数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 19-39

関東の消長法と関西の冪乗演段

小松彦三郎　(東京大学・数理科学研究科)

江戸期数学の最初で最大の成果は、連立代数方程式の解法を確立したことである。最終的には、關孝和の「解伏題之法」(1683)、關－建部兄弟の「大成算經」巻之十七「全題解」(1700頃)、田中由真の「算學紛解」(1690頃)、井関知辰の「算法発揮」(1690) により、終結式を用いた消去の一般理論として結実する [20, 21] のであるが、ここではこれに先行した冪乗に関する消去理論を扱う。

1. 朱世傑の「算學啓蒙」

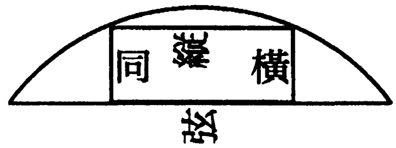
数係数一元代数方程式の立て方である天元術が我が国に知られるようになったのは、元代の1299年朱世傑が著した入門書「算學啓蒙」[0] が、秀吉の時代になってようやく朝鮮経由で輸入されたためである。1658年久田玄哲による復刻本の出版の後、1672年には星野実宣が註解付きで出版した。しかし、この本の内容をどれだけ理解して註解を付けたのか疑わしいところがある。代数方程式の数値解法である「開方術」は、昔からある開平方、開立方の術の延長上にあり、数係数の一元代数方程式が対象である。未知数の冪とその係数は、算木が置かれる算盤上の上下の位置だけで示される。そのため、未知数そのものが置かれるべき場所を明示するため、未知数の名前を言ってそこに係数 1 を表す算木を置くことから始める。これを「天元の一を立て、何々と為す。」といったが、その解釈があいまいである。

また、数学の問題はすぐに未知数の数が複数の多元方程式になる。その場合、連立方程式をそのまま算盤上に表現することはできない。これを一元方程式に還元するには、補助未知数の消去が欠かせない。朱世傑はそれを言葉で表現し、実行したのであるが、この辺りを理解するのがよほど難しかったようである。

2. 澤口一之の「古今算法記」

これらの困難を克服して「天元術」を我が物にした最初の人は京都に在住の澤口一之である。1670年に著した「古今算法記」[1] が天元術を扱った我が国最初の出版になった。前半の 3 巻はそれまでと大差ない算書であるが、後半の 3 巻で佐藤正興の「算法根源記」(1669) の遺題150問に解答を与える形で天元術を用いた。根源記の問題はすべて数値が与えられているのであるが、澤口の解答ではそれらの数値を文字に置き換えて一般的に解いている。一例として、巻の四に解答が与えられている根源記第42問を見てみよう。

今有平円欠．内如図縦横平。只云．弦八寸．縦二寸八分．横一寸八分。問矢幾何。
○答曰．矢二寸。



この後に解法が来る。「算學啓蒙」ならば問題に現れる数値をそのまま用いて算木で表し、算木の操作として解法を説明するのであるが、「古今算法記」では算木の配列は一切用いられていない。ここでは、読者の便宜を図って、朱世傑ならば書いたであろう配列を補っておく。但し、算木はアラビア数字に置き換えた。

術曰．立天元一 爲矢。$\boxed{0}\boxed{1}$
内減横 餘爲小矢。$\boxed{-1.8}\boxed{1}$
自之．加入縦半寸冪 爲因小矢円満径。$\boxed{5.2}\boxed{-3.6}\boxed{1}$
以大矢乗之 爲因小矢因大矢円満径。$\boxed{0}\boxed{5.2}\boxed{-3.6}\boxed{1}$ 寄左。
○列大矢．自之．加入弦半寸冪 $\boxed{16}\boxed{0}\boxed{1}$
得数亦以小矢相乗 亦爲因小矢因大矢円満径。$\boxed{-28.8}\boxed{16}\boxed{-1.8}\boxed{1}$
与寄左相消 得開方式。$\boxed{28.8}\boxed{-10.8}\boxed{-1.8}$
平方開之．得矢。
合問。

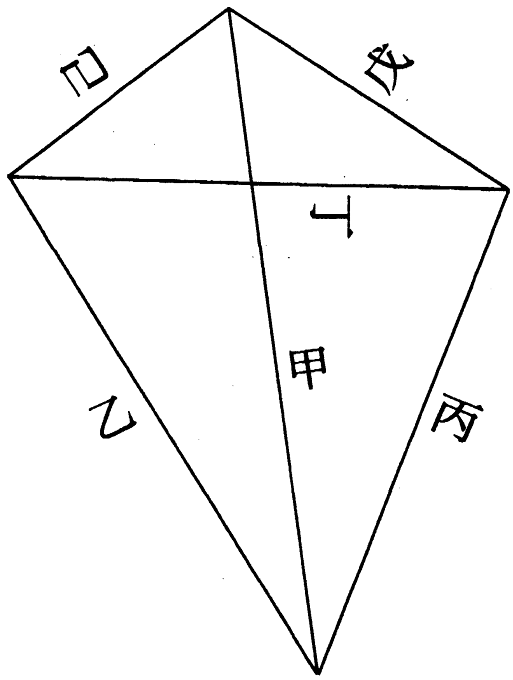
ここでは、半弦の自乗と矢の自乗の和が直径と矢の積になるという事実が再度用いられている。これは漢代の「九章算術」で既に知られていたことで、明代の「算法統宗」や我が国の「大成算經」巻之十「形法」にもある。

澤口が算木の配列を使わなかったのは、おそらくは、代数学が、方程式の数値解法と独立に成り立つことを示したかったからである。特に、連立方程式を自在に扱うためには、複数の文字に関する整式を表現する方法が必要であり、算木の配列はこの目的のためには適していないと判断したのであろうと推測している。そして、澤口は漢文で複数の文字に関する整式を表記する標準を定め、あいまいさを残すことなくこれを行ってみせた。デカルト流に数式を書くには括弧が欠かせない。ところが、漢文には括弧に相当するものがない。この困難を切り抜けるために、今日の論理学で言うポーランド記法に相当するものを発明した。上の術文にある「因」がそれである。因に続く二つの文字または句で表される数の積を意味する。関や建部などその後の数学者たちもこれに従っている [23]。

「古今算法記」の巻末に添えられた遺題15問が、その後の和算に与えた影響はよく知られている。關孝和は「發微算法」(1674) を出版し、すべての問題に対して解法を与えた。しかし、これは澤口流に漢文のみで表記されており、読者がそのままを理解することは困難であった。誤解も招いた。弟子の建部賢弘は「發微算法演段諺解」(1685) を出版、現代の数式表現に近い傍書法で表記した数式を補って理解を助けた [2]。入門部分の [0] とこの諺解によって我が国の代数学は確立した。京都在住の田中由眞もその間「算法明解」[8] を発表、關とは異なる解法を与えた。竹之内 [3] は以上三者を比較している。

3. 關孝和の「發微算法」

1674年関孝和が出版した「發微算法」の中から、一例として第14問のみを取り上げる。問題は次の通りである。



今有両平錐。只云. 列 甲 乙 丙 丁 戊 己 寸各別別再自乗之。各其差云則者. 従甲数而乙数者少寸立積二百七十一坪。従乙数而丙数者少寸立積二百十七坪。従丙数而丁数者少寸立積六十坪令八分。従丁数而戊数者少寸立積三百二十六坪二分。従戊数而己数者少寸立積六十一坪。問 甲 乙 丙 丁 戊 己 幾何。

図のように二つの平らな錐をつないだ図形があり、線分 甲 乙 丙 丁 戊 己 それぞれの長さを３乗したものが、次のような差をもつとする：

$$甲^3 - 乙^3 = 271坪$$
$$乙^3 - 丙^3 = 217坪$$
$$丙^3 - 丁^3 = 60.08坪$$
$$丁^3 - 戊^3 = 326.2坪$$
$$戊^3 - 己^3 = 61坪.$$

このとき、線分 甲 乙 丙 丁 戊 己 それぞれの長さを求めよ。

これに対し関孝和が「發微算法」で与えた解答はつぎのようなそっけないものであった。

答曰. 得甲術千四百五十七乗方飜法也。演脱多端而文繁。故略之. 乃其起術演段大概曰。立天元一爲甲。依之得 乙 丙 丁 戊 己 各再自乗数従是。脱己再自乗数演段至一十七乗方次。脱戊再自乗数演段至五十三乗方次。脱丁再自乗数演段至一百六十一乗方次。脱丙再自乗数演段至四百八十五乗方。於是起術而脱乙再自乗数。求両位. 適等相消. 得開方式一千四百五十七乗方。飜法開之. 得甲也。是則循々誘入之意。蓋解難問之奥妙也。尤爲学者当務之要也。

和算では掛算の回数で次数を計るから、ここでは甲に対する1458次の方程式が得られると言っている。他の未知数を消去するのは、することが多くで文章が長くなるのでこれを省略する。ただ、どのように術を起こすか計算のおおよそを言えば、まず甲を未知数に立てる。これによって、乙 丙 丁 戊 己 それぞれの3乗数は甲のみで表される。己の3乗数を消去した計算の結果は54次式になる。戊の3乗数を消去した計算の結果は162次式になる。丁の3乗数を消去した計算の結果は486次式になる。ここで術を起こして乙の3乗数を消去した方程式の両辺を求め、移項して1458次の方程式が得られる。これを解いて甲を得る。

