数理解析研究所講究録
第 1582 巻 2008 年 118-126

準周期係数をもつ2次元線形微分方程式の極限集合について

大阪府立大学大学院工学研究科 原 惟行 (Tadayuki Hara)
Graduate School of Engineering,Osaka Prefecture University
電気通信大学 (非) 申 正善 (Jong Son Shin)
The University of Electro-Communications

1. Introduction

準周期関数を係数にもつ2次元線形常微分方程式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & k\cos\omega t \\ \cos\omega t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考える．初期条件は

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (x_0 > 0) \tag{2}$$

とする．$k = 1, 0, -1$ に対して (1),(2) をみたす解の極限集合について考察する．
（I）$k = 1$ の場合

Lemma 1.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & kb(t) \\ lb(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (k, l > 0) \tag{3}$$

の基本解行列は

$$X(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{k}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)}) & \sqrt{k}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)}) \\ \sqrt{l}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)}) & \sqrt{l}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)}) \end{pmatrix}$$

$$where \quad \alpha(t) = \int_0^t a(s)ds, \; \beta(t) = \int_0^t b(s)ds$$

(proof)

$$\phi(t) = \sqrt{k}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})$$
$$\psi(t) = \sqrt{l}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})$$

とおくと

$$\phi'(t) = a(t)\phi(t) + kb(t)\psi(t)$$
$$\psi'(t) = a(t)\psi(t) + lb(t)\phi(t)$$

となるから $\begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ は (3) の解となる.

又

$$\xi(t) = \sqrt{k}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})$$

$$\eta(t) = \sqrt{l}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})$$

とすると

$$\xi'(t) = a(t)\xi(t) + kb(t)\eta(t)$$

$$\eta'(t) = a(t)\eta(t) + lb(t)\xi(t)$$

となるから $\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$ は (3) の解となる．故に $X(t)$ は (3) の解行列である．また,

$$\begin{aligned} detX(t) &= \frac{1}{4}[\sqrt{kl}e^{2\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})^2 - \sqrt{kl}e^{2\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})^2] \\ &= \sqrt{kl}e^{2\alpha(t)} \neq 0 \end{aligned}$$

であるから $X(t)$ は (3) の基本解行列となる. □

さて $a(t) = \sin t$, $b(t) = \cos\omega t$, $k = l = 1$ とすると

$$\alpha(t) = \int_0^t \sin s ds = 1 - \cos t, \quad \beta(t) = \int_0^t \cos\omega s ds = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

となる．よって (1),(2) を満たす解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)X^{-1}(0)\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから次の Lemma2 が得られる.

Lemma 2.

$$x(t) = \frac{x_0}{2}e^{1-\cos t}(e^{\frac{1}{\omega}\sin\omega t} + e^{\frac{-1}{\omega}\sin\omega t})$$

$$y(t) = \frac{x_0}{2}e^{1-\cos t}(e^{\frac{1}{\omega}\sin\omega t} - e^{\frac{-1}{\omega}\sin\omega t})$$

Remark 1. Lemma 2 により

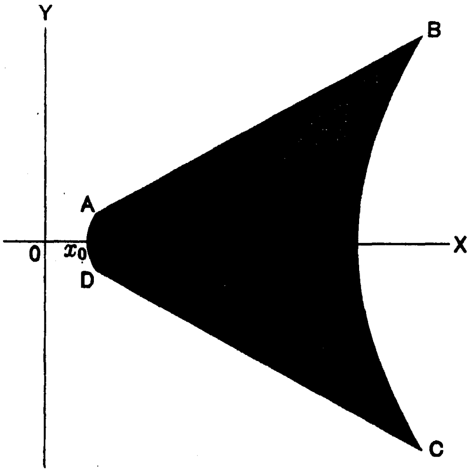
$$x_0 > 0 \text{ ならば } x(t) > 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成立する.

2. Main results and Proof

Theorem 1.

