数理解析研究所講究録
第 1582 巻 2008 年 127-134

Remark on uniqueness of positive solution for Brezis-Nirenberg type super linear 2nd order ODEs

岐阜大学 工学部 淺川 秀一 (Hidekazu ASAKAWA)
Faculty of Engineering, Gifu University

1 序

次のような半線形二階常微分方程式を考える.

$$v''(t)+q(t)v(t)+t^{-(p+3)/2}|v(t)|^{p-1}v(t)=0, \qquad 0<t<1. \tag{E}$$

ただし，指数 $p>1$ であり，線形項の係数関数 $q(\cdot)$ は開区間 $(0,1)$ 上で連続とする．$\mathbf{R}^N$ $(N>2)$ の単位球上における Brezis-Nirenberg 型方程式 $\Delta u+\mu u+u^{(N+2)/(N-2)}=0$ は，その球対称解 $u(r):=u(|x|)$ の満たす常微分方程式を，変数変換することによって，$q(t):=\lambda t^{2/(N-2)-2}$ とした方程式 (E) となるので，上の方程式 (E) を Brezis-Nirenberg 型の優線形常微分方程式と呼ばせてもらう.

ソボレフの臨界指数をもつ，Brezis-Nirenberg 型方程式をはじめとする種々の半線形楕円型偏微分方程式の正値解の存在に対して，臨界次元現象と呼ばれる特異現象が起こることは [8, 14, 13] 等に述べられているようによく知られるところである．当然のことではあるが，方程式 (E) の正値解の存在に対しても，全く同様の特異現象が起こる．その現象の解明を試みるには，方程式 (E) の H_0^1-正値解の存在定理と非存在定理の両方を構築する必要がある．文献 [2] ([4, 14] も参照）では，方程式 (E) の臨界次元現象の解析を行ったのではあるが，存在定理に比して非存在定理が脆弱だったため，係数関数 $q(\cdot)$ が非負の場合しか扱うことができなかった．例えば，熱方程式の前向き自己相似解の楕円型偏微分方程式に対応する方程式 (E) では，$q(\cdot)$ は非負ではないが臨界次元現象が起こっている（[4]）．したがて，$q(\cdot)$ が非負の場合にも適用できることを念頭において，方程式 (E) の正値解の非存在条件を探しはじめることになった．その時点では，方程式 (E) の正値解の一意性の問題は全く視野の外であったが，方程式 (E)

の正値解の非存在と一意性の問題は結果的に同一の問題と考えてよいものであった．それは，一意性を高々一つの解しかもたないと解釈すれば，解の非存在は解の一意性をも意味するというだけではなくて，方程式 (E) の正値解の非存在と一意性は，同じ道具立の下で同じ議論から導き出せてしまうということである．

楕円型偏微分方程式の正値解の非存在といえば，Pohozaev-の等式が主要な道具として思い浮かぶであろう．非存在をも含む広い意味の 一意性にまで拡げて考えるなら，どちらかと言えば重要な役割を果たす道具は，Sturm の零点比較定理である． ここで，Sturm の零点比較定理と言っているのは，商の微分の公式を積分しただけの次の等式である．

$$\frac{V(b)}{v(b)} = \frac{V(a)}{v(a)} + \int_a^b \frac{W(t)}{v(t)^2}\,dt, \qquad W(t) := V'(t)v(t) - V(t)v'(t)$$

$W(\cdot)$ は， $V(\cdot)$ と $v(\cdot)$ が線形微分方程式の解のときにはロンスキアンと呼ばれるものであるから，ロンスキアンと呼ぶことにする．ロンスキアン $W(\cdot)$ が非負（非正）であれば，$V(\cdot)$ と $v(\cdot)$ が一致する，すなわち，

$$W(\cdot) \geq 0, \mathrm{or}, W(\cdot) \leq 0 \implies V(\cdot) \equiv v(\cdot)$$

が原理であり，$V(\cdot)$ と $v(\cdot)$ の両方ともが方程式 (E) の解のときには一意性が得られ，$V(\cdot)$ と $v(\cdot)$ の一方を線形部の方程式の解にすると非存在が得られる．ロンスキアン $W(\cdot)$ の符号の制御は，劣線形 $0 < p < 1$ の場合には方程式 (E) だけからでも可能であるが（例えば，[7] を参照），優線形 $p > 1$ の場合には，方程式 (E) だけからでは困難であって，Pohozaev 型エネルギーの助けが必要となる．例えば， $v(\cdot)$ が方程式 (E) の H_0^1-正値解であって，その Pohozaev 型エネルギー

$$E(v(t)) := (tv'(t) - v(t))v'(t) + t^2 q(t)\left(\frac{v(t)}{\sqrt{t}}\right)^2 + \frac{2}{p+1}\left(\frac{v(t)}{\sqrt{t}}\right)^{p+1} \quad \text{(PE)}$$