これだけでは何のことか全く分からない。当時の学者にも本当は解いていないのではないかと疑うものがあった。11年後に弟子の建部賢弘が「發微算法演段諺解」を出版して詳細を明らかにしてからようやく人々に関の方法が理解されるようになったが、これに併行して田中由真を中心とする関西の数学者達もそれぞれの解法を研究し発表した。

しかし、關の他の問題に対する解答を考慮すれば上の記述だけでも彼の方法は十分に理解できる。漢字で数式を書くのは煩わしいので、デカルト流に、未知数 甲 乙 丙 丁 戊 己 を x, y, z, u, v, w で表し、3乗数の差の和である既知数を a, b, c, d, e で表すと、解くべき方程式は次のものになる:

$$y^3 = x^3 + a, \tag{1}$$

$$z^3 = x^3 + b, \tag{2}$$

$$u^3 = x^3 + c, \tag{3}$$

$$v^3 = x^3 + d, \tag{4}$$

$$w^3 = x^3 + e, \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
&x^2u^2(-x^2+y^2+z^2-u^2+v^2+w^2)\\
&+y^2v^2(x^2-y^2+z^2+u^2-v^2+w^2)\\
&+z^2w^2(x^2+y^2-z^2+u^2+v^2-w^2)\\
&-x^2y^2w^2-y^2z^2u^2-z^2x^2v^2-u^2v^2w^2=0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

最後の方程式は、6つの線分が平面上にあるための条件、六斜術である。これを w の昇冪の順序に並べ替え、更に w^4 のうちの w^3 に (5) を代入して

$$A+Bw+Cw^2=0 \tag{7}$$

と書く。但し、

$$
\begin{gathered}
A=x^2u^2(-x^2+y^2+z^2-u^2+v^2)\\
+y^2v^2(x^2-y^2+z^2+u^2-v^2)-y^2z^2u^2-z^2x^2v^2,\\
B=-z^2(x^3+e),\\
C=x^2u^2+y^2v^2+z^2(x^2+y^2-z^2+u^2+v^2)-x^2y^2-u^2v^2
\end{gathered}
$$

とする。ここで、

$$
\begin{gathered}
P+Q+R=0 \implies P^3+Q^3+R^3-3PQR\\
=(P+Q+R)(P^2+Q^2+R^2-PQ-QR-RP)=0
\end{gathered}
\tag{8}
$$

を $P=A, Q=Bw, R=Cw^2$ として適用すれば、六斜術の結論として

$$A^3+(B^3-3ABC)w^3+C^3w^6=0 \tag{9}$$

が成り立つことが分かる。A,B,C には w が含まれていないから、

$$A^3+(B^3-3ABC)(x^3+e)+C^3(x^3+e)^2=0 \tag{10}$$

が六斜術と (5) から w を消去した方程式になる。A,B,C はそれぞれ 6次式、5次式、4次式であるから、これは18次の方程式である。

今度はこれを v の昇冪の順序に並べ替えて、上と同様に v^3 を含む因子が現れれば (4) を代入することを繰り返す。こうして w を v に替えた (7) の形の方程式を得る。これから (9) の形の方程式を得て、(4) を代入する。こうして、w も v も含まない方程式が得られる。(7) を (9) にする過程で係数 A,B,C は 3乗されるから、x,y,z,u の方程式として、これは $18\times3=54$ 次である。

同様にして、u, z, y を順次消去すれば、最後に x に関する $54 \times 3^3 = 1458$ 次の方程式が得られる。

これで原理は理解されたと思うが、これを最後まで実行し、解を求めるのはとても人間業ではない。実際、關も、他の和算家もそこまではやっていない。ごく最近までだれにもできなかった。最近になってようやく計算機の利用技術が進歩し、数値ではなく数式を数式のまま計算することができるようになったので、専門家である木村欣司さんにお願いして計算していただいた結果は、まずこれより低い次数の方程式で解を求めることは不可能であること、そして

$$
\begin{array}{ll}
甲 = 10.0000056403 & 乙 = 9.0000069815 \\
丙 = 8.0000083910 & 丁 = 7.6699093899 \\
戊 = 5.0000228360 & 己 = 4.0000359240
\end{array}
$$

がこの連立方程式のただ一組の正数解であり、他に7組の実数解と1450組の複素数解があることをつきとめてくれた [22]。

4. 関東の消長法と関西の冪乗演段

(7) 式から (9) 式を導いたのと同様に n の倍数次の冪しか現れない方程式ができれば、3 乗に代わって n 乗の式ばかりからなる同種の問題の補助未知数の消去ができる。これを関東では消長法、関西では冪乗演段といい、競って計算した。

この勝負は関西の勝ちという他ない。關−建部の「大成算經」巻之十七 [7] では $n = 2, 3, 4, 5$ の場合が扱われているが、$n = 4$ の場合の計算を間違え、$n = 5$ の場合は結果も 4個所で間違えている。他方、関西にいた宮城清行の「明元算法」[9] は $n = 4, 5, 6,$ 安藤吉次の「一極算法」[10] は $n = 7,$ 中根元圭の「七乗冪演式」[12] は $n = 8$ の場合をいずれの項も間違えることなく正しく計算している。最後の「七乗冪演式」では 810項からなる結果が二冊の本になって出版された。

昔の人たちが明確な定義を与えているわけではないが、ここで言う消長法あるいは冪乗演段とは次のものである。

$$
f(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + \cdots + a_mX^m = 0 \tag{11}
$$

を未知数 X に関する代数方程式とする。係数 a_i は X 以外の変数に関する整式であってよい。$n = 2, 3, \cdots$ を定めたとき、$(n-1)$乗消長法あるいは $(n-1)$乗演段とは (11) の解がすべて

$$
F(X^n) = A_0X^0 + A_1X^n + \cdots + A_MX^{Mn} = 0 \tag{12}
$$

の解となるような X^n の整式 $F(X^n)$ 全体のイデアルの基底を 0 とおいた方程式をいう。n が $n-1$ に代わるのは和算では掛算の回数で冪乗を数えるためである。

$m > n$ ならば、$0 \leq i < n$ に対して $a_i + a_{i+n}X^n + a_{i+2n}X^{2n} + \cdots$ を X^i の係数として計算すればよいので、一般性を失うことなく $m<n$ としてよい。このとき $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を $a, b, c, \cdots$ で表し、等号を省いて書けば結果は次の通り。

$n = 2$

$$a^2X^0 - b^2X^2.$$

$n = 3$

$$a^3X^0 + (b^3 - 3abc)X^3 + c^3X^6.$$

$n = 4$

$$a^4X^0 + (-b^4 + 4ab^2c - 2a^2c^2 - 4a^2bd)X^4$$
$$+(c^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 + 4acd^2)X^8 - d^4X^{12}.$$

$n = 5$

$$a^5X^0 + (b^5 - 5ab^3c + 5a^2bc^2 + 5a^2b^2d - 5bce^3 - 5a^3be)X^5$$
$$+(c^5 - 5bc^3d + 5b^2cd^2 + 5ac^2d^2 - 5abd^3 + 5b^2c^2e$$
$$-5ac^3e - 5b^3de - 5abcde + 5a^2d^2e + 5ab^2e^2 + 5a^2ce^2)X^{10}$$
$$+(d^5 - 5cd^3e + 5c^2de^2 + 5bd^2e^2 - 5bce^3 - 5ade^3)X^{15} + e^5X^{20}.$$

$n = 6$

$$a^6X^0 + (-b^6 + 6ab^4c - 9a^2b^2c^2 + 2a^3c^3 - 6a^2b^3d$$
$$+12a^3bcd - 3a^4d^2 + 6a^3b^2e - 6a^4ce - 6a^4bf)X^6$$

$$+(c^6 - 6bc^4d + 9b^2c^2d^2 + 6ac^3d^2 - 2b^3d^3 - 12abcd^3 + 3a^2d^4 + 6b^2c^3e$$
$$-6ac^4e - 12b^3cde + 18ab^2d^2 + 3b^4e^2 + 9a^2c^2e^2 - 18a^2bde^2 + 2a^3e^3 - 6b^3c^2f$$
$$+12abc^3f + 6b^4df - 18a^2c^2df - 12ab^3ef + 12a^3def + 9a^2b^2f^2 + 6a^3cf^2)X^{12}$$

$$+(-d^6 + 6cd^4e - 9c^2d^2e - 6bd^3e^2 + 2c^3e^3 + 12bcde^3 + 6ad^2e^3 - 3b^2e^4$$
$$-6ace^4 - 6c^2d^3f + 6bd^4f + 12c^3def - 12ad^3ef - 18bc^2e^2f + 12abe^3f - 3c^4f^2$$
$$-9b^2d^2f^2 + 18acd^2f^2 + 18b^2cef^2 - 9a^2e^2f^2 - 2b^3f^3 - 12abcf^3 - 6a^2df^3)X^{18}$$

$$+(e^6 - 6de^4f + 9d^2e^2f^2 + 6ce^3f^2 - 2d^3f^3 - 12cdef^3$$
$$-6be^2f^3 + 3c^2f^4 + 6bdf^4 + 6aef^4)X^{24} - f^6X^{30}.$$

