数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 1-18

関孝和によるベルヌーイ数の発見*

四日市大学　小川束†

2007 年 8 月 21 日

概要

本論文は関孝和（?–1708）の遺著『括要算法』（全 4 巻，1709 年序，1712 年刊）の第一巻で与えられた「垜積術」（冪乗和の公式）について一つの仮説を提示するものである．この仮説は関がどのようにしてベルヌー数を得たかを示すものでもある．また，パスカルの三角形に現われる数列の和の公式についても，その解釈を述べる．なお，実例の計算に用いられたと思われる「累裁招差之法」についてもまとめておく．

1　はじめに

関孝和（?–1708）は日本の近世初期に現われたもっとも傑出した数学者の一人であった．彼は中国伝来の天元術に改良を加え，整式の使用を可能にし，それによって当時提出されていた種々の難問を解決した*1．後に傍書法とよばれるようになる関の方法は急速に広まり，19 世紀後半の西洋数学の導入に至るまで，近世日本の数学における主要な表記法としてその地位を保つこととなった．

関の数多くある業績の中で，ここで述べる「垜積術」（冪乗和の公式）は，たしかに特筆に価するものである．そこには自然にベルヌーイ数が現われ，しかもベルヌーイ自身の遺著 *Ars Conjectandi* (1713) における記述よりも詳細なのである．関の議論が述べられているのは 1709 年自序，1712 年刊行の『括要算法』においてであったが，その先取権に関してここで議論をしようとは思わない．むしろ，関の記述に関するひとつの解釈を提案して，未だ十分とは言えない関の冪和公式の理解に供したい．これまで『括要算法』第一巻については，[5] や [6] に要約があったが，その意味，解釈については十分ではなかった．また [1], [4] において，それぞれ異なった仮説が提案されているが，いずれも表あるいは本文の読み方に疑義があるようにも思われる．本論ではそれらとは異なった解釈を試みる．

以下，第 2 節では『括要算法』第 1 巻の構成を簡単にまとめておく．ここでは「累裁招差之法」が「垜積総術」の中に位置づけられていることを改めて指摘する．第 3 節では「累裁招差之法」の

---

* The Bernoulli Numbers Discovered by Seki Takakazu

† OGAWA Tsukane, Yokkaichi University, 1200 Kayo, Yokkaichi, Mie, 512-8512, Japan.
E-mail address: ogawa@yokkaichi-u.ac.jp

*1 同時代の田中由真の著作にも同様の記述があり，天元術の改良という業績を関一人に帰すことが妥当かどうか，厳密に言えば疑義もある．しかしここでは従来の通説にしたがっておく．

計算についてまとめておく．「累裁招差之法」は補間法の一種であるが，計算を進めなければ補間する多項式の次数が決まらないことを若干強調して述べる．第 4 節は本論の中心で，「垜積術」について，関の計算がどのようなものであったかを述べる．『括要算法』の記述は簡潔であり，そのためにかえってこれまで十分に理解されていなかった．ここでは一つの仮説を述べる．第 5 節では「衰垜」とよばれるパスカルの三角形に現われる数列の和について述べる．「衰垜」の公式は「垜積」の公式と同様の戦略によって得られるが，「衰垜」が「垜積」よりもはるかに簡単なことがわかるであろう．

2　『括要算法』第一巻の構成

関孝和の遺著とされる『括要算法』全四巻の第一巻は「垜積総術」と称され，「累裁招差之法」，「方垜」，「衰垜」の三章からなっている．「垜積」とは「方垜」および「衰垜」の総称である．第一章「累裁招差之法」は中国から伝来した「招差法」を改良した「累裁招差之法」のマニュアルであり，その計算例が付されている．第二章「方垜」では冪乗和

$$s_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p \tag{1}$$

を求める方法が述べられる．この計算においてベルヌーイ数が現われる．そして第三章「衰垜」では

$$\begin{aligned} t_1(n) &= 1 + 2 + \cdots + n = s_1(n), \\ t_k(n) &= \sum_{k=1}^{n} t_{k-1}(k) \quad (k \geq 2) \end{aligned} \tag{2}$$

で定められる $t_k(n)$ を求める方法が述べられる．

以下，これらについて詳細に検討するが，ここでは「累裁招差之法」，「方垜」，「衰垜」が「垜積総術」として一括りになっていることに注意すべきであろう．すなわち，「方垜」，「衰垜」が「垜積総術」を構成するのは当然としても，「累裁招差之法」も「垜積総術」の中に位置づけられているのである．「累裁招差之法」自身は補間，補外計算のための手法であり，「方垜」，「衰垜」とは直接の関係はない．それにも関わらずこれが「垜積総術」に含まれているのは，それが「方垜」，「衰垜」と技術的に何らかの関連があるからである．この点については [6] でわずかに示唆されているように，「累裁招差之法」が「方垜」，「衰垜」の実例計算のために用いられたと考えるのがもっとも自然である．

さて，関の計算の戦略は，

a. いくつかの実例を計算し，
b. それからその先の一般の場合を得るアルゴリズムを推定し，
c. それがすでに計算した例にも適用できることを確かめることによって正しさを確信する，

の三段階にわかれる．この第 a 段における実例の計算に「累裁招差之法」は用いられたのである（計算例は第 4 節で述べる）．つまり，「累裁招差之法」は「方垜」，「衰垜」公式の帰納的推定の根拠

を準備するために用いられたのであり，それを一緒に述べたからこそ，この第一巻は「垜積総術」と「総術」を付されているのである．「方垜」と「衰垜」のみならことさら「総術」と名づける必要はなく，「垜積」だけで済むことである．

「方垜」，「衰垜」の計算に「累裁招差之法」を用いることは，中国にその起源を見出すことができる．たとえば朱世傑の『四元玉鑑』(1303) には「衰垜」の計算が述べられている．資料が十分でないため，推定の域を出ないともいえるが，これらの計算には「招差法」が用いられたと考えられている ([2])．

3 累裁招差之法

「累裁招差之法」の起源は明らかに中国の暦算にある．すなわち，元の朱世傑の『授時暦経』(1281年施行) や清の黄鼎の『天文大成管窺輯要』(1652年自序，八十巻) の巻八「論日躔盈縮差」の「招差法」を改良したのが「累裁招差法」である．本節では「招差法」と「累裁招差法」についてまとめておく．

3.1 招差法

「招差法」は多項式による補間法の一つで，天文観測の結果得られた有限個のデータ (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_m, y_m), ただし，

$$x_k = kx_1 \quad (1 \leq k \leq m) \tag{3}$$

に対して，定数項のない多項式 $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x$ で $y_k = F(x_k)$ $(1 \leq k \leq m)$ を満たすものを見出す方法である．