が正のときには，方程式 (E) の他の解 $V(\cdot)$ との間のロンスキアン $W(\cdot)$ の符号の評価が可能となる．しかし，エネルギー $E(v(t))$ に非負性がないときには，ロンスキアン $W(\cdot)$ の符号の評価はとてもできそうにないし，また，断言まではできないが，方程式 (E) の H_0^1-正値解に一意性はないのではないかと思われる．

本稿は，文献 [3] で得られた方程式 (E) の H_0^1-正値解の一意性についての結果の報告である．現時点では，整理が不十分な面もあって，不完全ではあるが，[20, 15] 等による構造定理と同様な結果が得られている．楕円

型偏微分方程式も含めた正値解の一意性に関する文献は枚挙にいとまないが，関連性が深いといういう意味で，Kwong- Li [17] と Yanagida-Yotutani [20] には触れておこうと思う．この二つは何れも Ynagida [19] に端を発する Pohozaev 型エネルギーを用いた楕円型偏微分方程式の正値球対称解の一意性定理を与えている．Kwong- Li [17] は，線形項の係数が山形のグラフという条件のもとで，正値解の非存在も含む意味での一意性を示している．その条件は，正値解が対応する Pohozaev 型エネルギーの非負性をもつための十分条件である．また，Yanagida-Yotutani [20] では初期値問題の解の挙動を分類する構造定理という形で一意性定理が与えられている．対応する Pohozaev 型エネルギーが非負性をもつ正値解は，一意解であることも述べられている [20, Proposition 3.1]．文献 [3] の一意性定理は，(PE) で与えられる Pohozaev 型エネルギーに対しても同様の結果が成り立つことを示したものということになる．

2 結果

[3] の結果を述べる準備として，その全般にわたって仮定する線形項の係数関数 $q(\cdot)$ への条件，より正確には，次の方程式 (E) の線形部の方程式 に対する条件を述べておく．それは，方程式 (E) の正値解の非存在が Sturm の零点比較定理より簡単に分かる場合を排除しておくことになる．

$$v''(t)+q(t)v(t)=0, \qquad 0<t<1. \tag{LE}$$

線形方程式 (LE) の解が，境界 $t=0$，或いは，$t=1$ の近くで振動するときには，Sturm の零点比較定理により方程式 (E) の解も振動するから，(E) は正値解をもち得ない．ここでは，$q(\cdot)$ に次の非振動条件を仮定する．

<u>非振動条件 (NOC)</u>

$$\begin{aligned} q[0] &:= \lim_{t\to 0} t^2 q(t) = 0 \\ q[1] &:= \lim_{t\to 1} (1-t)^2 q(t) = \frac{1-\mu^2}{4} \quad (\mu>0). \end{aligned} \tag{NOC}$$

また，次の Disconjugate 条件を線形部の方程式 (LE) が満たさないときは，同じ零点比較定理により，方程式 (E) の解は区間 $(0,1)$ 内に少なくても一つ零点をもつことになるから，やはり (E) は正値解をもち得ない．し

たがって，次の条件 (**DC**) も仮定する．

Disconjugate 条件 (**DC**)
線形部の方程式 (LE) の正值解 $\phi(\cdot)$ で

$$\int_0^{1/2} \phi(t)^{-2}\,dt = \infty, \quad \int_{1/2}^{1} \phi(t)^{-2}\,dt < \infty \tag{2.1}$$

を満たすものが存在する．このとき，関数 $\hat{\phi}(\cdot)$ を

$$\hat{\phi}(t) := \phi(t)\int_t^1 \phi(s)^{-2}\,ds$$

で定義すると， $\hat{\phi}(\cdot)$ は

$$\int_{1/2}^{1} \hat{\phi}^{-2}(t)\,dt = \infty, \quad \int_0^{1/2} \hat{\phi}^{-2}(t)\,dt < \infty. \tag{2.2}$$

を満たす (LE) の正值解である．

以下では，(**NOC**) と (**DC**) を常に仮定する．方程式 (E) の 正值解 $v(\cdot)$ に対して，次が成り立つ (証明は [2] を参照せよ)．

Lemma 1. 次の三条件 (**a**)-(**c**) は互いに同値である．

(**a**) $v(\cdot) \in H_0^1(0,1)$;

(**b**) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{v(t)}{\phi(t)} > 0$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{v(t)}{\hat{\phi}(t)} > 0$;

(**c**) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{tv'(t)}{v(t)} = 1$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{(1-t)v'(t)}{v(t)} = -\frac{1+\mu}{2}$.