$n = 7$

$$
\begin{gathered}
a^7X^0 + (b^7 - 7ab^5c + 14a^2b^3c^2 - 7a^3bc^3 + 7a^2b^4d - 21a^3b^2cd + 7a^4c^2d \\
+7a^4bd^2 - 7a^3b^3e + 14a^4bce - 7a^5de + 7a^4b^2f - 7a^5cf - 7a^5bg)X^7
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
+(c^7 - 7bc^5d + 14b^2c^3d^2 + 7ac^4d^2 - 7b^3cd^3 - 21abc^2d^3 + 7ab^2d^4 + 7a^2cd^4 \\
+7b^2c^4e - 7ac^5e - 21b^3c^2de + 7abc^3de + 7b^4d^2e + 35ab^2cd^2e - 7a^2c^2d^2 \\
-21a^2bd^3e + 7b^4ce^2 - 7ab^2c^2e^2 + 14a^2c^3e^2 - 21ab^3de^2 - 14a^2bcde^2 \\
+14a^3d^2e^2 + 14a^2b^2e^3 - 7a^3ce^3 - 7b^3c^3f + 14abc^4f + 14b^4cdf - 14ab^2c^2df \\
-21a^2c^3df - 21ab^3d^2f + 35a^2bcd^2f - 7a^3d^3f - 7b^5ef + 7ab^3cef - 14a^2bc^2ef \\
+35a^2b^2def + 7a^3cdef - 21a^3be^2f + 7ab^4f^2 - 7a^2b^2cf^2 + 14a^3c^2f^2 \\
-21a^3bdf^2 + 7a^4ef^2 + 7b^4c^2g - 21ab^2c^3g + 7a^2c^4g - 7b^5dg + 7ab^3cdg \\
+35a^2bc^2dg - 7a^2b^2d^2g - 21a^3cd^2g + 14ab^4eg - 14a^2b^2ceg - 21a^3c^2eg \\
+7a^3bdeg + 7a^4e^2g - 21a^2b^3fg + 7a^3bcfg + 14a^4dfg + 14a^3b^2g^2 + 7a^4cg^2)X^{14}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
+(d^7 - 7cd^5e + 14c^2d^3e^2 + 7bd^4e^2 - 7c^3de^3 - 21bcd^2e^3 - 7ad^3e^3 \\
+7bc^2e^4 + 7b^2de^4 + 14acde^4 - 7abe^5 + 7c^2d^4f - 7bd^5f - 21c^3d^2ef \\
+7bcd^3ef + 14ad^4ef + 7c^4e^2f + 35bc^2de^2f - 7b^2d^2e^2f - 14acd^2e^2f \\
-21b^2ce^3f - 21ac^2e^3f + 7abde^3f + 7a^2e^4f + 7c^4df^2 - 7bc^2d^2f^2 \\
+14b^2d^3f^2 - 21acd^3f^2 - 21bc^3ef^2 - 14b^2cdef^2 + 35ac^2def^2 - 14abd^2ef^2 \\
+14b^3e^2f^2 + 35abce^2f^2 - 7a^2de^2f^2 + 14b^2c^2f^3 - 7ac^3f^3 - 7b^3df^3 \\
+7abcdf^3 + 14a^2d^2f^3 - 21ab^2ef^3 - 21a^2cef^3 + 7a^2bf^4 - 7c^3d^3g \\
+14bcd^4g - 7ad^5g + 14c^4deg - 14bc^2d^2eg - 21b^2d^3eg + 7acd^3eg - 21bc^3e^2g \\
+35b^2cd^2g - 14ac^2de^2g + 35abd^2e^2g - 7b^3e^3g + 7abce^3g - 21a^2de^3g \\
-7c^5fg + 7bc^3dfg - 14b^2cd^2fg + 35ac^2d^2fg + 7abd^3fg + 35b^2c^2efg \\
+7ac^3efg + 7b^3defg - 105abcdefg - 14a^2d^2efg - 14ab^2e^2fg + 35a^2ce^2fg \\
-21b^3cf^2g - 14abc^2f^2g + 35ab^2df^2g - 14a^2cdf^2g + 35a^2bef^2g - 7a^3f^3g \\
+7bc^4g^2 - 7b^2c^2dg^2 - 21ac^3dg^2 + 14b^3d^2g^2 - 14abc^2g^2 + 14a^2d^3g^2 - 21b^3ceg^2 \\
+35abc^2eg^2 - 14ab^2deg^2 + 35a^2cdeg^2 - 7a^2be^2g^2 + 7b^4fg^2 + 35ab^2cfg^2 \\
-7a^2c^2fg^2 - 14a^2bdfg^2 - 21a^3efg^2 - 7ab^3g^3 - 21a^2bcg^3 - 7a^3dg^3)X^{21}
\end{gathered}
$$

$$+(e^7 - 7de^5f + 14d^2e^3f^2 + 7ce^4f^2 - 7d^3ef^3 - 21cde^2f^3 - 7be^3f^3 + 7cd^2f^4$$
$$+7c^2ef^4 + 14bdef^4 + 7ae^2f^4 - 7bcf^5 - 7adf^5 + 7d^2e^4g - 7ce^5g - 21d^3e^2fg$$
$$+7cde^3fg + 14be^4fg + 7d^4f^2g + 35cd^2ef^2g - 7c^2e^2f^2g - 14bde^2f^2g$$
$$-21ae^3f^2g - 21c^2df^3g - 21bd^2f^3g + 7bcef^3g + 7adef^3g + 7b^2f^4g + 14acf^4g$$
$$+7d^4eg^2 - 7cd^2e^2g^2 + 14c^2e^3g^2 - 21bde^3g^2 + 7ae^4g^2 - 21cd^3fg^2 - 14c^2defg^2$$
$$+35bd^2efg^2 - 14bce^2fg^2 + 35ade^2fg^2 + 14c^3f^2g^2 + 35bcdf^2g^2 - 7ad^2f^2g^2$$
$$-7b^2ef^2g^2 - 14acef^2g^2 - 21abf^3g^2 + 14c^2d^2g^3 - 7bd^3g^3 - 7c^3eg^3 + 7bcdeg^3$$
$$-21ad^2eg^3 + 14b^2e^2g^3 - 21ace^2g^3 - 21bc^2fg^3 - 21b^2dfg^3 + 7acdfg^3$$
$$+7abefg^3 + 14a^2f^2g^3 + 7b^2cg^4 + 7ac^2g^4 + 14abdg^4 + 7a^2eg^4)X^{28}$$

$$+(f^7 - 7ef^5g + 14e^2f^3g^2 + 7df^4g^2 - 7e^3fg^3 - 21def^2g^3 - 7cf^3g^3 + 7de^2g^4$$
$$+7d^2fg^4 + 14cefg^4 + 7bf^2g^4 - 7cdg^5 - 7beg^5 - 7afg^5)X^{35} + g^7X^{42}.$$

$n = 8$

$$a^8X^0 - (b^8 + 8ab^6c - 20a^2b^4c^2 + 16a^3b^2c^3 - 2a^4c^4 - 8a^2b^5d + 32a^3b^3cd$$
$$-24a^4bc^2d - 12a^4b^2d^2 + 8a^5cd^2 + 8a^3b^4e - 24a^4b^2ce + 8a^5c^2e + 16a^5bde$$
$$-4a^6e^2 - 8a^4b^3f + 16a^5bcf - 8a^6df + 8a^5b^2g - 8a^6cg - 8a^6bh)X^8$$

$$+(c^8 - 8bc^6d + 20b^2c^4d^2 + 8ac^5d^2 - 16b^3c^2d^3 - 32abc^3d^3 + 2b^4d^4 + 24ab^2cd^4$$
$$+12a^2c^2d^4 - 8a^2bd^5 + 8b^2c^5e - 8ac^6e - 32b^3c^3de + 16abc^4de + 24b^4cd^2e$$
$$+48ab^2c^2d^2e - 16a^2c^3d^2e - 32ab^3d^3e - 32a^2bcd^3e + 8a^3d^4e + 12b^4c^2e^2$$
$$-16ab^2c^3e^2 + 20a^2c^4e^2 - 8b^5de^2 - 32ab^3cde^2 - 16a^2bc^2de^2 + 56a^2b^2d^2e^2$$
$$+16a^3cd^2e^2 + 8ab^4e^3 + 16a^2b^2ce^3 - 16a^3c^2e^3 - 32a^3bde^3 + 6a^4e^4 - 8b^3c^4f$$
$$+16abc^5f + 24b^4c^2df - 32ab^2c^3df - 24a^2c^4df - 8b^5d^2f - 32ab^3cd^2f$$
$$+80a^2bc^2d^2f + 16a^2b^2d^3f - 32a^3cd^3f - 16b^5cef + 32ab^3c^2ef - 32a^2bc^3ef$$
$$+48ab^4def - 32a^2b^2cdef + 32a^3c^2def - 32a^3bd^2ef - 48a^2b^3e^2f + 32a^3bce^2f$$
$$+8a^4de^2f + 4b^6f^2 - 8ab^4cf^2 + 8a^2b^2c^2f^2 + 16a^3c^3f^2 - 16a^2b^3df^2$$
$$-32a^3bcdf^2 + 20a^4d^2f^2 + 48a^3b^2ef^2 - 24a^4cef^2 - 8a^4bf^3 + 8b^4c^3g - 24ab^2c^4g$$