まず

$$f(x) = \frac{F(x)}{x} = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \tag{4}$$

とし，

$$z_k = \frac{y_k}{x_k} = a_0{x_k}^{n-1} + a_1{x_k}^{n-2} + \cdots + a_{n-1}, \quad k = 1, 2, \cdots, m \tag{5}$$

とおく．このとき，もし $dz_k = z_k - z_{k-1}$ $(2 \leq k \leq m)$ がすべて等しければ，$a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-3} = 0$ でよく，

$$a_{n-2} = \frac{dz_2}{x_1}, \quad a_{n-1} = z_1 - \frac{dz_2}{x_1}x_1 \tag{6}$$

となる．一方，dz_k の中に異なるものがある場合は，$d^2z_k = dz_k - dz_{k-1}$ $(3 \leq k \leq m)$ とおく．d^2z_k がすべて等しければ，$a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-4} = 0$ でよく，

$$a_{n-3} = \frac{d^2z_3}{2{x_1}^2}, \quad a_{n-2} = \frac{1}{x_1}\left(dz_2 - \frac{3}{2}d^2z_3\right), \quad a_{n-1} = z_1 - dz_2 + d^2z_3 \tag{7}$$

となる．d^2z_k の中に異なるものがある場合は，同様に繰り返す．

3.2 累裁招差之法

以上の計算においては $x_k = kx_1$（$1 \leq k \leq m$）であることが重要で，一般の場合にはこのように計算することはできない．その点を改良したのが関の「累裁招差之法」である．以下，条件（3）がない場合を考える．

まず $z_1 = z_2 = \cdots = z_m = c$ の場合は $f(x) = c$，したがって $F(x) = cx$ でよいから，以下 z_k（$k = 1, 2, 3 \cdots, m$）の中には等しくないものがあるとする．

z_k の階差は

$$dz_k = a_0({x_k}^{n-1} - {x_{k-1}}^{n-1}) + \cdots + a_{n-2}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \cdots, m \tag{8}$$

であるから，$dx_k = x_k - x_{k-1}$ として，

$$\delta_k{}^{(1)} = \frac{dz_k}{dx_k} = a_0 \frac{{x_k}^{n-1} - {x_{k-1}}^{n-1}}{x_k - x_{k-1}} + \cdots + a_{n-2}, \quad k = 2, 3, \cdots, m \tag{9}$$

を計算し，$\delta_k{}^{(1)}$（$k = 2, 3, \cdots, m$）が等しいかどうかを見る．

3.2.1 一次相乗之法

もしこれらがすべて等しければ，その値を δ とするとき，$a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-3} = 0$，$a_{n-2} = \delta$ とおける．すなわち，$f(x)$ を一次式で，一次の係数を δ とできる．このとき (5) は $z_i = \delta x_i + a_{n-1}$ ($1 \leq i \leq m$) であるが，$z_i - \delta x_i$ は i によらず一定値であるから，$a_{n-1} = z_i - \delta x_i$ とおくことができて，定数項が決まる．このような補間法を関は「一次相乗之法」と称している．

以上の計算は次のように表の形で計算される．

第一

	限数	定積	平積法	平積実	平積
第 1 段	x_1	z_1	dx_2	dz_2	$\delta_2{}^{(1)}$
第 2 段	x_2	z_2	dx_3	dz_3	$\delta_3{}^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 $m-1$ 段	x_{m-1}	z_{m-1}	dx_m	dz_m	$\delta_m{}^{(1)}$
第 m 段	x_m	z_m			

第二

	限数	定積
第 1 段	x_1	$z_1 - \delta x_1$
第 2 段	x_2	$z_2 - \delta x_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 m 段	x_m	$z_m - \delta x_m$

関は x_k を「限数」，z_k を「定積」，dz_k を「平積法」，dx_k を「平積実」，$\delta_k{}^{(1)}$ を「平積」とよんでいる．また表の各行を「段」とよんでいる．なお，係数 a_{n-1} は「定差」，係数 a_{n-2} は「平差」とよばれる．

3.2.2　「二次相乗之法」

もし (9) の中に等しくないものがあるときは，これらの階差をとると，

$$d\delta_k{}^{(1)} = \delta_k{}^{(1)} - \delta_{k-1}{}^{(1)} = \cdots + a_{n-3}\left\{\frac{x_k{}^2 - x_{k-1}{}^2}{x_k - x_{k-1}} - \frac{x_{k-1}{}^2 - x_{k-2}{}^2}{x_{k-1} - x_{k-2}}\right\}$$
$$= \cdots + a_{n-3}(x_k - x_{k-2}) \quad (3 \leq k \leq m) \tag{10}$$

となるから，

$$\delta_k{}^{(2)} = \frac{d\delta_k{}^{(1)}}{x_k - x_{k-2}} \quad (3 \leq k \leq m) \tag{11}$$

として，$\delta_k{}^{(2)}$ ($k = 3, 4, \cdots, m$) が等しいかどうかを見る．もしこれらがすべて等しければ，それを δ として，$a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-4} = 0$，$a_{n-3} = \delta$ とおける．すなわち，$f(x)$ を二次式で，二次の係数を δ とできる．このとき (5) は $z_i = \delta x_i{}^2 + a_{n-2}x_i + a_{n-1}$ $(1 \leq i \leq m)$ となるが，$z_i - \delta x_i{}^2$ は i によって異なる値をとりうる．そこで $z_i{}^{(1)} = z_i - \delta x_i{}^2$ $(1 \leq i \leq m)$ とおいて，$(x_i, z_i{}^{(1)})$ $(1 \leq i \leq m)$ を $y = a_{n-2}x + a_{n-1}$ で補間することを考える．

この場合，

$$\epsilon_i{}^{(1)} = \frac{dz_i{}^{(1)}}{dx_i} = \frac{z_i{}^{(1)} - z_{i-1}{}^{(1)}}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \cdots, m \tag{12}$$

が i によらず一定値 ϵ をとることから，必ず「一次相乗之法」に帰着できる ($a_{n-2} = 0$ の場合もありうる)．このような補間法を関は「二次相乗之法」と称している．

以上の計算は次のように表の形で計算される．

第一

段	限数	定積	平法	平実	平積	立法	立実	立積
1	x_1	z_1	dx_2	dz_2	$\delta_2{}^{(1)}$	$x_3 - x_1$	$d\delta_3{}^{(1)}$	$\delta_3{}^{(2)}$
2	x_2	z_2	dx_3	dz_3	$\delta_3{}^{(1)}$	$x_4 - x_2$	$d\delta_4{}^{(1)}$	$\delta_4{}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-2$	x_{m-2}	z_{m-2}	dx_{m-1}	dz_{m-1}	$\delta_{m-1}{}^{(1)}$	$x_m - x_{m-2}$	$d\delta_m{}^{(1)}$	$\delta_m{}^{(2)}$
$m-1$	x_{m-1}	z_{m-1}	dx_m	dz_m	$\delta_m{}^{(1)}$			
m	x_m	z_m						

