、(S) の零解は漸近安定である。

### 3 主定理の証明

円柱座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$  によって、 $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$  とすると、方程式系 (S) は

$$r' = f(t)z \sin \theta, \quad \theta' = \frac{f(t)z}{r} \cos \theta - e(t), \quad z' = -g(t)r \sin \theta - h(t)z \quad (\tilde{S})$$

になる。解  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  に対応する方程式系 ( $\tilde{S}$ ) の解を  $(r(t), \theta(t), z(t))$  とする。

さて、主定理の証明を与える。

**Proof of Theorem 2.3.** Theorem 2.1 より、方程式系 (S) の零解は一様安定であることが分かるので、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $\delta(\varepsilon) > 0$  が存在して、 $t_0 \geq 0$  かつ  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$  ならば、 $t \geq t_0$  に対して

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad (3.1)$$

が成り立つ。方程式系 (S) の零解の漸近安定性を示すには、その零解が吸収的であることを示せば十分である。即ち、 $t$  が増加するにつれて  $\mathbf{x}(t)$  が  $\mathbf{0}$  に収束することを示せばよい。

便宜上

$$u(t) = \frac{f(t)}{2g(t)} z^2(t)$$

とおく。このとき、不等式 (2.2) より、任意の  $t \geq t_0$  に対して

$$v(t) = V(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2} (x^2(t) + y^2(t)) + u(t) \geq \frac{1}{2} (x^2(t) + y^2(t) + kz^2(t)) \quad (3.2)$$

となる。関数  $v(t)$  は任意の  $t \geq t_0$  に対して

$$v'(t) = -\psi(t)u(t) \leq \psi_-(t)v(t) \quad (3.3)$$

を満たすので、Lemma 2.2 より、 $v(t)$  は非負の極限值  $v_0$  をもつ。もし、 $v_0 = 0$  ならば、(3.2) によって、解  $\mathbf{x}(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束するので、証明ができたことになる。以下では、 $v_0 > 0$  の場合のみを考察し、この場合は起こり得ないことを示していく。

不等式 (2.2) と (3.1) から、任意の  $t \geq t_0$  に対して、 $u(t)$  が有界であると分かるので、 $u(t)$  は下極限と上極限をもつ。始めに、 $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  であることを示し、次に、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  でもあることを示す。

まず、 $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) > 0$  と仮定する。このとき、ある  $\varepsilon_1 > 0$  と  $T_1 \geq t_0$  が存在し、任意の  $t \geq T_1$  に対して、 $u(t) > \varepsilon_1$  が成り立つので、(3.3) と Lemma 2.2 より

$$\infty > \int_{t_0}^{\infty} |v'(s)| ds = \int_{t_0}^{\infty} |\psi(s)| u(s) ds \geq \int_{t_0}^{\infty} \psi_+(s) u(s) ds > \varepsilon_1 \int_{t_1}^{\infty} \psi_+(s) ds$$

となる。ところが、これは (2.6) に矛盾する。したがって、 $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  であることが分かる。

次に、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) > 0$  と仮定し、 $\nu = \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t)$  とおく。係数  $e(t)$ ,  $f(t)$ ,  $h(t)$  の有界性から、任意の  $t \geq 0$  に対して

$$|e(t)| \leq \bar{e}, \quad |f(t)| \leq \bar{f}, \quad |h(t)| \leq \bar{h} \quad (3.4)$$

を満たす定数  $\bar{e} > 0$ ,  $\bar{f} > 0$ ,  $\bar{h} > 0$  が存在する。また、条件 (2.1) と係数  $f(t)$  と  $g(t)$  の有界性より、ある定数  $\underline{g} > 0$  が選べ、任意の  $t \geq 0$  に対して

$$|g(t)| \geq \underline{g} \quad (3.5)$$

となる。さらに、条件 (2.5) より、任意の  $t \geq T_2$  に対して

$$|e(t)| \geq \underline{e} \quad (3.6)$$

となるような定数  $\underline{e} > 0$  と  $T_2 \geq t_0$  が存在する。関数  $v(t)$  は正の値  $v_0$  に収束するから、 $T_3 \geq T_2$  が存在して、任意の  $t \geq T_3$  に対して

$$0 < \frac{v_0}{2} < v(t) < \frac{3v_0}{2} \quad (3.7)$$

が成り立つ。ここで、 $\varepsilon_2 < \nu/2$  を満たし、かつ

$$\frac{\sqrt{2\varepsilon_2/k}}{\sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2}} < \min \left\{ \frac{1}{2f}, \frac{e}{2f}, \frac{g}{5(h + 2\bar{e})} \right\} \quad (3.8)$$