$$+8a^2c^5g-16b^5cdg+32ab^3c^2dg+32a^2bc^3dg+24ab^4d^2g-80a^2b^2cd^2g$$
$$-16a^3c^2d^2g+32a^3bd^3g+8b^6eg-16ab^4ceg+16a^2b^2c^2eg-32a^3c^3eg$$
$$-32a^2b^3deg+64a^3bcdeg-24a^4d^2eg+16a^3b^2e^2g+8a^4ce^2g-16ab^5fg$$
$$+32a^2b^3cfg-32a^3bc^2fg+32a^3b^2dfg+16a^4cdfg-48a^4befg+8a^5f^2g$$
$$+12a^2b^4g^2-16a^3b^2cg^2+20a^4c^2g^2-24a^4bdg^2+8a^5eg^2-8b^5c^2h+32ab^3c^3h$$
$$-24a^2bc^4h+8b^6dh-16ab^4cdh-48a^2b^2c^2dh+32a^3c^3dh+16a^2b^3d^2h$$
$$+32a^3bcd^2h-8a^4d^3h-16ab^5eh+32a^2b^3ceh+32a^3bc^2eh-32a^3b^2deh$$
$$-48a^4cdeh+8a^4be^2h+24a^2b^4fh-32a^3b^2cfh-24a^4c^2fh+16a^4bdfh$$
$$+16a^5efh-32a^3b^3gh+16a^4bcgh+16a^5dgh+20a^4b^2h^2+8a^5ch^2)X^{16}$$

$$+(-d^8+8cd^6e-20c^2d^4e^2-8bd^5e^2+16c^3d^2e^3+32bcd^3e^3+8ad^4e^3-2c^4e^4$$
$$-24bc^2de^4-12b^2d^2e^4-24acd^2e^4+8b^2ce^5+8ac^2e^5+16abde^5-4a^2e^6$$
$$-8c^2d^5f+8bd^6f+32c^3d^3ef-16bcd^4ef-16ad^5ef-24c^4de^2f$$
$$-48bc^2d^2e^2f+16b^2d^3e^2f+32acd^3e^2f+32bc^3e^3f+32b^2cde^3f$$
$$+32ac^2de^3f-32abd^2e^3f-8b^3e^4f-48abce^4f+8a^2de^4f-12c^4d^2f^2$$
$$+16bc^2d^3f^2-20b^2d^4f^2+24acd^4f^2+8c^5ef^2+32bc^3def^2+16b^2cd^2ef^2$$
$$-80ac^2d^2ef^2+32abd^3ef^2-56b^2c^2e^2f^2-16ac^3e^2f^2-16b^3de^2f^2$$
$$+32abcde^2f^2-8a^2d^2e^2f^2+48ab^2e^3f^2+16a^2ce^3f^2-8bc^4f^3-16b^2c^2df^3$$
$$+32ac^3df^3+16b^3d^2f^3-32abcd^2f^3-16a^2d^3f^3+32b^3cef^3+32abc^2ef^3$$
$$-32ab^2def^3+32a^2cdef^3-48a^2be^2f^3-6b^4f^4-8ab^2cf^4-20a^2c^2f^4$$
$$+24a^2bdf^4+8a^3ef^4+8c^3d^4g-16bcd^5g+8ad^6g-24c^4d^2eg+32bc^2d^3eg$$
$$+24b^2d^4eg-16acd^4eg+8c^5e^2g+32bc^3de^2g-80b^2cd^2e^2g+16ac^2d^2e^2g$$
$$-32abd^3e^2g-16b^2c^2e^3g-32ac^3e^3g+32b^3de^3g+64abcde^3g+16a^2d^2e^3g$$
$$-24ab^2e^4g+8a^2ce^4g+16c^5dfg-32bc^3d^2fg+32b^2cd^3fg-32ac^2d^3fg$$
$$-16abd^4fg-48bc^4efg+32b^2c^2defg+64ac^3defg-32b^3d^2efg+64abcd^2efg$$
$$+32a^2d^3efg+32b^3ce^2fg+32abc^2e^2fg-32ab^2de^2fg-160a^2cde^2fg$$
$$+32a^2be^3fg+48b^2c^3f^2g-24ac^4f^2g-32b^3cdf^2g-32abc^2df^2g+16ab^2d^2f^2g$$
$$+48a^2cd^2f^2g-8b^4ef^2g-96ab^2cef^2g+16a^2c^2ef^2g+32a^2bdef^2g+16a^3e^2f^2g$$
$$+32ab^3f^3g+32a^2bcf^3g-32a^3df^3g-4c^6g^2+8bc^4dg^2-8b^2c^2d^2g^2+16ac^3d^2g^2$$
$$-16b^3d^3g+32abcd^3g^2-20a^2d^4g^2+16b^2c^3eg^2+8ac^4eg^2+32b^3cdeg^2$$

$$-160abc^2deg^2+48ab^2d^2eg^2+16a^2cd^2eg^2-20b^4e^2g^2+16ab^2ce^2g^2$$
$$+56a^2c^2e^2g^2-16a^2bde^2g^2-16a^3e^3g^2-48b^3c^2fg^2+32abc^3fg^2+24b^4dfg^2$$
$$+32ab^2cdfg^2-16a^2c^2dfg^2-48a^2bd^2fg^2+32ab^3efg^2+32a^2bcefg^2$$
$$+32a^3defg^2-56a^2b^2f^2g^2-16a^3cf^2g^2+8b^4cg^3+16ab^2c^2g^3-16a^2c^3g^3$$
$$-32ab^3dg^3+32a^2bcdg^3+16a^3d^2g^3-16a^2b^2eg^3-32a^3ceg^3+32a^3bfg^3$$
$$-2a^4g^4-8c^4d^3h+24bc^2d^4h-8b^2d^5h-16acd^5h+16c^5deh-32bc^3d^2eh$$
$$-32b^2cd^3eh+32ac^2d^3eh+48abd^4eh-24bc^4e^2h+80b^2c^2de^2h-32ac^3de^2h$$
$$+16b^3d^2e^2h-32abcd^2e^2h-48a^2d^3e^2h-32b^3ce^3h+32abc^2e^3h-32ab^2de^3h$$
$$+32a^2cde^3h+8a^2be^4h-8c^6fh+16bc^4dfh-16b^2c^2d^2fh+32ac^3d^2fh$$
$$+32b^3d^3fh-64abcd^3fh+24a^2d^4fh+32b^2c^3efh+16ac^4efh-64b^3cdefh$$
$$-64abc^2defh-32ab^2d^2efh+32a^2cd^2efh+24b^4e^2fh+32ab^2ce^2fh$$
$$-16a^2c^2e^2fh+96a^2bde^2fh-32a^3e^3fh-16b^3c^2f^2h-32abc^3f^2h-8b^4df^2h$$
$$+160ab^2cdf^2h-48a^2c^2df^2h-16a^2bd^2f^2h-32ab^3ef^2h-32a^2bcef^2h$$
$$-32a^3def^2h-16a^2b^2f^3h+32a^3cf^3h+16bc^5gh-32b^2c^3dgh-48ac^4dgh$$
$$+32b^3cd^2gh+32abc^2d^2gh-32ab^2d^3gh+32a^2cd^3gh-32b^3c^2egh+64abc^3egh$$
$$-16b^4degh+64ab^2cdegh+32a^2c^2degh-32a^2bd^2egh+32ab^3e^2gh$$
$$-160a^2bce^2gh+32a^3de^2gh+48b^4cfgh-32ab^2c^2fgh+32a^2c^3fgh$$
$$-64ab^3dfgh-64a^2bcdfgh-32a^3d^2fgh+32a^2b^2efgh+64a^3cefgh$$
$$+32a^3bf^2gh-8b^5g^2h-32ab^3cg^2h-16a^2bc^2g^2h+80a^2b^2dg^2h-32a^3cdg^2h$$
$$+32a^3beg^2h-24a^4fg^2h-12b^2c^4h^2+8ac^5h^2+16b^3c^2dh^2+32abc^3dh^2$$
$$-20b^4d^2h^2+16ab^2cd^2h^2-56a^2c^2d^2h^2-16a^2bd^3h^2+24b^4ceh^2-80ab^2c^2eh^2$$
$$-16a^2c^3eh^2+32ab^3deh^2+32a^2bcdeh^2+48a^3d^2eh^2-8a^2b^2e^2h^2$$
$$+16a^3ce^2h^2-8b^5fh^2-32ab^3cfh^2+80a^2bc^2fh^2-16a^2b^2dfh^2$$
$$+32a^3cdfh^2-32a^3befh^2-12a^4f^2h^2+24ab^4gh^2+48a^2b^2cgh^2-16a^3c^2gh^2$$
$$-32a^3bdgh^2-24a^4egh^2-16a^2b^3h^3-32a^3bch^3-8a^4dh^3)X^{24}$$