第二

段	限数	定積	平法	平実	平積
1	x_1	$z_1{}^{(1)}$	dx_2	$dz_2{}^{(1)}$	$\epsilon_2{}^{(1)}$
2	x_2	$z_2{}^{(1)}$	dx_3	$dz_3{}^{(1)}$	$\epsilon_3{}^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	x_{m-1}	$z_{m-1}{}^{(1)}$	dx_m	$dz_m{}^{(1)}$	$\epsilon_m{}^{(1)}$
m	x_m	$z_m{}^{(1)}$			

・第三

	限数	定積
第 1 段	x_1	${z_1}^{(1)} - \epsilon x_1$
第 2 段	x_2	${z_2}^{(1)} - \epsilon x_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 m 段	x_m	${z_m}^{(1)} - \epsilon x_m$

3.2.3 三次相乗之法

もし，(11) の中に等しくないものがあるときは，これらの階差をとると，

$$\begin{aligned} d{\delta_k}^{(2)} &= {\delta_k}^{(2)} - {\delta_{k-1}}^{(2)} \\ &= \cdots + a_{n-4}\left\{ \frac{\frac{{x_k}^3-{x_{k-1}}^3}{x_k-x_{k-1}} - \frac{{x_{k-1}}^3-{x_{k-2}}^3}{x_{k-1}-x_{k-2}}}{x_k - x_{k-2}} - \frac{\frac{{x_k}^3-{x_{k-1}}^3}{x_k-x_{k-1}} - \frac{{x_{k-1}}^3-{x_{k-2}}^3}{x_{k-1}-x_{k-2}}}{x_k - x_{k-2}} \right\} \\ &= \cdots + a_{n-4}(x_k - x_{k-3}) \quad (4 \leq k \leq m) \end{aligned} \tag{13}$$

となるから，

$${\delta_k}^{(3)} = \frac{{\delta_k}^{(2)} - {\delta_{k-1}}^{(2)}}{x_k - x_{k-3}} \quad (4 \leq k \leq m) \tag{14}$$

として，${\delta_k}^{(3)}$ $(k = 4, 5, \cdots, m)$ が等しいかどうかを見る．もしこれらがすべて等しければ，それを δ とするとき $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-5} = 0$，$a_{n-4} = \delta$ とおける．すなわち，$f(x)$ を三次式で，三次の係数を δ とできる．このとき (5) は

$$z_i = \delta {x_i}^3 + a_{n-3}{x_i}^2 + a_{n-2}x_i + a_{n-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{15}$$

となるが，$z_i - \delta {x_i}^3$ は i によって異なる値をとりうる．そこで ${z_i}^{(2)} = z_i - \delta {x_i}^3$ $(1 \leq i \leq m)$ とおいて，$(x_i, {z_i}^{(2)})$ $(1 \leq i \leq m)$ を $y = a_{n-3}x^2 + a_{n-2}x + a_{n-1}$ で補間することを考える．

この場合，

$$\left\{ \frac{{z_i}^{(2)} - {z_{i-1}}^{(2)}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{{z_{i-1}}^{(2)} - {z_{i-2}}^{(2)}}{x_{i-1} - x_{i-2}} \right\} \cdot \frac{1}{x_i - x_{i-2}}, \quad i = 3, 4, \cdots, m \tag{16}$$

が i によらないことがわかるから，必ず「二次相乗之法」または「一次相乗之法」に帰着できる ($a_{n-3} = 0$ の場合もありうる)．このような補間法を関は「三次相乗之法」と称している．

以上の計算も「二次相乗之法」と同様に表を用いてなされる．

4 方垜

「方垜」は

1. $s_p(n)$，$p = 1, 2, 3 \cdots, 11$，を与える公式，
2. ベルヌーイ数 $B_1 = 1/2$，$B_2 = 1/6$，$B_3 = 0$，$B_4 = -1/30$，$B_5 = 0$，$B_6 = 1/42$ を求める計算式

3. 二項定理の展開式を与える表，2. の計算式の根拠となる表，1. の結果をまとめた表

からなる．この部分の記述は簡潔であるが，そのためにかえって，これまで多様な解釈が生じたのである．本節ではこの部分に関して一つの解釈を与えたい．

まず第 2 節で示した戦略の第 a 段，すなわち実例の計算とは，$s_1(n)$ 以下いくつかの式を実際に求めることである．このことについては何も記述はないのであるが，すでに第 2 節において述べたように，第一巻の構成を考えてみれば，それらが「累裁招差之法」によって得られたものにちがいない．

たとえば，$s_1(n)$ の場合，$s_1(1) = 1$，$s_1(2) = 3$，$s_1(3) = 6$ であるから，

		限数	定積	平積法	平積実	平積
第一	第 1 段	1	1	1	1/2	1/2
	第 2 段	2	3/2	1	1/2	1/2
	第 3 段	3	2			

		限数	定積
第二	第 1 段	1	1/2
	第 2 段	2	1/2
	第 3 段	3	1/2

よって

$$s_1(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right)n = \frac{n+n^2}{2} \tag{17}$$

となる．ここでは段数を 3 としたが，実際にはもっと多くの段数で計算したかもしれない．あるいは，個々の n に対して $s_1(n)$ の値は直接計算できるから，(17) にいくつかの n の値を代入して検算し，この式の正しいことを確認したかもしれない．いずれにせよ，この式自身は現代的な意味で証明されたのではなく，帰納的に確信された式であったことに注意しておくべきである．

関が記載している式は以下の 10 個である．

$$s_2(n) = \frac{(1+(3+2n)n)n}{6}$$
$$s_3(n) = \frac{(0+(1+(2+n)n)n)n}{4}$$
$$s_4(n) = \frac{(-1+(0+(10+(15+6n)n)n)n)n}{30}$$
$$s_5(n) = \frac{(0+(-1+(0+(5+(6+2n)n)n)n)n)n}{12}$$
$$s_6(n) = \frac{(1+(0+(-7+(0+(21+(21+6n)n)n)n)n)n)n}{42}$$
$$s_7(n) = \frac{(0+(2+(0+(-7+(0+(14+(12+3n)n)n)n)n)n)n)n}{24}$$
$$s_8(n) = \frac{(0+(0+(20+(0+(-42+(0+(60+(45+10n)n)n)n)n)n)n)n)n}{90}$$

$$s_9(n) = \frac{(0+(3+(0+(10+(0+(-14+(0+(15+(10+2n)n)n)n)n)n)n)n)n)n}{90}$$
$$s_{10}(n) = \frac{(5+(0+(-23+(0+(66+(0+(-66+(0+(55+(33+6n)n)n)\cdots)n}{66}$$
$$s_{11}(n) = \frac{(0+(10+(0+(-33+(0+(44+(0+(-33+(0+(22+(12+2n)n)n)\cdots)n}{24}$$