となるような  $\varepsilon_2 > 0$  を一つ固定する。関係式  $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 < \nu = \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t)$  に注意すれば、 $T_3 < \tau_n < \sigma_n < \tau_{n+1}$  であつて、 $u(\tau_n) = u(\sigma_n) = \varepsilon_2$  を満たし

$$\begin{aligned} u(t) &> \varepsilon_2 \quad \text{for } \tau_n < t < \sigma_n, \\ u(t) &< \varepsilon_2 \quad \text{for } \sigma_n < t < \tau_{n+1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる2つの発散数列  $\{\tau_n\}$  と  $\{\sigma_n\}$  を選ぶことができる。任意の  $t \geq t_0$  に対して、 $u(t) \geq kz^2(t)$  であるから、 $\sigma_n < t < \tau_{n+1}$  において

$$|z(t)| \leq \sqrt{\frac{2}{k}u(t)} < \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} \quad (3.10)$$

が得られる。また、(3.1), (3.2), (3.7), (3.9) より、 $\sigma_n < t < \tau_{n+1}$  において

$$\sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2} < \sqrt{2(v(t) - u(t))} = r(t) < \varepsilon \quad (3.11)$$

となる。不等式(3.10)と(3.11)から、方程式系(S)の解  $x(t)$  は、 $\sigma_n < t < \tau_{n+1}$  において、立体的環状領域

$$D = \left\{ (r, \theta, z) : \sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2} < r < \varepsilon, -\pi < \theta \leq \pi, |z| \leq \sqrt{2\varepsilon_2/k} \right\}$$

に留まり続けることが分かる。係数  $e(t)$  は  $t \geq 0$  において連続であるから、(3.6) より、 $\sigma_n < t < \tau_{n+1}$  において、 $e(t) \geq \underline{e}$  または  $e(t) \leq -\underline{e}$  のどちらかである。後者においても同様の議論ができるので、前者についてのみ考えることとし

$$\omega_+ = \bar{e} + \frac{\bar{f}\sqrt{2\varepsilon_2/k}}{\sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2}}, \quad \omega_- = \underline{e} - \frac{\bar{f}\sqrt{2\varepsilon_2/k}}{\sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2}}$$

とおくと、(3.8) より

$$\max \left\{ \frac{\underline{e}}{2}, \underline{e} - \frac{1}{2} \right\} < \omega_- < \underline{e} \leq \bar{e} < \omega_+ < \min \left\{ \bar{e} + \frac{\underline{e}}{2}, \bar{e} + \frac{1}{2} \right\} < \frac{3}{2}\bar{e} \quad (3.12)$$

と評価される。また、(3.4), (3.6), (3.10), (3.11) より、 $\sigma_n < t < \tau_{n+1}$  において

$$-\omega_+ < -\frac{|f(t)||z(t)|}{r(t)} - |e(t)| \leq \theta'(t) \leq \frac{|f(t)||z(t)|}{r(t)} - e(t) < -\omega_- \quad (3.13)$$

となることが分かる。平面内の扇状領域  $\Omega$  を

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : \sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2} < r < \varepsilon, \frac{1}{2\underline{e}}\omega_- \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{2\underline{e}}\omega_- \right\}$$

と定義する ( $\omega_- < \underline{e}$  であるから,  $\Omega \neq \phi$ )。

上記で選んだ数列  $\{\tau_n\}$  と  $\{\sigma_n\}$  は, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $\tau_{n+1} - \sigma_n \leq 2\pi/\omega_-$  を満たすことを背理法を用いて示す。そのため,  $\tau_{n_0+1} - \sigma_{n_0} > 2\pi/\omega_-$  であるような  $n_0 \in \mathbb{N}$  が存在すると仮定する。不等式 (3.13) を  $\sigma_{n_0}$  から  $\tau_{n_0+1}$  まで積分すると

$$\theta(\sigma_{n_0}) - \theta(\tau_{n_0+1}) = - \int_{\sigma_{n_0}}^{\tau_{n_0+1}} \theta'(s) ds > \omega_- (\tau_{n_0+1} - \sigma_{n_0}) > 2\pi$$