また， もしも $\int_0^1 t(1-t)|q(t)|\,dt < +\infty$ であれば，$v(\cdot) \in C^1[0,1]$ である．

さて，先ずは一意性定理から述べることにしよう．

Theorem 2. 方程式 (E) の H_0^1-正值解 $v(\cdot)$ が

$$E(v(t)) \geq 0 \; for\; t \in (0,1) \; and \; E(v(\cdot)) \not\equiv 0 \tag{PE}$$

を満たすなら，次の (**a**),(**b**) が成り立つ．

(**a**) $V(\cdot)$ が $\lim_{t\to 0}\dfrac{V(t)}{v(t)} \in (0,1)$ なる方程式 (E) の解ならば，$\dfrac{V(\cdot)}{v(\cdot)}$ は $(0,1)$ 区間上で単調増加であり $\lim_{t\to 1}\dfrac{V(t)}{v(t)} = +\infty$ が成り立つ.

(**b**) $V(\cdot)$ が $\lim_{t\to 0}\dfrac{V(t)}{v(t)} \in (1,+\infty)$ なる方程式 (E) の解ならば，$V(\cdot)$ は少なくとも一つの零点を区間 $(0,1)$ 内にもつ.

Theorem 3. 方程式 (E) の H_0^1-正値解 $v(\cdot)$ が *(PE)* を満たすなら，次の (**a**),(**b**) が成り立つ.

(**a**) $V(\cdot)$ が $\lim_{t\to 1}\dfrac{V(t)}{v(t)} \in (0,1)$ なる方程式 (E) の解ならば，$\dfrac{V(\cdot)}{v(\cdot)}$ は $(0,1)$ 区間上で単調減少であり $\lim_{t\to 0}\dfrac{V(t)}{v(t)} = +\infty$ が成り立つ.

(**b**) $V(\cdot)$ が $\lim_{t\to 1}\dfrac{V(t)}{v(t)} \in (1,+\infty)$ なる方程式 (E) の解ならば，$V(\cdot)$ は少なくとも一つの零点を区間 $(0,1)$ 内にもつ.

[2] の存在定理により得られる，条件 (PE) を満たす方程式 (E) の H_0^1-正値解 $v(\cdot)$ が存在するための十分条件は，次のようになる

Corollary 4. $q(\cdot) \in L^1(0,1/2)$ のときには，*(2.2)* を満たす線形部の方程式 (LE) の正値解 $\hat{\phi}(\cdot)$ が $\hat{\phi}'(0) > 0$ を満たすとする．このとき，次の条件 (1) または (2) が成り立てば，方程式 (E) の H_0^1-正値解がただ一つ存在する.

(1) $t^2q(t)$ が 区間 $(0,1)$. 上で単調増加；

(2) $\sigma \in (0,1)$ があって $t^2q(t)$ は 区間 $(0,\sigma]$ では単調増加であり区間 $[\sigma,1)$ 上では単調減少.

今度は，非存在定理を述べるために，線形部の方程式 (LE) の解 $\psi(\cdot)$ に対して，エネルギーを次のように定義する.

$$E_0(\psi(t)) := (t\psi'(t) - \psi(t))\psi'(t) + t^2q(t)\left(\frac{\psi(t)}{\sqrt{t}}\right)^2.$$

Theorem 5. *(2.2)* を満たす線形部の方程式 (LE) の正値解 $\hat{\phi}(\cdot)$ に対して,

$$E_0(\hat{\phi}(t)) \geq 0 \textit{ for } t \in (0,1) \textit{ and } E_0(\hat{\phi}(t)) \not\equiv 0 \tag{2.3}$$

であるか, *(2.1)* を満たす線形部の方程式 (LE) の正値解 $\phi(\cdot)$ に対して,

$$E_0(\phi(t)) \leq 0 \textit{ for } t \in (0,1) \textit{ and } E_0(\phi(t)) \not\equiv 0 \tag{2.4}$$

であれば, 次の (**a**), (**b**) が成り立つ.

(**a**) $v(\cdot)$ が $\lim_{t\to 0} \dfrac{v(t)}{\phi(t)} \in (0,+\infty)$ なる方程式 (E) の解ならば, $\dfrac{v(\cdot)}{\phi(\cdot)}$ は $(0,1)$ 区間上で単調増加であり $\lim_{t\to 1} \dfrac{v(t)}{\phi(t)} = +\infty$ が成り立つ.