$$+(e^8-8de^6f+20d^2e^4f^2+8ce^5f^2-16d^3e^2f^3-32cde^3f^3-8be^4f^3$$
$$+2d^4f^4+24cd^2ef^4+12c^2e^2f^4+24bde^2f^4+8ae^3f^4-8c^2df^5-8bd^2f^5$$
$$-16bcef^5-16adef^5+4b^2f^6+8acf^6+8d^2e^5g-8ce^6g-32d^3e^3fg$$

$$+16cde^4fg+16be^5fg+24d^4ef^2g+48cd^2e^2f^2g-16c^2e^3f^2g$$
$$-32bde^3f^2g-24ae^4f^2g-32cd^3f^3g-32c^2def^3g-32bd^2ef^3g$$
$$+32bce^2f^3g+32ade^2f^3g+8c^3f^4g+48bcdf^4g+24ad^2f^4g-8b^2ef^4g$$
$$-16acef^4g-16abf^5g+12d^4e^2g^2-16cd^2e^3g^2+20c^2e^4g^2-24bde^4g^2$$
$$+8ae^5g^2-8d^5fg^2-32cd^3efg^2-16c^2de^2fg^2+80bd^2e^2fg^2$$
$$-32bce^3fg^2+32ade^3fg^2+56c^2d^2f^2g^2+16bd^3f^2g^2+16c^3ef^2g^2$$
$$-32bcdef^2g^2-80ad^2ef^2g^2+8b^2e^2f^2g^2+16ace^2f^2g^2-48bc^2f^3g^2$$
$$-16b^2df^3g^2-32acdf^3g^2+32abef^3g^2+12a^2f^4g^2+8cd^4g^3+16c^2d^2eg^3$$
$$-32bd^3eg^3-16c^3e^2g^3+32bcde^2g^3-16ad^2e^2g^3+16b^2e^3g^3$$
$$-32ace^3g^3-32c^3dfg^3-32bcd^2fg^3+32ad^3fg^3+32bc^2efg^3$$
$$-32b^2defg^3+64acdefg^3-32abe^2fg^3+48b^2cf^2g^3+16ac^2f^2g^3$$
$$+32abdf^2g^3-16a^2ef^2g^3+6c^4g^4+8bc^2dg^4+20b^2d^2g^4-24acd^2g^4$$
$$-24b^2ceg^4+8ac^2eg^4+16abdeg^4+20a^2e^2g^4-8b^3fg^4-48abcfg^4$$
$$-24a^2dfg^4+8ab^2g^5+8a^2cg^5-8d^3e^4h+16cde^5h-8be^6h+24d^4e^2fh$$
$$-32cd^2e^3fh-24c^2e^4fh+16bde^4fh+16ae^5fh-8d^5f^2h-32cd^3ef^2h$$
$$+80c^2de^2f^2h-16bd^2e^2f^2h+32bce^3f^2h-32ade^3f^2h+16c^2d^2f^3h$$
$$+32bd^3f^3h-32c^3ef^3h-64bcdef^3h+32ad^2ef^3h-16b^2e^2f^3h$$
$$-32ace^2f^3h+24bc^2f^4h-8b^2df^4h-16acdf^4h+48abef^4h-8a^2f^5h$$
$$-16d^5egh+32cd^3e^2gh-32c^2de^3gh+32bd^2e^3gh+16bce^4gh$$
$$-48ade^4gh+48cd^4fgh-32c^2d^2efgh-64bd^3efgh+32c^3e^2fgh$$
$$-64bcde^2fgh+32ad^2e^2fgh-32b^2e^3fgh+64ace^3fgh-32c^3df^2gh$$
$$-32bcd^2f^2gh-32ad^3f^2gh+32bc^2ef^2gh+160b^2def^2gh+64acdef^2gh$$
$$-32abe^2f^2gh-32b^2cf^3gh+32ac^2f^3gh-64abdf^3gh-32a^2ef^3gh$$
$$-48c^2d^3g^2h+24bd^4g^2h+32c^3deg^2h+32bcd^2eg^2h+32ad^3eg^2h$$
$$-16bc^2e^2g^2h-48b^2de^2g^2h+32acde^2g^2h+32abe^3g^2h+8c^4fg^2h$$
$$+96bc^2dfg^2h-16b^2d^2fg^2h-32acd^2fg^2h-32b^2cefg^2h-160ac^2efg^2h$$
$$-64abdefg^2h-16a^2e^2fg^2h-16b^3f^2g^2h+32abcf^2g^2h+80a^2df^2g^2h$$
$$-32bc^3g^3h-32b^2cdg^3h+32ac^2dg^3h-32abd^2g^3h+32b^3eg^3h$$

$$+64abceg^3h - 32a^2deg^3h + 32ab^2fg^3h + 32a^2cfg^3h - 24a^2bg^4h$$
$$+4d^6h^2 - 8cd^4eh^2 + 8c^2d^2e^2h^2 - 16bd^3e^2h^2 + 16c^3e^3h^2 - 32bcde^3h^2$$
$$+48ad^2e^3h^2 + 20b^2e^4h^2 - 24ace^4h^2 - 16c^2d^3fh^2 - 8bd^4fh^2$$
$$-32c^3defh^2 + 160bcd^2efh^2 - 32ad^3efh^2 - 48bc^2e^2fh^2 - 16b^2de^2fh^2$$
$$-32acde^2fh^2 - 32abe^3fh^2 + 20c^4f^2h^2 - 16bc^2df^2h^2 - 56b^2d^2f^2h^2$$
$$+16acd^2f^2h^2 + 16b^2cef^2h^2 + 48ac^2ef^2h^2 - 32abdef^2h^2 + 56a^2e^2f^2h^2$$
$$+16b^3f^3h^2 - 32abcf^3h^2 + 16a^2df^3h^2 + 48c^3d^2gh^2 - 32bcd^3gh^2$$
$$-8ad^4gh^2 - 24c^4egh^2 - 32bc^2degh^2 + 16b^2d^2egh^2 - 96acd^2egh^2$$
$$+48b^2ce^2gh^2 + 16ac^2e^2gh^2 + 32abde^2gh^2 + 16a^2e^3gh^2 - 32bc^3fgh^2$$
$$-32b^2cdfgh^2 + 32ac^2dfgh^2 + 160abd^2fgh^2 - 32b^3efgh^2 + 64abcegh^2$$
$$-32a^2defgh^2 + 16ab^2f^2gh^2 - 80a^2cf^2gh^2 + 56b^2c^2g^2h^2 + 16ac^3g^2h^2$$
$$+16b^3dg^2h^2 - 32abcdg^2h^2 + 8a^2d^2g^2h^2 - 80ab^2eg^2h^2 + 16a^2ceg^2h^2$$
$$-48a^2bfg^2h^2 + 16a^3g^3h^2 - 8c^4dh^3 - 16bc^2d^2h^3 + 16b^2d^3h^3 + 32acd^3h^3$$
$$+32bc^3eh^3 - 32b^2cdeh^3 + 32ac^2deh^3 - 32abd^2eh^3 - 16b^3e^2h^3$$
$$+32abce^2h^3 - 48a^2de^2h^3 + 16b^2c^2fh^3 - 32ac^3fh^3 + 32b^3dfh^3$$
$$-64abcdfh^3 - 16a^2d^2fh^3 + 32ab^2efh^3 - 32a^2cefh^3 + 16a^2bf^2h^3$$
$$-32b^3cgh^3 - 32abc^2gh^3 - 32ab^2dgh^3 + 32a^2cdgh^3 + 32a^2begh^3$$
$$+32a^3fgh^3 + 2b^4h^4 + 24ab^2ch^4 + 12a^2c^2h^4 + 24a^2bdh^4 + 8a^3eh^4)X^{32}$$

$$+(-f^8 + 8ef^6g - 20e^2f^4g^2 - 8df^5g^2 + 16e^3f^2g^3 + 32def^3g^3 + 8cf^4g^3$$
$$-2e^4g^4 - 24de^2fg^4 - 12d^2f^2g^4 - 24cef^2g^4 - 8bf^3g^4 + 8d^2eg^5 + 8ce^2g^5$$
$$+16cdfg^5 + 16befg^5 + 8af^2g^5 - 4c^2g^6 - 8bdg^6 - 8aeg^6 - 8e^2f^5h$$
$$+8df^6h + 32e^3f^3gh - 16def^4gh - 16cf^5gh - 24e^4fg^2h - 48de^2f^2g^2h$$
$$+16d^2f^3g^2h + 32cef^3g^2h + 24bf^4g^2h + 32de^3g^3h + 32d^2efg^3h$$
$$+32ce^2fg^3h - 32cdf^2g^3h - 32bef^2g^3h - 32af^3g^3h - 8d^3g^4h - 48cdeg^4h$$
$$-24be^2g^4h + 8c^2fg^4h + 16bdfg^4h + 16aefg^4h + 16bcg^5h + 16adg^5h$$
$$-12e^4f^2h^2 + 16de^2f^3h^2 - 20d^2f^4h^2 + 24cef^4h^2 - 8bf^5h^2 + 8e^5gh^2$$
$$+32de^3fgh^2 + 16d^2ef^2gh^2 - 80ce^2f^2gh^2 + 32cdf^3gh^2 - 32bef^3gh^2$$