$s_4(n)$ は「累裁招差之法」による加減の決め方によれば

$$s_4(n) = \frac{-(1-(0+(10+(15+6n)n)n)n)n}{30} \tag{18}$$

となるところである．

ここで，関が p がいくつのときまで実例の計算をしたのかはもちろんわからない．「累裁招差之法」では三次相乗（4 次式）まで具体的に述べられており，ベルヌーイ数は B_6 まで具体的に与えられているが，いずれも決定的な証拠とはならない．三次相乗まで用いて実際に計算したと仮定すると $s_4(n)$ まで計算したことになり，B_6 までを実際に計算したとすると $s_7(n)$ まで計算したことになる．

このようにして得られた結果を一覧したのが表 1（図 3）[*2]である．表 1 は $p=1,2,\cdots,11$ に対して，$s_p(n)$ の分子の係数（降冪順）と分母を並べたものである．今述べたように実例の計算がどこまで実行されたかは不明であるが，ここでは一応原文にある表全体を挙げておく．

表 1．$s_p(n)$ の係数と分母．図 3 参照．

														分母
$s_1(n)$	1	1	0											2
$s_2(n)$	2	3	1	0										6
$s_3(n)$	1	2	1	0	0									4
$s_4(n)$	6	15	10	0	−1	0								30
$s_5(n)$	2	6	5	0	−1	0	0							12
$s_6(n)$	6	21	21	0	−7	0	1	0						42
$s_7(n)$	3	12	14	0	−7	0	2	0	0					24
$s_8(n)$	10	45	60	0	−42	0	20	0	−3	0				90
$s_9(n)$	2	10	15	0	−14	0	10	0	−3	0	0			20
$s_{10}(n)$	6	33	55	0	−66	0	66	0	−33	0	5	0		66
$s_{11}(n)$	2	12	22	0	−33	0	44	0	−33	0	10	0	0	24

さて，戦略の第 b 段はこの表を出力するアルゴリズムを推定することである．すなわち，実例計算が $s_k(n)$ までなされているとき，$(k+1)s_k(n)$ から $(k+2)s_{k+1}(n)$ を得るアルゴリズムの推定が課題である．

[*2] 表 1 は図 3 を 90° 回転して鏡像をとったもの．以下も同様にする．

そのために，$(1+n)^p-1$ の展開式の係数を並べた表 2（図 1）を用意する．この表の第 1 行は「基数」と称されており，また二行目以下が $(1+n)^p-1$ であることを暗示しているが，以下では用いられない．また最下行には B_k の値も併記されているが，この値は以下の考察の結果を先取りしたものである．

表 2. 式図（$(1+n)^p-1$ の係数）．図 1 参照

p													
1	1	1											
2	1	2	0										
3	1	3	3	0									
4	1	4	6	4	0								
5	1	5	10	10	5	0							
6	1	6	15	29	15	6	0						
7	1	7	21	35	35	21	7	0					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	0				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	0			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	0		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	0	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	0
	全	$\times\frac{1}{2}$	$\times\frac{1}{6}$	空	$\times(-\frac{1}{30})$	空	$\times\frac{1}{42}$	空	$\times(-\frac{1}{30})$	空	$\times\frac{5}{66}$	空	

想像をたくましくすれば，関はまず，表 1 の $s_k(n)$ までの数値から直接 s_{k+1} の行を得るアルゴリズムの作成を模索したに違いない．それは次の「衰垜」において，第 k 行から第 $k+1$ 行が簡単に導き出せたことを考え合わせれば，なお一層，ありうることのように思える．しかし実際にはそのように簡単にはいかなかったのである．そこで表 1 に類似する表を用意することにしたのではなかったろうか．また，そのようなことを思い付く背景には算木の運用に十分慣れていたことがあったように思われる．算木による $(1+n)^p$ の計算は $p=1$ から順に，機械的に進められ，p が小さい場合，関はその展開式を算木配置の残像として思い浮かべることができたに違いない．関は表 2 を簡単に作成することができ，また容易に表 1 との類似性に気づくことができたのである．表 2 は「式図」と名づけられている．「式図」という言葉は，本文中にある「基数を置き，これを自乗し，得る数と一個を相消して式を得る（置基数自乗之得数与一箇相消得式）」を受けた名称であり，この表 2 のみを指すと考えるのが妥当であろう．

ここで第 2 表と第 1 表の分子を見くらべる（この「見くらべる」という作業は，類似の表を用意した時点でもっとも自然な作業である）．各行の最高次の係数を見比べると，表 2 の最高次の係数は常に 1 であるから，表 2 の $p=k$ $(k \geq 2)$ の行に表 1 の第 $s_{k-1}(n)$ の行の最高次の係数を乗じて，$p=k$ の行と表 1 の第 $s_{k-1}(n)$ の行とが一致するようにする．そのために，表 2 の第 $p=k$ の行のそれぞれの係数をあらかじめ何倍しておかなければならないかを示した表がつぎの表 3 で

ある.

表 3. 表 2 の係数調整のための乗数.

p												
2	1	$\frac{1}{2}$										
3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$									
4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0								
5	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$							
6	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0						
7	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$					
8	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0				
9	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$			
10	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0		
11	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	
12	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0

表 3 の各列はすべて等しく，これらは表 2 に付加されている．ここで「全」は 1 倍，「空」は 0 倍することを意味する．また，表 2 の各要素と表 3 の要素を実際に乗じたもの（表 2 の各要素に最下行に示す演算を施した結果）が表 4（図 2）である．正負の符号は図 2 に合わせて最下行に記号で付した．

表 4. 表 2 と表 3 の乗算結果. 図 2 参照.

p														共通分母
2	1	1	0											
3	1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0										2
4	1	2	1	0	0									
5	1	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0								6
6	1	3	$2\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0							2
7	1	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0						6
8	1	4	$4\frac{1}{3}$	0	$2\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0					3
9	1	$4\frac{1}{2}$	6	0	$4\frac{1}{5}$	0	2	0	$\frac{3}{10}$	0				10
10	1	5	$7\frac{1}{2}$	0	7	0	5	0	$1\frac{1}{2}$	0	0			2
11	1	$5\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{6}$	0	11	0	11	0	$5\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	0		6
12	1	6	11	0	$16\frac{1}{2}$	0	22	0	$16\frac{1}{2}$	0	5	0	0	2
		$+$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$			