となるから,  $(r(t), \theta(t))$  は環状領域

$$A = \{(r, \theta) : \sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2} < r < \varepsilon, -\pi < \theta \leq \pi\}$$

を少なくとも1回は時計回りに回転することが分かる。したがって,  $\theta(a) - \theta(b) = \pi - \omega_-/\underline{e}$  であって, 任意の  $t \in [a, b]$  に対して

$$(x(t), y(t)) \in \Omega \quad (3.14)$$

となるような定数  $a$  と  $b$  が区間  $(\sigma_{n_0}, \tau_{n_0+1})$  内に存在する。不等式 (3.13) を  $a$  から  $b$  まで積分すると, (3.12) より

$$\theta(a) - \theta(b) < \frac{3}{2}\bar{e}(b-a)$$

であることに注意すると, 評価式

$$b-a > \frac{\theta(a) - \theta(b)}{3\bar{e}/2} = \frac{\pi - \omega_-/\underline{e}}{3\bar{e}/2} > \frac{\pi-1}{3\bar{e}/2} > \frac{1}{\bar{e}} \quad (3.15)$$

が得られる。また, (3.8), (3.12), (3.14) より, 任意の  $t \in [a, b]$  に対して

$$\begin{aligned} |y(t)| &> \sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2} \sin \frac{1}{2\underline{e}} \omega_- > \sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2} \sin \frac{1}{4} \\ &> \frac{1}{5} \sqrt{v_0 - 2\varepsilon_2} > \frac{\bar{h} + 2\bar{e}}{g} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって, 方程式系 (S) の第三式と (3.4), (3.5), (3.10) を併せると, 任意の  $t \in [a, b]$  に対して

$$\begin{aligned} |z'(t)| &\geq |g(t)||y(t)| - |h(t)||z(t)| \\ &> \underline{g} \frac{\bar{h} + 2\bar{e}}{g} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} - \bar{h} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} = 2\bar{e} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} \end{aligned}$$

であることが分かる。明らかに,  $z'(t)$  は  $t \geq t_0$  に対して連続であるから

$$\left| \int_a^b z(s) ds \right| = \int_a^b |z(s)| ds$$

である。したがって, (3.10), (3.15) より

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} &> |z(b)| + |z(a)| \geq \int_a^b |z(s)| ds \\ &> 2\bar{e} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} (b-a) > 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} \end{aligned}$$



となり、矛盾が生じる。故に、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $\tau_{n+1} - \sigma_n \leq 2\pi/\omega_-$  であることが分かった。

各区間  $[\tau_n, \sigma_n]$  の和集合として、 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n, \sigma_n]$  とおくと、(3.9) と Lemma 2.2 により

$$\infty > \int_{t_0}^{\infty} |v'(s)| ds \geq \int_{t_0}^{\infty} \psi_+(s) u(s) ds > \varepsilon_2 \int_I \psi_+(s) ds$$

となる。したがって、条件 (2.6) より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n - \tau_n) = 0 \quad (3.16)$$

であることが分かる。再び、関係式  $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 < \nu = \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t)$  から、 $T_3 < t_n < s_n < t_{n+1}$  であつて、 $u(t_n) = \nu/2$ 、 $u(s_n) = 3\nu/4$  を満たし、 $t_n < t < s_n$  において

$$\frac{\nu}{2} < u(t) < \frac{3\nu}{4}$$

となる2つの発散数列  $\{t_n\}$  と  $\{s_n\}$  を選ぶことができる。上記に定義したように、 $\varepsilon_2 < \nu/2$  であるから、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $[t_n, s_n] \subset [\tau_n, \sigma_n]$  と考えてよい (必要ならば、数列  $\{\tau_n\}$  と  $\{\sigma_n\}$  をそれぞれ適当な部分列に取り替えればよい)。したがって、(3.16) より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (s_n - t_n) = 0 \quad (3.17)$$

となる。不等式 (3.1) と (3.4) を用いると、任意の  $t \geq t_0$  に対して

$$u'(t) = v'(t) - x(t)x'(t) - y(t)y'(t) \leq |v'(t)| + |f(t)||y(t)||z(t)| < |v'(t)| + \bar{f}\varepsilon^2$$