$$
\begin{aligned}
&+24af^4gh^2-56d^2e^2g^2h^2-16ce^3g^2h^2-16d^3fg^2h^2+32cdefg^2h^2\\
&+80be^2fg^2h^2-8c^2f^2g^2h^2-16bdf^2g^2h^2+48aef^2g^2h^2+48cd^2g^3h^2\\
&+16c^2eg^3h^2+32bdeg^3h^2-16ae^2g^3h^2-32bcfg^3h^2-32adfg^3h^2\\
&-12b^2g^4h^2-24acg^4h^2-8de^4h^3-16d^2e^2fh^3+32ce^3fh^3+16d^3f^2h^3\\
&-32cdef^2h^3+16be^2f^2h^3-16c^2f^3h^3+32bdf^3h^3-32aef^3h^3\\
&+32d^3egh^3+32cde^2gh^3-32be^3gh^3-32cd^2fgh^3+32c^2efgh^3\\
&-64bdefgh^3-32ae^2fgh^3+32bcf^2gh^3-32adf^2gh^3-48c^2dg^2h^3\\
&-16bd^2g^2h^3-32bceg^2h^3+32adeg^2h^3+16b^2fg^2h^3+32acfg^2h^3\\
&+32abg^3h^3-6d^4h^4-8cd^2eh^4-20c^2e^2h^4+24bde^2h^4+8ae^3h^4\\
&+24c^2dfh^4-8bd^2fh^4-16bcefh^4+48adefh^4-20b^2f^2h^4+24acf^2h^4\\
&+8c^3gh^4+48bcdgh^4-8ad^2gh^4+24b^2egh^4-16acegh^4-16abfgh^4\\
&-20a^2g^2h^4-8bc^2h^5-8b^2dh^5-16acdh^5-16abeh^5-8a^2fh^5)X^{40}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(g^8-8fg^6h+20f^2g^4h^2+8eg^5h^2-16f^3g^2h^3-32efg^3h^3-8dg^4h^3+2f^4h^4\\
&+24ef^2gh^4+12e^2g^2h^4+24dfg^2h^4+8cg^3h^4-8e^2fh^5-8df^2h^5-16degh^5\\
&-16cfgh^5-8bg^2h^5+4d^2h^6+8ceh^6+8bfh^6+8agh^6)X^{48}-h^8X^{56}.
\end{aligned}
$$

「大成算經」巻之十七 [7] にある $n=3$ の場合の計算方法は、方程式

$$a+bX+cX^2=0$$

の実 a と余りの符号を変えた $-bX-cX^2$ が等しいのであるから、それぞれの三乗 a^3 と $-b^3X^3-3b^2cX^4-3bc^2X^5-c^3X^6$ も等しくなければならない。同じ理由で $-3b^2cX^4-3bc^2X^5$ は $3abcX^3$ に等しいというものである。

$n=4$ の場合も同様に a と $-bX-cX^2-dX^3$ の四乗から計算を始めているが、殆どの写本は後の四乗の計算結果を間違えている。但し、現在大阪府立中之島図書館に納められている写本は正しくなっており、加藤 [18] も訂正した結果を紹介している。

この場合は $a+cX^2=-bX-dX^3$ の自乗、そしてその結果得られる $2acX^2-b^2X^2-d^2X^6=-a^2-c^2X^4+2bdX^4$ の自乗を計算するほうが楽である。$n=6$ の場合も同様に計算ができる。しかし、n が素数の場合にはどのようにして手計算でこのような結果を出すことができたのか見当がつかない。

宮城 [9] 、安藤 [10] 、中根 [12] に計算方法は書かれていない。中根は巻末に正月己亥から二月己巳まで計算したと書いてあるから30日を要したようである。

田中由眞の「算學紛解」[13] は、内容からみてこれらの本の後に書かれたものであるが、冪乗演段、あるいはより一般の終結式についていろいろな計算方法を述べた後に、冪乗演式が行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\
a_{n-1}X^n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\
a_{n-2}X^n & a_{n-1}X^n & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-3} \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & \\
a_iX^n & \cdots & a_{n-1}X^n & a_0 & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
a_2X^n & & & & a_{n-1}X^n & a_0 & a_1 \\
a_1X^n & a_2X^n & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}X^n & a_0
\end{vmatrix}
\tag{13}
$$

としても計算できると書いてある。

この行列式は關の「解伏題之法」[3] に従って (11) と

$$
Y - X^n = 0 \tag{14}
$$

を連立させ、その終結式を計算して得られる Y の整式の Y に X^n を代入したものである。

$n = 7$ の場合の安藤 [10] の計算は、あるいはこの方法に依ったかもしれないが、疑わしい点も多い。あとがきに演式には直と減の二法があり、直法によれば正負それぞれ5538項必要になるところだったと書いている。この数は 7次の行列式の項数 $7! = 5040$ に近いが違う。しかも、この行列式は右上から左下に向かう対角線に関して対称であり、展開に必要な項数は減る。

このような対称行列式の展開は「大成算經」巻之十七 [7] に変乗法という名称で $n \leq 5$ まで計算されている。藤原 [16, p. 439] は変乗法は[この行列式の計算の]「必要から案出されたものであろう」というが、「解伏題之法」の換式を使う終結式の計算に現れる行列式はいつもこの種の対称行列式であるから、この推測は当たっていない。それに、もし、行列式を使って計算したのであれば、$n = 5$ のときの計算で 26項中 4項も間違えるようなへまは起こさなかったであろう。

昔の人たちの計算と直接には関係しないが、この行列式は 1 の原始 n 乗根を ω として、

$$F(X^n) = f(X)f(\omega X)f(\omega^2 X) \cdots f(\omega^{n-1}X) \tag{15}$$

と表せることにも注意する。ここで、さらに、$X^n - 1$ の既約分解に応じて ω^j を分類し、同類の項の積を作れば、(8) を一般化した因数分解の公式ができる。手計算でするときは、私は主にこの式を使って昔の人の計算を検算した。

「大成算經」巻之三 [5] では代数方程式の変換の理論が述べられ、「冪商」と題する章では、与えられた方程式の根の n 乗全体を根とする方程式を作る方法が論じられている。(15) 式は $F(Y) = 0$ が求める方程式であることをも示している。

5. 適用例

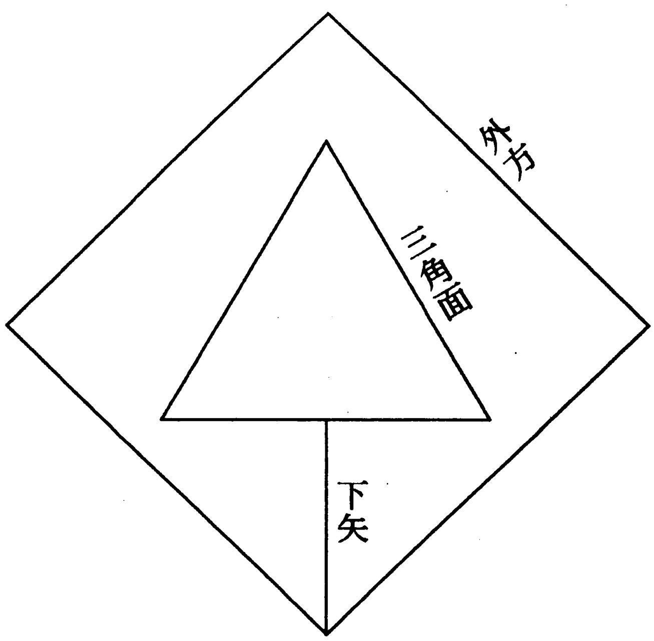
以上紹介した消長法、あるいは冪乗演段は、連立代数方程式の変数消去法としては特殊で、消去しようとする変数の冪が他の変数の整式の形に解けていなければ使えない。直後に關によって「解伏題之法」という一般理論が作られたこともあって、これまでこれらの業績に対する数学史家の評価は低い。

三上 [14] はまさしくこれらの研究が発表されている文献を扱いながら殆ど何も述べていない。藤原 [17] も「増修日本数学史」[19] に平山諦が付けた頭注「明元算法は、$y = x - a, z = y - b,\ \sqrt[n]{x} +\ \sqrt[n]{y} +\ \sqrt[n]{z} = c,\ n = 2, 3, 4, 5, 6$ なる五問を解いている。七乗冪演式は、$x + y + z = a,\ x^8 - y^8 = b, y^8 - z^8 = c$ なる一問を解いている。」以上のことは云っていない。

「一極算法」でも本の中で適用例として選ばれている基礎の方程式は一次式であったために、一見してつまらない連立方程式のために大騒ぎをしているように見えたのであろう。しかし、彼らが述べた方法は、ここに全ての変数に関するどんな代数方程式がきても適用できるものなのである。従って、この方程式として「古今算法記」第14問と同様に六斜術を取り、冪乗差の指数として $n = 5$ を選べば、たちまちのうちに、消去して得られる単独方程式の次数が $6 \times 5^5 = 18750$ にもなる問題ができる。