表 2 と表 1 を見比べて表 3 を作成したという仮説はこの表 4 の解釈の中核をなすものである．原本では表 2 の後に，

右の逐乗諸級は，各[々]分子を乗じ，分母をもって而も一にして数を得る
（右逐乗諸級各乗分子以分母而一得数）

とあり，この表4が続く．ここで「逐乗諸級」というのはベルヌーイ数 B_k のことである．それは本文のベルヌーイ数を順次述べた段に「逐乗二級之取数」，「逐乗三級之取数」，「逐乗四級之取数」などとあることから，からほぼ間違いないと思われる．とすると，表2と表4の間に表3を実際に作成したと考えるのが妥当ではあるまいか．そしてこの表3は圧縮されて表2の末尾に付録されたのではないだろうか．

核心となる表3が記載されていないため，読解が困難になっているのであるが，そもそも『括要算法』の記述の仕方は述べたいことを表を用いて順次読者に説き示すといったような様式ではなく，むしろ総括的，マニュアル的であることに注目すべきであろう．

さて，この表4から順次ベルヌーイ数が得られるのであるが，それには表4の行の和がちょうど p の値になっていることに注意すればよい．すなわち，表3の $p = k$ である行を順に $B_0, B_1, \cdots, B_{k-1}$，表2の $p = k+1$ である行を順に $a_{k+1,0}$，$a_{k+1,1}$，$\cdots$，$a_{k+1,k}$ とすると，

$$a_{k+1,0}B_0 + a_{k+1,1}B_1 + \cdots + a_{k+1,k-1}B_{k-1} + a_{k+1,k}B_k = k+1 \tag{19}$$

より

$$B_k = \frac{1}{k+1}\{k+1-(a_{k+1,0}B_0 + a_{k+1,1}B_1 + \cdots + a_{k+1,k-1}B_{k-1})\} \tag{20}$$

によって帰納的に求まる（$a_{k+1,k} = k+1$ に注意）．

$B_0 = 1$ として，B_1 から順に B_6 までを求める計算が図に先立つ本文に，「圭垜演段」，「平方垜演段」，「立方垜演段」，「三乗方垜演段」，「四乗方垜演段」，「五乗方垜演段」として述べられている．

このようにして B_0 から B_k まで定まったとき，表4の $p = k+1$ の行を共通分母によって通分すると，s_k の行が得られる．ところで表1の分母と表4の共通分母を見比べれば，$(n+1)s_k(n)$ の分母がちょうどこの共通分母になっているから，結局

$$(k+1)s_k(n) = B_0a_{k+1,0}n^{k+1} + B_1a_{k+1,1}n^k + \cdots + B_ka_{k+1,k}n \tag{21}$$

となることがわかった．こうして得られた $s_k(n)$ を表にしたものが原文の最後に付された表1（図〜3）である．この表1は以上のような帰納的推論の前提となる情報を含むと共に，推定したアルゴリズムの確認にも用いることが可能であることを注意しておこう（戦略の第c段）．

$a_{k+1,m}$ は二項係数 $\binom{k+1}{m}$ に他ならないから，以上を要約すれば，関の「方垜」の術とは，$B_0 = 1$ として，

$$k+1 = B_k\binom{k+1}{k} + B_{k-1}\binom{k+1}{k-1} + B_{k-2}\binom{k+1}{k-2} + \cdots + B_0\binom{k+1}{0} \tag{22}$$

によって順次 B_k を定めたとき，

$$(k+1)s_k(n) = B_k\binom{k+1}{k}n + B_{k-1}\binom{k+1}{k-1}n^2 + \cdots + B_0\binom{k_1}{0}n^{k+1} \tag{23}$$

によって $s_k(n)$ を求めたことに他ならない．このことはつとに知られたところであって，すでに [4] にも言及されていることである．しかし，このように要約してしまうと，関の計算の現場からは遠く離れてしまうことになる．

なお，B_k がベルヌーイ（Bernoulli）数と呼ばれることは周知のことである．この公式はベルヌーイの *Ars Conjectandi*（1713）に現われるが，一方，関の『括要算法』は 1709 年序，1712 年刊行であった．そこで，[6] は「ベルヌーイ数」を「関・ベルヌーイ数」と呼ぶべきであるとしている（[6] 第 2 巻，160 ページ）．

5 衰垜

第 2 節で述べた k 乗「衰垜」$t_k(m)$ とは $(1+n)^p-1$（$p=k,\ k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+m-1$）の n^{k+1} の係数の和にほかならない．すなわち，つぎの表 6（表 3 に $p=1$ の行を加えたもの）における第 k 列の最初の m 項の和が k 乗「衰垜」$t_k(m)$ である．

表 6. 衰垜のための表.

p	n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}	n^{11}	n^{12}
1	1											
2	2	1										
3	3	3	1									
4	4	6	4	1								
5	5	10	10	5	1							
6	6	15	20	15	6	1						
7	7	21	35	35	21	7	1					
8	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

$k=1$ のときは「圭垜」（これは「方垜」と共通），$k=2$ のときは「三角衰垜」，$k=3$ のときは「再乗衰垜」という．

k 乗「衰垜」$t_k(m)$ を求める戦略は「方垜」の場合と全く同じである．すなわち，まず第 a 段として，

$$t_1(m)=\frac{(1+m)m}{2}$$
$$t_2(m)=\frac{(2+(3+m)m)m}{6}$$
$$t_3(m)=\frac{(6+(11+(6+m)m)m)m}{24}$$

$$t_4(m) = \frac{(24 + (50 + (35 + (10 + m)m)m)m)m}{120}$$
$$t_5(m) = \frac{(120 + (274 + (225 + (85 + (15 + m)m)m)m)m)m}{720}$$
$$t_6(m) = \frac{(720 + (1764 + (1624 + (735 + (175 + (21 + m)m)m)m)m)m)m}{5040}$$

を実際に求める．これをどのようにして得たのかは明記されていないが，「方垜」と同様に「累裁招差之法」を用いたか，またはすでに得た「方垜」の公式を用いたと考えられる．あるいはその両方を用いて検算をした可能性もある．ここには原文の記述されたすべてを列挙したが，「方垜」の場合と同様に，実際にどこまでを実例として計算したのかは不明である．ここでは，これらの係数を表にした表 7（級数図，図 4 下）を前提として考える．