$\omega > 0$:無理数のとき (1),(2) を満たす解軌道は右図のような領域を dense に埋め尽くす．ここで $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ はそれぞれ $y = \pm mx$ (ただし $m = \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1}$), $\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$ はそれぞれ $x^2 - y^2 = x_0^2$, $x^2 - y^2 = e^4 x_0^2$.



Proof of Theorem 1. 以下の Proposition 1 から Proposition 7 により証明する．

Proposition 1.

$$-\frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1} \leqq \frac{y(t)}{x(t)} \leqq \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1} \quad for \quad t \in \mathbb{R}$$

(proof) Lemma 2 を用いると $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{e^{\frac{1}{\omega}\sin\omega t} - e^{\frac{-1}{\omega}\sin\omega t}}{e^{\frac{1}{\omega}\sin\omega t} - e^{\frac{-1}{\omega}\sin\omega t}} = \frac{(e^{\frac{1}{\omega}\sin\omega t})^2 - 1}{(e^{\frac{1}{\omega}\sin\omega t})^2 + 1}$ となる．
$\gamma = e^{\frac{1}{\omega}\sin\omega t}$ とおくと $e^{\frac{-1}{\omega}} \leqq \gamma \leqq e^{\frac{1}{\omega}}$ であり

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}.$$

ところで

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}\right) = \frac{2\gamma(\gamma^2+1) - 2\gamma(\gamma^2-1)}{(\gamma^2+1)^2}\frac{4\gamma}{(\gamma^2+1)^2} > 0 \quad for \quad \gamma > 0$$

であるから $\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}$ は単調増加．よって

$$\text{max of } \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1} = \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1},$$
$$\text{min of } \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1} = -\frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1}.$$

となる．故に

$$-\frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1} \leqq \frac{y(t)}{x(t)} \leqq \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1} \quad for \quad t \in \mathbb{R}$$

□

Remark 2. $m = \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1}$ とすると $0 < m < 1$. また

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1} \text{ となる } t \text{ は } t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right), \quad (l \text{ は整数})$$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1} \text{ となる } t \text{ は } t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{3\pi}{2} + 2l\pi\right). \quad (l \text{ は整数})$$

Proposition 2.

$$x_0^2 \leqq x^2(t) - y^2(t) \leqq e^4 x_0^2 \quad for \quad t \in \mathbb{R}$$

(proof) Lemma 2 より $x^2(t) - y^2(t) = \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 e^{2(1-\cos t)} 4 = x_0^2 e^{2(1-\cos t)}$ であるから

$$x_0^2 \leqq x^2(t) - y^2(t) \leqq e^4 x_0^2$$

□

Remark 3. $x^2(t) - y^2(t) = x_0^2$ となる t は $t = 2n\pi$, (n は整数)

$x^2(t) - y^2(t) = e^4 x_0^2$ となる t は $t = (2n+1)\pi$. (n は整数)

Proposition 1,Proposition 2 により $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ は ABCD によって囲まれる閉領域の中にあることがわかる．この閉領域を S と表すことにする．

次に (1)(2) を満たす解軌道が S を dense に埋め尽くすことを示すため，Diophantus 近似に関する次の Dirichlet の定理を用いる．

Lemma 3. θ を正の無理数，c を実数とすると

$$^{\exists} n_k, m_k \in \mathbb{N};\ n_k, m_k \to \infty \text{ as } k \to \infty$$

and

$$c + n_k\theta - m_k \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

さて $^{\forall}(p,q) \in S$ とすると Proposition 1 により

$$-1 < -\frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} \leqq \frac{q}{p} \leqq \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} < 1$$

が成立している．ところで $\frac{1+s}{1-s}$ は $s < 1$ で単調増加だから $s = \frac{q}{p}$ を代入すると

$$e^{-\frac{2}{\omega}} = \frac{1 - \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1}}{1 + \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1}} \leqq \frac{1 + \frac{q}{p}}{1 - \frac{q}{p}} \leqq \frac{1 + \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1}}{1 - \frac{e^{\frac{2}{\omega}}-1}{e^{\frac{2}{\omega}}+1}} = e^{\frac{2}{\omega}}.$$