最後に、このような人工的な問題でなく、日常に現れそうな問題を解くにも、冪乗演段の方法乃至は考え方が役立つことを示すために、「大成算經」巻之十六 [6] から、問題の解き方が下手だとそこでは批評されている次の問題をとりあげる。

仮如.有方内三角外積五
十寸。只云.下矢四寸。
　問外方。
答曰.外方一尺〇三分
二厘二毛〇六四強。



図のように重心が重なる正方形と正三角形があり、正三角形は正方形に含まれ、底辺は正方形の対角線と平行とする。面積の差が 50 平方寸、下矢と表した線分の長さが 4 寸のとき、正方形の一辺の長さを求めよというのが問題である。

実はこの答は間違っているのだが、これについてはおいおい論じて行くことにして、まず、現代流に方程式を立てる。答が求められている正方形の一辺を X寸、重心から正三角形の底辺に下ろした垂線の長さを Y寸とすれば、

$$\begin{cases} X^2 - 50 = 3\sqrt{3}\,Y^2, \\ \dfrac{X}{\sqrt{2}} = Y + 4. \end{cases} \tag{16}$$

下の方程式を Y について解き、

$$Y = \frac{X}{\sqrt{2}} - 4. \tag{17}$$

これを上の式に代入、X に関する 2次方程式を得て、解の公式によって解き、これを (17) に代入して Y を求める。こうして二組の解

$$\begin{cases} X = 10.32206446\ldots \\ Y = 3.29880178\ldots \end{cases}, \quad \begin{cases} X = 8.07122410\ldots \\ Y = 1.70721730\ldots \end{cases} \tag{18}$$

が得られる。これで何の問題もないようにみえる。

ところが、これは江戸時代の数学としてはあり得ない解法なのである。まず、(16), (17) のような式は、算木で表す数に文字を掛け合わすことを示す天元術乃至は傍書法では書くことができなかった。その意味では根号を含む数は数として扱

うことができなかったのである。また、關一建部の時代には割り算の表記もできなかったので、(16) は両辺を自乗し、分母を払って

$$\begin{cases} 27Y^4 - (50 - X^2)^2 = 0, \\ 2(4+Y)^2 - X^2 = 0 \end{cases} \tag{19}$$

とする他なかった。実際は括弧もないので、更に、括弧の中を別の文字で表し、その自乗として表すか、あるいは展開して括弧をなくしておく必要があった。

上の式は 27 という係数はあるものの、Y^4 を表しているので、三乗冪演段を適用することができる。実際はそうしないで、巻之十七で三乗冪演段を計算したときと似た下手な計算をして、Y を消去し

$$311451904 - 185113088X^2 + 8104992X^4 - 116384X^6 + 529X^8 = 0 \tag{20}$$

を得、これを解いて答を求めている。この方程式は (18) の解の他に

$$X = 6.81860976\ldots, \quad 1.35072161\ldots \tag{21}$$

を正の解としている。これらは (16) の上の方程式の片側の符号を変えた方程式の解となっている。方程式 (20) の左辺は最初の方程式系 (16) の解の X の値すべてが根となる整数係数の X の整式全体の基底となっているが、それでもこういうことが起きる。

なお、(19) は X^2 についても解けているので、これを代入して Y の方程式を求めれば

$$324 - 576Y + 184Y^2 + 64Y^3 - 23Y^4 = 0 \tag{22}$$

となる。この方がずっと早く計算できるが、そうしないのは建部賢弘の哲学による。彼は、問題で問われている数を始めから最終的な未知数として方程式を立てるべきであると主張し、実行した。既に、[0] でも、朱世傑の解法を説明した後に「今按ずるに」と前置きし、自身の解法を与えている。

最初にこの問題は解法が下手な例として挙げられていると述べたが、著者が書いている欠点は以上に述べたことにあるのではなく、途中の計算で、X の整式として数式で表したものを Y の整式としてみればどうなるかを割注で詳しく漢文で表記したのが説明過剰であると自己批判している。

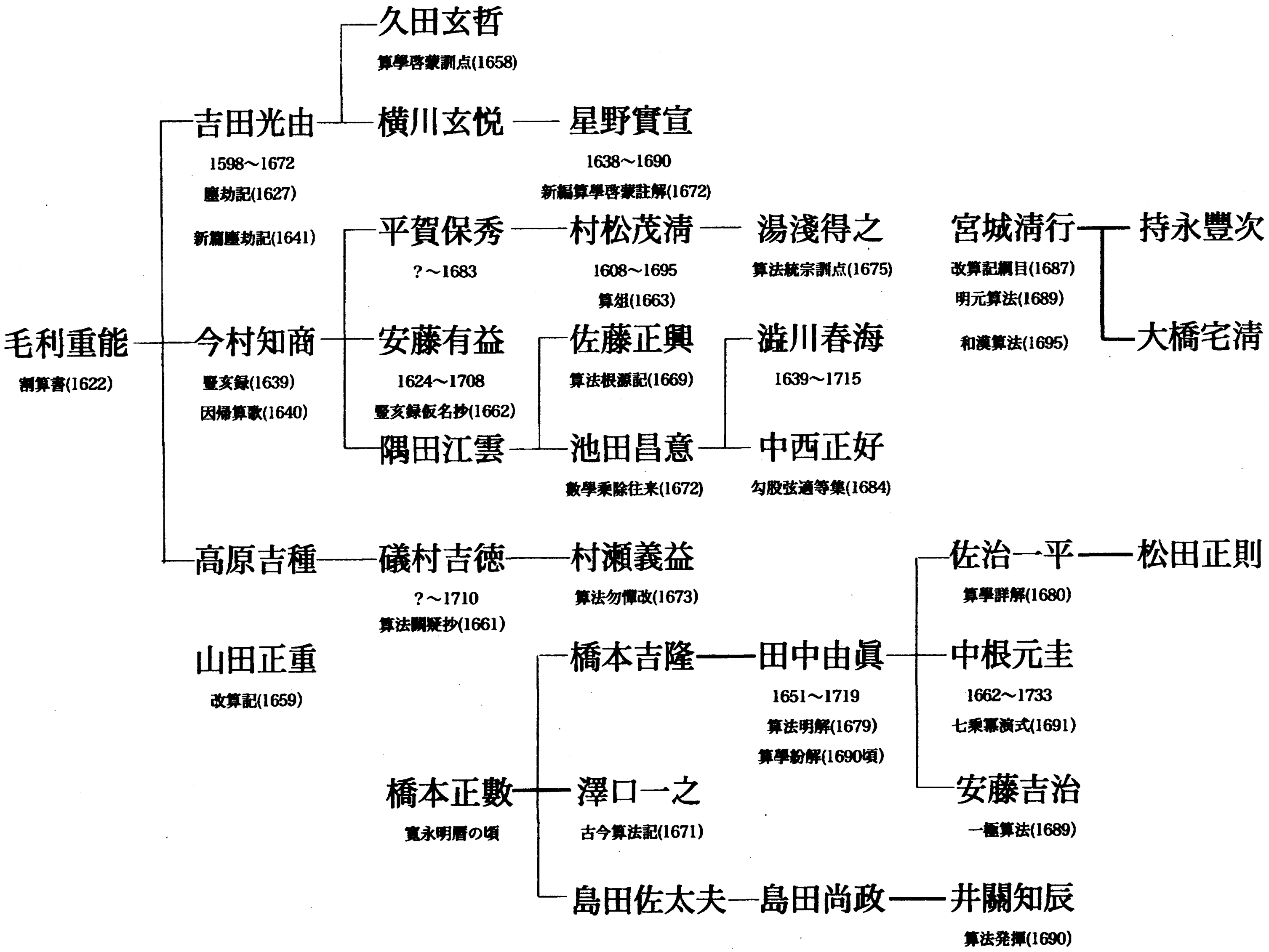
最後になったが、本文で与えられている (18) の左の解が間違っている理由は、正三角形の一辺の半分は、この場合、Y の $\sqrt{3}$ 倍 $= 5.713\ldots$ で、下矢の 4 を越えてしまい、正三角形は正方形に収まらないからである。