表 7．級数図（$t_k(m)$ の係数と分母）．

k	m^0	m	m^2	m^3	m^4	m^5	m^6	m^7	分母
1	0	1	1						2
2	0	2	3	1					6
3	0	6	11	6	1				24
4	0	24	50	35	10	1			120
5	0	120	274	225	85	15	1		720
6	0	720	1764	1624	735	175	21	1	5040

なお，この表のうち，実際に計算された部分は，以下に得られたアルゴリズムの確認のためにも用いられたことにも注意しておきたい．

第 b 段として，この表を見て $t_k(m)$ から $t_{k+1}(m)$ を得るアルゴリズムを推定する．今，$t_k(m)$ の分母，分子をそれぞれ $u_k(m)$，$v_k(m)$ であらわす．

(1) 分母について．$u_{k+1}(m) = u_k(m)(k+2)$ であると推定される．

(2) 分子について．まず $v_2(m) = v_1(m)(2+m)$ であることがすぐわかる．一般に $v_{k+1}(m)$ の次数は $v_k(m)$ の次数よりも 1 だけ大きいから，

$$v_{k+1}(m) = v_k(m)(a_k + b_k m) \tag{24}$$

とすると，最高次と一次の係数を比較して $b_k = 1$，$a_k = k+1$ でなくてはならない．このとき，m^2 から m^{k+1} までの係数を実際に計算すると，

$$v_{k+1}(m) = v_k(m)((k+1) + m) \quad (1 \le k \le 5) \tag{25}$$

となっていることが確かめられる．

こうして，

$$\begin{aligned} &u_1(m) = 2,\ v_1(m) = m(1+m), \\ &t_k(m) = \frac{v_{k-1}(m)(k+m)}{u_{k-1}(m)(k+1)} \quad (k \ge 2) \end{aligned} \tag{26}$$

を得る．このことを述べるのに，関は級数図（表 7）と次の原数図（表 8．図 4 上）を用いている．

表 8．原数図.

k	m^0	m	分母
0	0	1	
1	1	1	2
2	2	1	3
3	3	1	4
4	4	1	5
5	5	1	6
6	6	1	7

以上の推論も算木の運用という観点から見ると，ごく自然なことに思われる．このような推論は一般に器具代数とよばれる数学の形式が，発想やアルゴリズムの推論に大きな効果を発揮したものとして位置づけることができる．

なお，(26) から

$$t_k(m) = \frac{m(1+m)(2+m)\cdots(k+m)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(k+1)} \quad (k \geq 1) \tag{27}$$

であるが，このことも文章として述べられている．

6 まとめ

以上述べたように，「方垜」においても「衰垜」においても関の方法論，戦略は一貫していた．「衰垜」は第 k 行から $k+1$ が簡単に求められるのであるが，「方垜」はそのように簡単には求められない．原文ではこの点についての記述が簡潔すぎて，これまで複数の解釈が与えられてきたが，上に与えた解釈はごく自然であり，蓋然性が高いと思われる．

参考文献

[1] 小出浩貴「関孝和の冪乗和について」数理解析研究所講究録 1392(2004)，197–208.

[2] 銭宝宗編，川原秀城訳『中国数学史』（みすず書房，1990 年），原著は銭宝宗主編『中国数学史』（北京，科学出版社，1981 年).

[3] 竹之内脩「自然数の累乗和――関孝和の業績についての考察――」大阪国際大学紀要 6 (1993 年)，24–41.

[4] 竹之内脩「関孝和の垜積術について」和算研究所紀要（1998 年），5–22.

[5] 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄『関孝和全集』（大阪教育図書，1974 年).

[6] 日本学士院日本科学史刊行会『明治前日本数学史新訂版』第 2 巻（井上書店，臨川書店，1979 年），初版は岩波書店，1956 年.

図版

正徳2年（1712）版の関孝和遺編・荒木村英閲・大高由昌『括要算法』（東北大・羽賀031）から表部分を添付しておく．図1は本文の表2に，図2は本文の表4，図3は本文の表1に該当する．