(**b**) $v(\cdot)$ が $\lim_{t\to 1} \dfrac{v(t)}{\hat{\phi}(t)} \in (0,+\infty)$ なる方程式 (E) の解の解ならば, $v(\cdot)$ は $t \to 0$ のとき振動する.

次の (1)-(3) は, 条件 (2.3) または (2.4) が成り立つための十分条件である.

Corollary 6. 次の条件 (1), (2), (3) の何れかが成り立てば, 方程式 (E) は H_0^1-正値解をもたない.

(1) $t^2 q(t)$ が区間 $(0,1)$ 上で単調減少 ;

(2) $q(\cdot) \in L^1(0,1/2)$ かつ $\hat{\phi}'(0) \leq 0$ であり, 区間 $(0,1)$ 上で $q(\cdot) \geq 0$;

(3) $q(\cdot) \in L^1(0,1/2)$ かつ $\hat{\phi}'(0) \leq 0$ であり, $\sigma \in (0,1)$ があって, 区間 $(0,\sigma]$ では $q(\cdot) \geq 0$ であり区間 $[\sigma,1)$ 上では $t^2 q(t)$ が単調減少.

ただし, $\hat{\phi}(\cdot)$ は, *(2.2)* を満たす線形部の方程式 (LE) の正値解である.

References

[1] H. Asakawa; Existence of positive solutions for superlinear 2nd order boundary value problems with conditionally integrable coefficents, preprint

[2] H. Asakawa; Phenomenon of critical dimension to Brezis-Nirenberg type super linear 2nd order ODEs, preprint.

[3] H. Asakawa; Uniqueness and structure of positive solution for Brezis-Nirenberg type super linear 2nd order ODEs, preprint

[4] Remark on existence of positive radial solutions for semi-linear elliptic equations with harmonic term, *Surikaisekikenkyusho kokyuroku* **1547** (2007) 10-17

[5] R. D. Benguria, J. Dolbeault and M. J. Esteban; Classification of the solutions of semilinear elliptic problems in a ball, *J. Differential Equations* **167** (2000), 438–466.

[6] F. V. Atkinson, L A Peletier; Radial similarity of a parabolic equation, "Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions (Rome, 1985)," *Pitman Res. Notes Math. Ser., 149, Longman Sci. Tech., Harlow*, 1987, 5–12

[7] H. Brezis and S. Kamin, Sublinear elliptic equations in R^n, *Manuscripta Math.* 74 (1992), 87-106.

[8] H. Brezis and L. Nirenberg; Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437–477.

[9] H. Brezis and L. A. Peletier; Elliptic equations with critical exponent on spherical caps of S^3, *J. Anal. Math.* **98** (2006), 279–316.

[10] C. V. Coffman, J. S. W. Wong; Oscillation and nonoscillation of solutions of generalized Emden-Fowler equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **167** (1972), 399–434.

[11] B. Gidas, W.-M. Ni, L. Nirenberg; Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209 –243.

[12] H. E. Gollwitzer, Nonoscillation theorems for a nonlinear differential equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **26** (1970), 78–84.

[13] M. Escobedo and 0. Kavian; Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, *Nonlinear Anal. TMA* **11** (1987), 1103–1133.

[14] E. Jannelli; The role played by space dimension in elliptic critical problem, *J. Differential Equations* **156** (1999), 407–426.

[15] Y. Kabeya, E. Yanagida and S. Yotsutani; Canonical forms and structure theorems for radial solutions to semi-linear elliptic problems, *Communication on Pure and Applied Analysis* **1** (2002), 85-102.

[16] T. Kusano, M. Naito; Oscillation theory of entire solutions of second superlinear elliptic equations, *Funkcial. Ekvac.* **30** (1987), 269–282.

[17] M. K. Kwong, Y. Li; Uniqueness of radial solutions of semilinear elliptic equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), 339–363.

[18] Y. Naito Self-similar Solutions for a Semilinear Heat Equation with Critical Sobolev Exponent, to appear in Indiana Univ. Math. J.

[19] E. Yanagida; Uniqueness of Rapidly Decaying Solutions to the Haraux-Weissler Equation, *J. Differential Equations* **127** (1996), 561–570.

[20] E. Yanagida and S. Yotsutani, Classification of structure of positive radial solutions to $\Delta + K(|x|)u^p = 0$ in R^n, *Arch. Rational Mech.* Vol. 124 (1993), 239–259.

[21] E. Yanagida and S. Yotsutani, A unified approach to the structure of radial solutions for semilinear elliptic problems. Recent topics in mathematics moving toward science and engineering. *Japan J. Indust. Appl. Math.* Vol. 18 (2001), 503–519.