故に $r = \sqrt{\frac{p+q}{p-q}} = \sqrt{\frac{1+\frac{p}{q}}{1-\frac{p}{q}}}$ とおくと

$$e^{-\frac{1}{\omega}} \leqq r \leqq e^{\frac{1}{\omega}}$$

すなわち

$$-1 \leqq \omega \log r \leqq +1$$

となるので $\sin^{-1}(\omega \log r)$ が定義できる．又，Proposition 2 により

$$x_0^2 \leqq p^2 - q^2 \leqq e^4 x_0^2$$

であるから

$$x_0 \leqq \sqrt{p^2 - q^2} \leqq e^2 x_0,$$

$$1 \geqq 1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0} \geqq -1$$

となり $\cos^{-1}\left(1 - \log \frac{\sqrt{p^2-q^2}}{x_0}\right)$ が定義できる．

さて Lemma 3 において $\theta = \frac{1}{\omega}$, $c = \frac{1}{2\pi}\{\frac{1}{\omega}\sin^{-1}(\omega \log r) - \cos^{-1}\left(1 - \log \frac{\sqrt{p^2-q^2}}{x_0}\right)\}$ とすると

$$^{\exists}n_k, m_k \in \mathbb{N};\ n_k, m_k \to \infty \text{ as } k \to \infty$$
$$\text{and}$$
$$c + n_k\theta - m_k \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

すなわち

$$\{\frac{1}{\omega}\sin^{-1}(\omega \log r) - \cos^{-1}(1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0})\} + (\frac{2n_k}{\omega} - 2m_k)\pi \to 0 \quad as \quad k \to \infty \tag{4}$$

が成立する．さて

$$t_{n_k} = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}(\omega \log r) + \frac{2n_k\pi}{\omega} \tag{5}$$

$$\tilde{t}_{m_k} = \cos^{-1}(1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0}) + 2m_k\pi \tag{6}$$

とおくと (4),(5),(6) により次の Proposition 3 が成立する．

Proposition 3.

$$t_{n_k} \to \infty \quad as \quad k \to \infty$$

and

$$|t_{n_k} - \tilde{t}_{m_k}| \to 0 \quad as \quad k \to \infty$$

以下，数列 (5)(6) の性質を述べる．

Proposition 4.

$$\frac{y(t_{n_k})}{x(t_{n_k})} = \frac{q}{p}$$

(proof)

$$\sin \omega t_{n_k} = \sin(\sin^{-1}(\omega \log r) + 2n_k\pi) = \sin(\sin^{-1}(\omega \log r)) = \omega \log r$$

であるから $e^{\frac{1}{\omega}\sin \omega t_{n_k}} = r$ となり

$$\frac{y(t_{n_k})}{x(t_{n_k})} = \frac{e^{\frac{1}{\omega}\sin \omega t_{n_k}} - e^{\frac{-1}{\omega}\sin \omega t_{n_k}}}{e^{\frac{1}{\omega}\sin \omega t_{n_k}} - e^{\frac{-1}{\omega}\sin \omega t_{n_k}}} = \frac{r - \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r}} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} = \frac{q}{p}$$

□

Proposition 5.

$$x^2(\tilde{t}_{m_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k}) = p^2 - q^2$$

(proof)

$$\begin{aligned}\cos \tilde{t}_{m_k} &= \cos(\cos^{-1}(1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0}) + 2m_k\pi) \\ &= 1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0}\end{aligned}$$

であるから，Lemma 2 を用いると

$$x^2(\tilde{t}_{m_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k}) = x_0^2 e^{2(1-\cos \tilde{t}_{m_k})} = x_0^2 e^{\log \frac{p^2-q^2}{x_0^2}} = p^2 - q^2$$