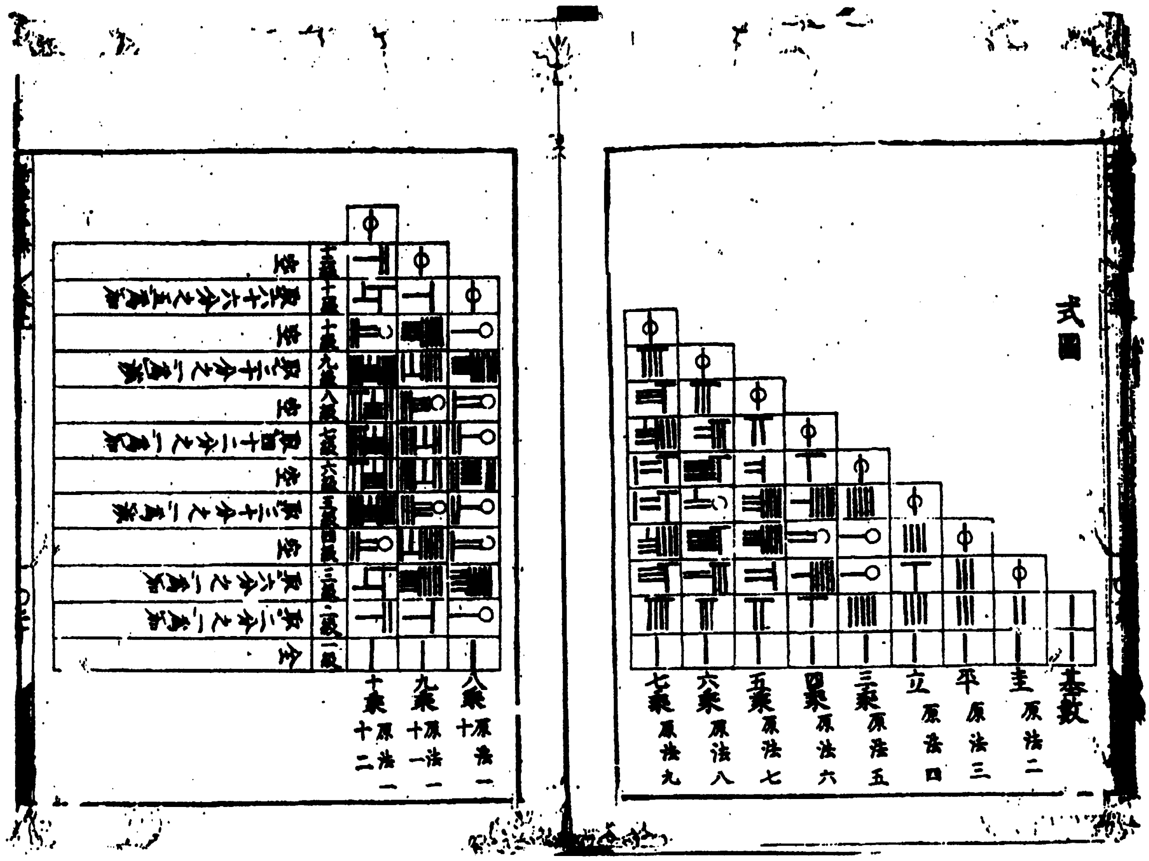


図1　『括要算法』方垜表，その1（19丁裏〜20丁表）．

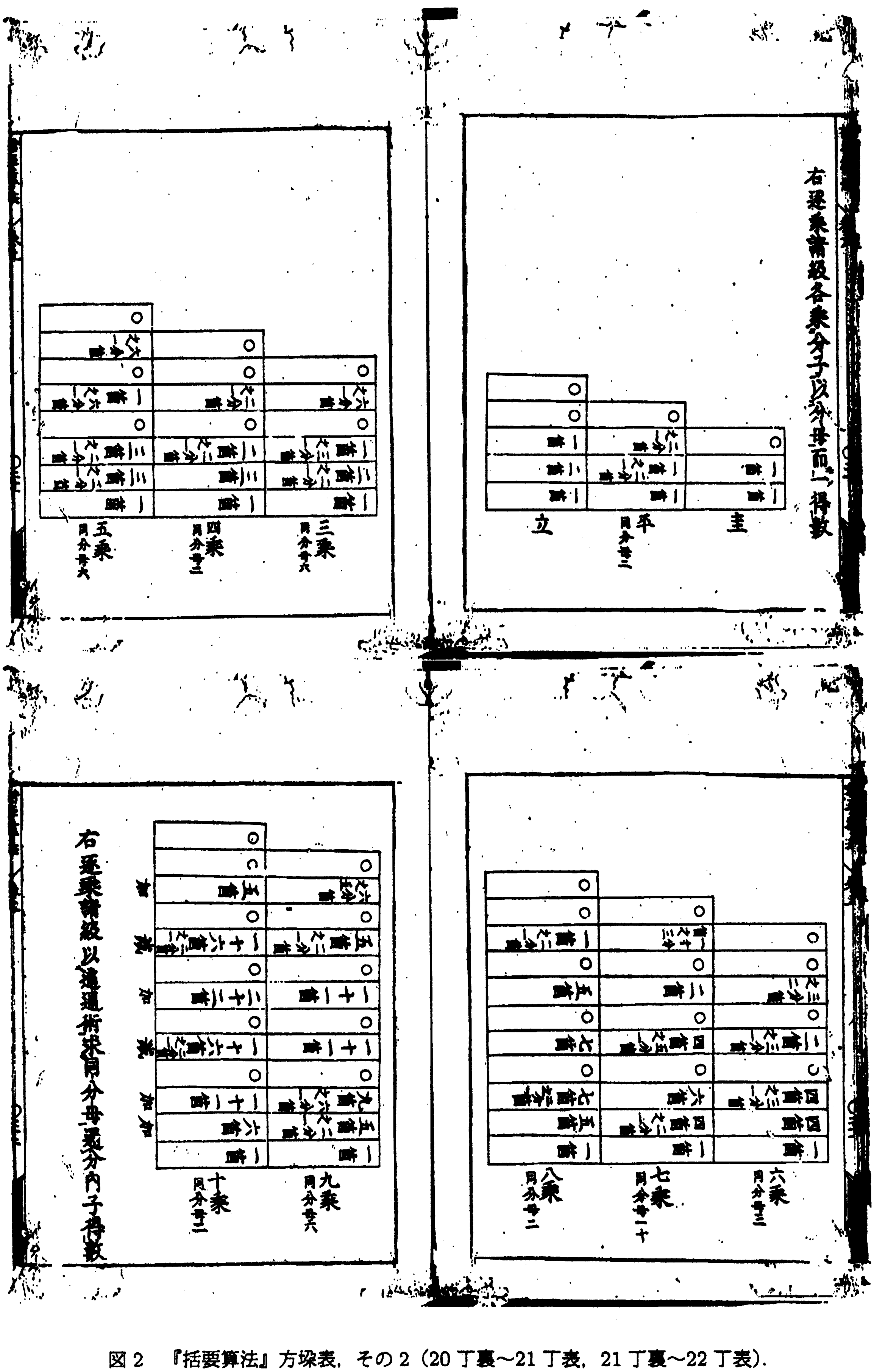


図 2　『括要算法』方垜表，その 2（20 丁裏～21 丁表，21 丁裏～22 丁表）.