と評価されるので、これを  $t_n$  から  $s_n$  まで積分すれば、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\frac{\nu}{4} = u(s_n) - u(t_n) \leq \int_{t_n}^{s_n} |v'(s)| ds + \bar{f}\varepsilon^2 (s_n - t_n)$$

となる。ところが、これは (3.17) に矛盾する。したがって、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) = \nu = 0$  であることが導かれた。

以上より、 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  であることが分かった。したがって、 $T_4 \geq T_3$  が存在し、任意の  $t \geq T_4$  に対して

$$u(t) < \varepsilon_2$$

となる。これを条件 (3.9) の代わりに用いて、上記と同様の議論をすると、任意の  $t \geq T_4$  に対して、方程式系 (S) の解  $x(t)$  は立体環状領域  $D$  に留まり続け、 $(r(t), \theta(t))$  は環状領域  $A$  内を少なくとも1回は時計回りに回転することが分かる。したがって、 $T_4 < T_5 < T_6$  かつ  $\theta(T_5) - \theta(T_6) = \pi - \omega_-/\underline{e}$  であつて、任意の  $t \in [T_5, T_6]$  に対して

$$(x(t), y(t)) \in \Omega$$

となるような  $T_5$  と  $T_6$  が存在する。そのため、2つの評価式

$$T_6 - T_5 > \frac{\theta(T_5) - \theta(T_6)}{3\bar{e}/2} = \frac{\pi - \omega_-/\underline{e}}{3\bar{e}/2} > \frac{\pi - 1}{3\bar{e}/2} > \frac{1}{\bar{e}},$$

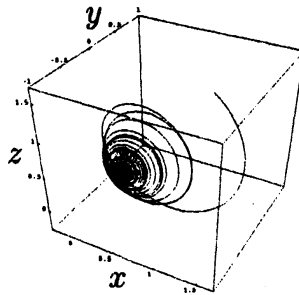
$$|z'(t)| \geq 2\bar{\varepsilon} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}}$$

が得られる。これらを使うことによって

$$2\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} > \int_{T_5}^{T_6} |z(s)| ds > 2\bar{\varepsilon} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}} (T_6 - T_5) > 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k}}$$

が導け、矛盾が生じる。したがって、 $v_0 > 0$  の場合は起こり得ないことが分かる。故に、方程式系 (S) の零解は漸近安定である。□

Theorem 2.1 と Theorem 2.3 では、係数  $e(t), f(t), g(t), h(t)$  の有界性を仮定した。紙面の都合で、詳しくは述べられないが、係数の有界性を外すことができる。そのために、条件 (2.1) も変化する。例えば、 $e(t) = f(t) = g(t) = 1+t$ ,  $h(t) = \sin^2 t$  ならば、方程式系 (S) の零解は一様安定かつ漸近安定である。



方程式系  $x' = (1+t)y$ ,  $y' = -(1+t)x + (1+t)z$ ,  $z' = -(1+t)y - (\sin^2 t)z$   
の初期条件  $(t_0, x_0, y_0, z_0) = (0, 0.8, 0.8, 1)$  を満たす解軌道図

## 参考文献

- [1] L. HATVANI, A generalization of the Barbashin-Krasovskij theorems to the partial stability in nonautonomous systems, in *Qualitative Theory of Differential Equations I, II* (M. Farkas, Editor), Colloq. Math. Soc. János Bolyai 30 (North-Holland, Amsterdam and New York, 1981), pp. 381–409.
- [2] L. HATVANI, On the uniform attractivity of solutions of ordinary differential equations by two Lyapunov functions, *Proc. Japan Acad.* 67 (1991), 162–167.
- [3] L. HATVANI, On the asymptotic stability for a two-dimensional linear nonautonomous differential system, *Nonlinear Anal.* 25 (1995), 991–1002.
- [4] A. HURWITZ, Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt, *Math. Ann.* 46 (1895), 273–284.
- [5] J. C. MAXWELL, On governors, *Proc. Roy. Soc. London* 6 (1868), 270–283.
- [6] K. P. PERSIDSKI, Über die Stabilität einer Bewegung nach der ersten Näherung, *Mat. Sb.* 40 (1933), 284–293.
- [7] E. J. ROUTH, *Treatise on the Stability of a Given State of Motion*, Macmillan, London, 1877.