引用文献

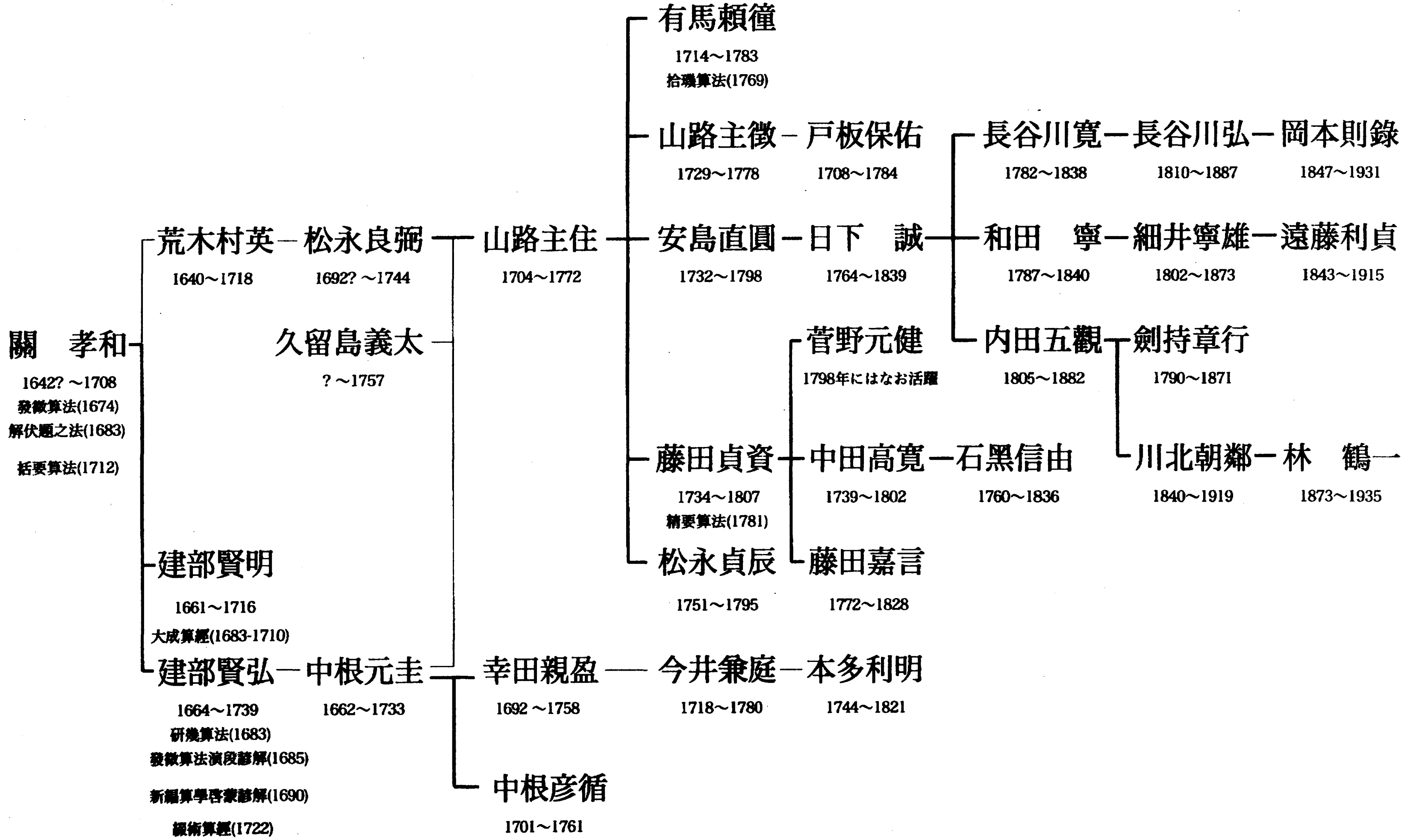
0. 建部賢弘, 新編算學啓蒙諺解 (1690), 東北大学付属図書館 和算ポータル **108**.
1. 清水布夫・校注, 古今算法記, 江戸初期和算選書第3巻2 (1993), 研成社.
2. 小川東, 関 孝和「發微算法」, 四日市大学教育研究叢書5 (1994), 大空社.
3. 竹之内脩 注解, 古今算法記自問一十五好, 近畿和算ゼミナール報告集 6.
4. 小松彦三郎,『解伏題之法』山路主住本の復元と「關孝和全集」との比較,「数学史の研究」数理解析研究所講究録 **1392** (2004), 225–245.
5. 關孝和–建部賢弘–建部賢明, 大成算經 巻之三 變技 (1683–1710).
6. 關孝和–建部賢弘–建部賢明, 大成算經 巻之十六 題術辯 (1683–1710).
7. 關孝和–建部賢弘–建部賢明, 大成算經 巻之十七 全題解 (1683–1710).
8. 田中正利(由眞), 算法明解 (1679), 東北大学付属図書館 和算ポータル **100**.
9. 柴田(宮城)清行, 明元算法 (1689), 東北大学付属図書館 和算ポータル **102**.
10. 安藤吉治, 一極算法 (1689), 東北大学付属図書館 和算ポータル **101**.
11. 井関知辰, 算法発揮 (1690), 東北大学付属図書館 和算ポータル **105**.
12. 中根元圭, 七乘冪演式 (1691), 東北大学付属図書館 和算ポータル **114**.
13. 田中由眞, 算學紛解 (1690頃), 大阪府立中之島図書館蔵 請求番号 618/204.
14. 三上義夫, 關孝和の業績と京阪の算家並びに支那の算法との關係及び比較, 東洋学報 **20** (1932), 217–249, 543–566, **21** (1933), 45–65, 352–373, 557–575, **22** (1935), 54–99.
15. 藤原松三郎著 日本学士院編, 明治前日本数学史第一巻, 岩波書店, 1954.
16. 藤原松三郎著 日本学士院編, 明治前日本数学史第二巻, 岩波書店, 1956.
17. 藤原松三郎著 日本学士院編, 明治前日本数学史第三巻, 岩波書店, 1957.
18. 加藤平左エ門, 算聖関孝和の業績（解説）, 槙書房, 1972.
19. 遠藤利貞遺著 三上義夫編 平山諦補訂, 増修日本数学史, 恒星社, 1981.
20. 小松彦三郎, 漢文で数学はできるか, 科学 **73** (2003), 1159–1164.
21. 後藤武史–小松彦三郎, １７世紀日本と１８－１９世紀西洋の行列式、終結式及び判別式,「数学史の研究」数理解析研究所講究録 **1392** (2004), 117–128.
22. 木村欣司–野呂正行 他, 関孝和の問題を解く, 数式処理 **11** (2005), 35–42.
23. 小松彦三郎, 和算における代数表現と未知数消去の実際, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **28** (2007), 64–68.
24. 小松彦三郎,「大成算經」校訂本作成の現状報告,「数学史の研究」数理解析研究所講究録 **1546** (2007), 140–156.

上で和算ポータルというのは東北大学付属図書館のホーム・ページで画像が公開されている和算書のシリーズ名である。http://library.tohoku.ac.jp でホーム・ページを開いた後、コレクション、和算ポータル 、江戸前期刊本と順次開いて行けば到達できる。「江戸後期刊本」で四種類の「大成算經」を見ることもできるが、黒白画像であるため、算木が表す数の符号は分からない。この中では 1 番の中身である狩野文庫7-31453.20 が最良であるが、全体の中で最良の部に属するとは言えない [24]。

京阪の算家とその流派


毛利重能
割算書(1622)
吉田光由
1598～1672
塵劫記(1627)
新篇塵劫記(1641)
今村知商
豎亥録(1639)
因帰算歌(1640)
高原吉種
山田正重
改算記(1659)
久田玄哲
算學啓蒙訓点(1658)
横川玄悦
星野實宣
1638～1690
新編算學啓蒙註解(1672)
平賀保秀
？～1683
村松茂清
1608～1695
算俎(1663)
湯淺得之
算法統宗訓点(1675)
宮城清行
改算記綱目(1687)
明元算法(1689)
和漢算法(1695)
持永豊次
大橋宅清
安藤有益
1624～1708
豎亥録仮名抄(1662)
佐藤正興
算法根源記(1669)
澁川春海
1639～1715
隅田江雲
池田昌意
數學乗除往来(1672)
中西正好
勾股弦適等集(1684)
礒村吉徳
？～1710
算法闕疑抄(1661)
村瀬義益
算法勿憚改(1673)
佐治一平
算學詳解(1680)
松田正則
橋本吉隆
田中由眞
1651～1719
算法明解(1679)
算學紛解(1690頃)
中根元圭
1662～1733
七乗冪演式(1691)
橋本正數
寛永明暦の頃
澤口一之
古今算法記(1671)
安藤吉治
一極算法(1689)
島田佐太夫
島田尚政
井關知辰
算法発揮(1690)

關流相伝


關　孝和
1642? ~1708
發微算法(1674)
解伏題之法(1683)
括要算法(1712)
荒木村英
1640~1718
松永良弼
1692? ~1744
久留島義太
? ~1757
建部賢明
1661~1716
大成算經(1683-1710)
建部賢弘
1664~1739
研幾算法(1683)
發微算法演段諺解(1685)
新編算學啓蒙諺解(1690)
綴術算經(1722)
中根元圭
1662~1733
山路主住
1704~1772
幸田親盈
1692 ~1758
中根彦循
1701~1761
有馬頼僮
1714~1783
拾璣算法(1769)
山路主徴
1729~1778
安島直圓
1732~1798
藤田貞資
1734~1807
精要算法(1781)
松永貞辰
1751~1795
今井兼庭
1718~1780
戸板保佑
1708~1784
日下　誠
1764~1839
菅野元健
1798年にはなお活躍
中田高寛
1739~1802
藤田嘉言
1772~1828
本多利明
1744~1821
石黒信由
1760~1836
長谷川寛
1782~1838
和田　寧
1787~1840
内田五觀
1805~1882
長谷川弘
1810~1887
細井寧雄
1802~1873
劍持章行
1790~1871
川北朝鄰
1840~1919
岡本則録
1847~1931
遠藤利貞
1843~1915
林　鶴一
1873~1935