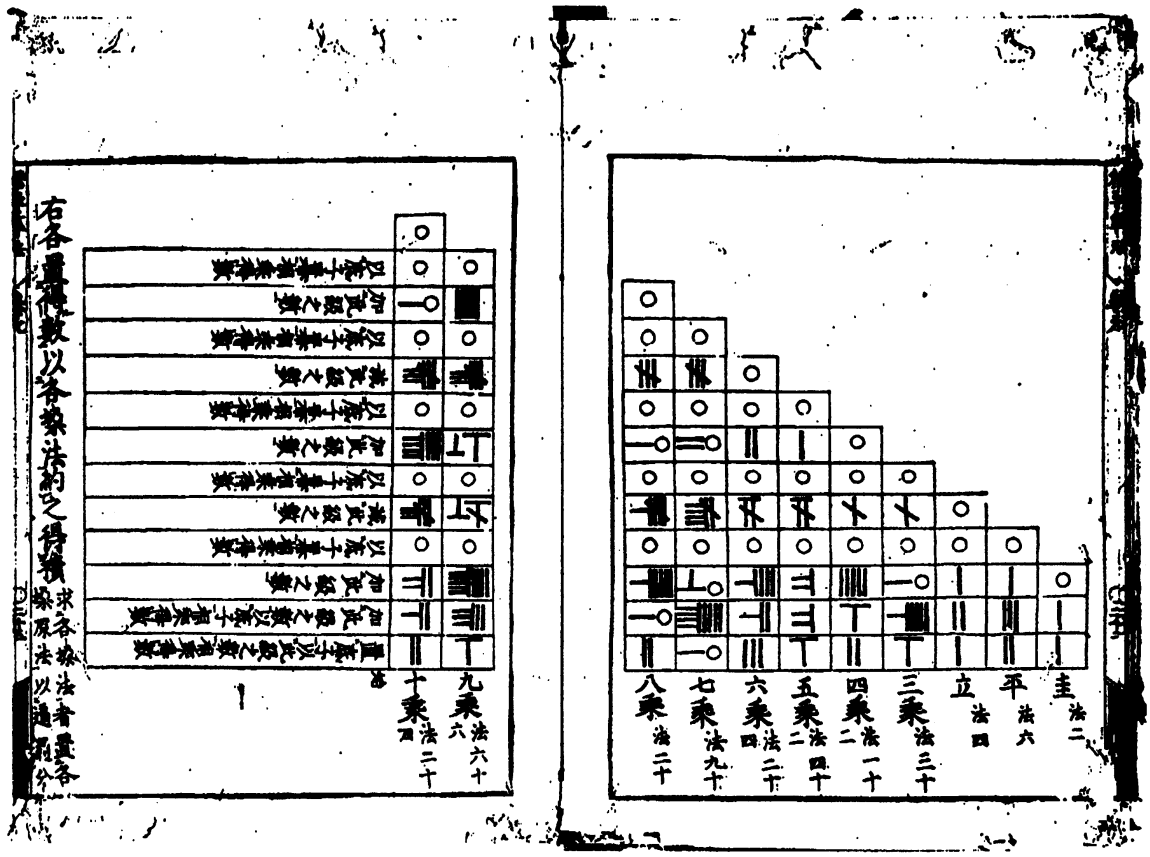
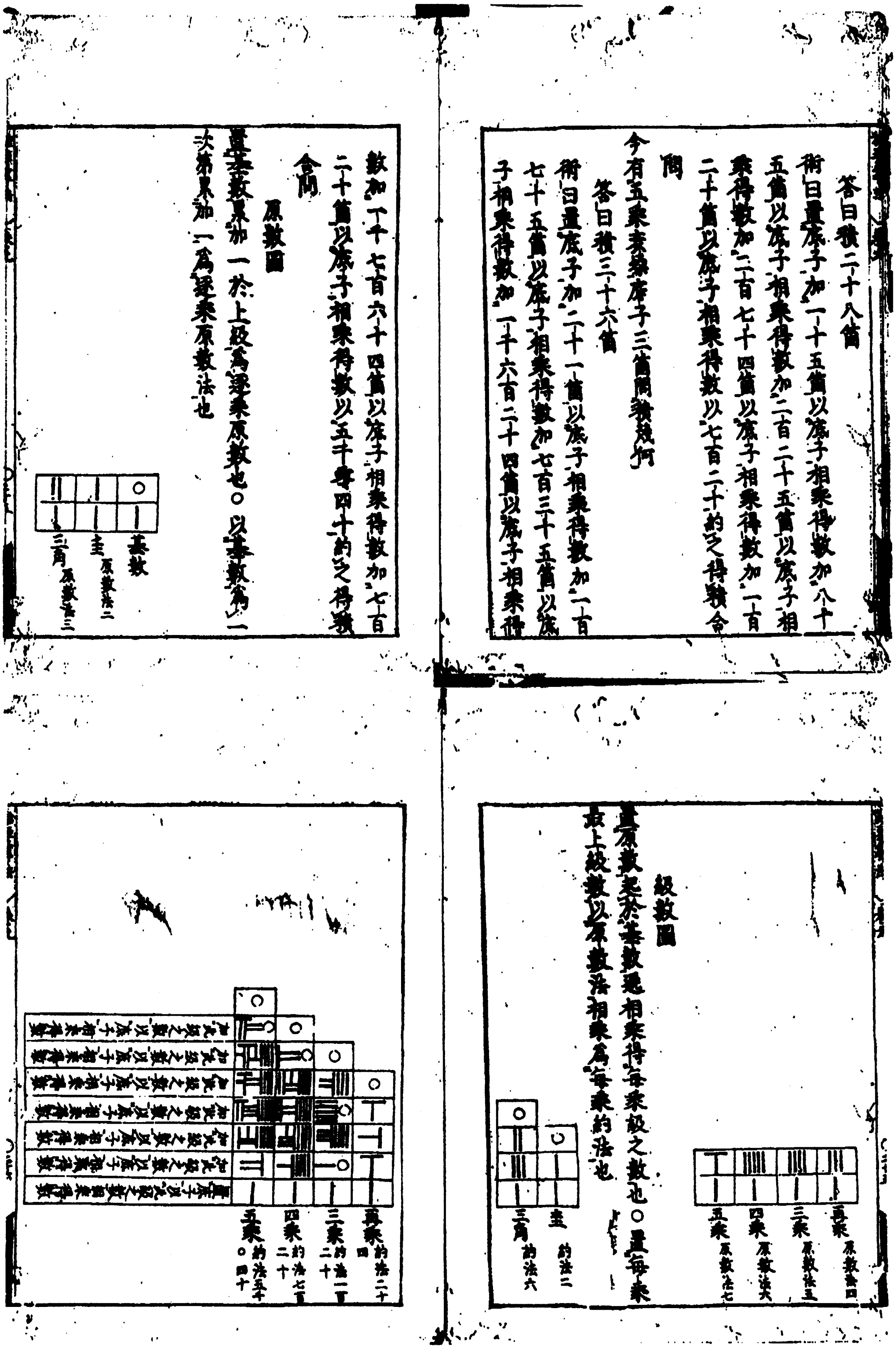


図 3 『括要算法』方垜表，その 3（22 丁裏～23 丁表）.



答曰積二十八箇
術曰置底子加一十五箇以底子相乘得數加八十五箇以底子相乘得數加二百二十五箇以底子相乘得數加二百七十四箇以底子相乘得數加一百二十箇以底子相乘得數以七百二十約之得積合問

今有五乘衰垜底子三箇問積幾何
答曰積三十六箇
術曰置底子加二十一箇以底子相乘得數加一百七十五箇以底子相乘得數加七百三十五箇以底子相乘得數加一千六百二十四箇以底子相乘得數加一千七百六十四箇以底子相乘得數加七百二十箇以底子相乘得數以五千零四十約之得積合問

原數圖
置基數累加一於上級爲逐乘原數也○以基數爲一次第累加一爲逐乘原數法也

基數　圭 原數法二　三角 原數法三

級數圖
置原數差於基數逐相乘得每乘級之數也○置每乘最上級數以原數法相乘爲每乘約法也

再乘 原數法四　三乘 原數法五　四乘 原數法六　五乘 原數法七
圭 約法二　三角 約法六

再乘 約法二十四　三乘 約法一百二十　四乘 約法七百二十　五乘 約法五千〇四十

図 4　『括要算法』衰垜表（24 丁裏〜25 丁表，25 丁裏〜26 丁表）.