□

Proposition 6.

$$x^2(t_{n_k}) - y^2(t_{n_k}) \to p^2 - q^2 \quad as \quad k \to \infty$$

(proof)

$$x^2(t_{n_k}) - y^2(t_{n_k}) = x^2(\tilde{t}_{m_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k}) + [x^2(t_{n_k}) - x^2(\tilde{t}_{m_k})] - [y^2(t_{n_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k})]$$

と変形して Proposition 5 を用いると

$$x^2(t_{n_k}) - y^2(t_{n_k}) = p^2 - q^2 + [x^2(t_{n_k}) - x^2(\tilde{t}_{m_k})] - [y^2(t_{n_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k})].$$

Proposition 3 を用いると $k \to \infty$ のとき上式の第 2 項，第 3 項 $\to 0$ であるから

$$x^2(t_{n_k}) - y^2(t_{n_k}) \to p^2 - q^2 \quad as \quad k \to \infty$$

□

Proposition 7.

$$x(t_{n_k}) \to p, \quad y(t_{n_k}) \to q \quad as \quad k \to \infty$$

(proof) Proposition 4 により $y(t_{n_k}) = \frac{q}{p}x(t_{n_k})$ だから Proposition 6 を用いると

$$x^2(t_{n_k}) - \frac{q^2}{p^2}x^2(t_{n_k}) \to p^2 - q^2 \quad as \quad k \to \infty.$$

すなわち

$$\frac{1}{p^2}(p^2 - q^2)x^2(t_{n_k}) \to p^2 - q^2 \quad as \quad k \to \infty.$$

ところで $-1 < \frac{q}{p} < 1$ だから $p^2 - q^2 \neq 0$. よって

$$\frac{1}{p^2}x^2(t_{n_k}) \to 1 \quad as \quad k \to \infty.$$

Remark 1 により $x_0 > 0$ なら $x(t) > 0$ に注意すると

$$x(t_{n_k}) \to p \quad as \quad k \to \infty.$$

よって Proposition 4 により

$$y(t_{n_k}) \to q \quad as \quad k \to \infty.$$

従って $(x(t), y(t))$ は S を dense に埋め尽くす. これで Theorem 1 の証明が完了した.□

Theorem 2. $\omega > 0$:有理数のとき (1),(2) を満たす解軌道は S を動く周期軌道.

(proof) Lemma 2, Proposition 1, Proposition 2 より解軌道が S 内にあることは明らか. 周期軌道であることを示そう.

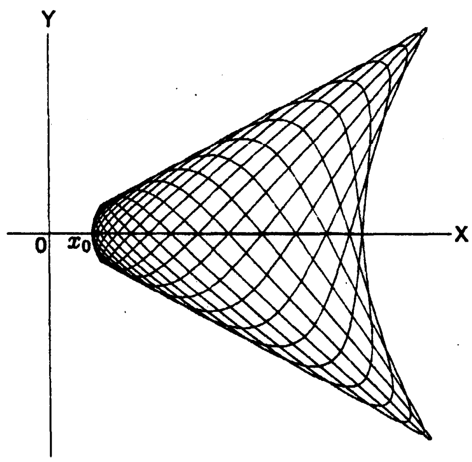
$\omega = \frac{h}{l}$ (k, l は互いに素な整数) とすると

$\cos t$ は周期 2π, $\sin \omega t$ は周期 $\frac{2\pi l}{h}$ である.

$2\pi a = \frac{2\pi l}{h}b$ とすると $ah = bl$ となる. l, h は互いに素だから上式が成立するためには $a = l, b = h$.

故に $\cos t$ と $\sin \omega t$ の共通周期は $2\pi l$ である.

Lemma 2. より $x(t)$, $y(t)$ は $\cos t$, $\sin \omega t$ の合成関数だから $\omega = \frac{h}{l}$ のとき解軌道は $2\pi l$ 周期となる.



(II) $k=0$ の場合

Theorem 3.

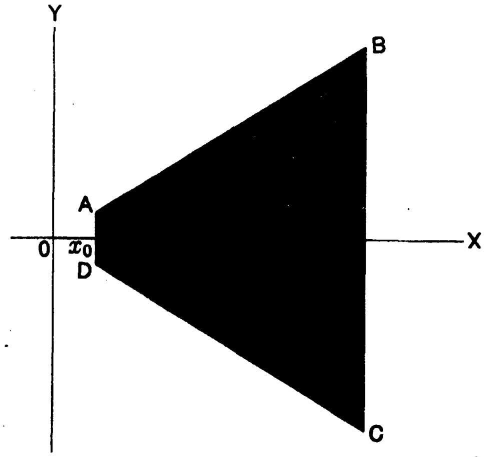
$\omega>0$:無理数のとき (1),(2) を満たす解軌道は右図のような領域 S を dense に埋め尽くす．ここで

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ はそれぞれ

$y=\pm\frac{1}{\omega}x$,

$\overline{AD}$, $\overline{BC}$ はそれぞれ

$x=x_0, \quad x=x_0e^2$.



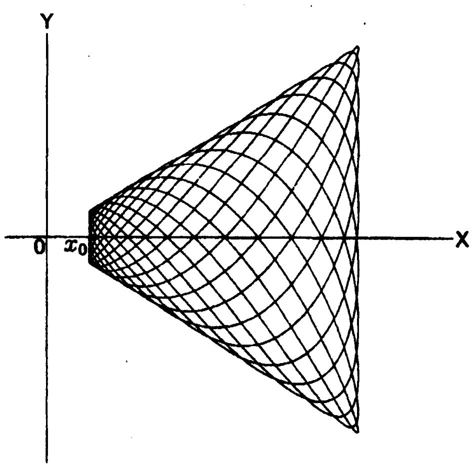
Theorem 4. $\omega>0$:有理数のとき (1)(2) を満たす解軌道は S を動く周期軌道.

(1)(2) を満たす解は

$x(t)=x_0e^{1-\cos t}$

$y(t)=\frac{x_0}{\omega}e^{1-\cos t}\sin\omega t$

となり Theorems 3, 4 の証明は Theorems 1, 2 の証明と同じようにできる.



(III) $k=-1$ の場合 ($0<\frac{1}{\omega}<\pi$ としておく)

Theorem 5.

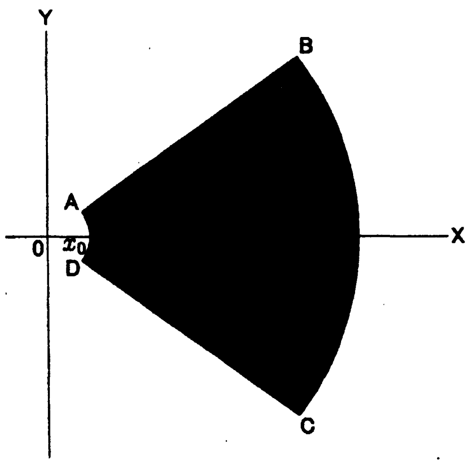
$\omega>0$:無理数のとき (1),(2) を満たす解軌道は右図のような領域 S を dense に埋め尽くす．ここで

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ はそれぞれ

$y=\pm mx$ (ただし $m=\tan\frac{1}{\omega}$),

$\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BC}$ はそれぞれ

$x^2+y^2=x_0^2, \quad x^2+y^2=e^4x_0^2$.



Theorem 6. $\omega > 0$:有理数のとき (1),(2) を満たす解軌道は S を動く周期軌道.

(1)(2) を満たす解は

$x(t) = x_0 e^{1-\cos t} \cos\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$

$y(t) = x_0 e^{1-\cos t} \sin\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$

となり Theorems 5, 6 の証明は Theorems 1, 2 の証明と同じようにできる.