数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 40-50

『勘者御伽雙紙』の翦管術

聖心女子学院 田辺 寿美枝 (Sumie Tanabe)
Sacred Heart Senior High School

1 はじめに

『勘者御伽雙紙』は中根彦循(なかねげんじゅん)が遊戯的要素の強い問題を集め 1743 年 (寛保 3 年) に著した算書である. 彦循は 1701 年 (元禄 14 年) 京都に生まれ, 後に法舳(ほうじく)と号した. 彦循の父, 中根元圭は白山先生とも呼ばれた和算家で, 徳川吉宗に召され暦の研究に従事し,『暦算全書』に訓点を施したことでも知られている. 彦循は父元圭に数学を学んだ後, 江戸に出て久留島義太に師事した (参考文献 [5]) .『勘者御伽雙紙』は彦循 6 著作中第 2 作にあたるもので, 上中下 3 巻から成り, 中巻に「九去法」(参考文献 [19]) が紹介されているほか「小町算」「裁ち合せ」「目付け字」なども収録されている. 表題の「翦管術」に関する問題は上巻第 19 問から第 22 問として載せられている.「翦管術」が紹介された『括要算法』(1712 年, 関孝和) 或いは『大成算経』(1683 年～1710 年, 関孝和, 建部賢明, 建部賢弘) などが漢文で書かれていたのに対し,『勘者御伽雙紙』は『塵劫記』(1627 年, 吉田光由) などと同様の和文 (漢字交じり平仮名) で書かれた一般向け通俗書であった. 本稿では,『勘者御伽雙紙』上巻第 19 問～第 22 問を現代文に表し, 特に第 22 問「買物銭数ほど取る事」について, その解法の流れを精読,『勘者御伽雙紙』が書かれた時代背景, 不定方程式の歴史の流れの中にあっての『勘者御伽雙紙』の解法の特徴, 他文化圏における解法との異同について検証することを目的としている.

2 「翦管術」

関孝和に始まり, 続く和算家たちが「翦管術」と呼んだ“術”とは, 連立 1 次合同式「$x \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $\cdots$, $x \equiv r_n \pmod{m_n}$」(以下, 剰余方程式と呼ぶ) の解法のことをいう. 剰余方程式は中国の古算書『孫子算経』(400 年頃, 著者不詳) の中に「物不知其総数」としてある 1 題が嚆矢とみられ, 暦学上の必要により中国では古くから剰余方程式の解法が確立し, 伝承されていた. 『孫子算経』の後, 連立不定方程式を扱った『張丘建算経』(475 頃) があり, さらに時代を下って『数書九章』(1247 年, 秦九韶) では「大衍総数術」として剰余方程式の解法が語られている. その後も『楊輝算法』(1274～1275 年, 楊輝) の「續古摘奇算法」(1275 年) では,「翦管術」, 俗名「秦王暗點兵猶覆射之術」として 5 題,『算法統宗』(1592 年, 程大位) では「物不知其総数」,「韓信點兵」として 3 題など, 様々な名称とともに剰余方程式が伝えられていた. 現在「中国剰余定理」(Chinese Remainder Theorem) と称されることもあるが, 中国では「孫子定理」と呼ばれている. 日本にも奈良時代から既に『孫子算経』,『張丘建算経』などの算書が伝わっていた. しかし, その後日本に伝来した中国の算書の中で, 和算の「翦管術」に影響があったと確認されているものは『楊輝算法』と『算法統宗』である.『楊輝算法』は関孝和が写本したとされるものの写しが残っており, 関が『括要算法』の中で「翦管術」と題したことも,『楊輝算法』からの引用と考えられる. 又『算法統宗』は『括要算法』の中に書名とともにその剰余方程式が紹介されており, 当時の和算家たちがこの 2 冊の算書を読み, 少なからず示唆を受けていたことは確かといえよう.

3 『勘者御伽雙紙』上巻 第19問～第21問

以下四角枠内は『勘者御伽雙紙』原文の現代語訳である.(参考文献 [22])

第19問 百五減ということ

誰かに石を幾つか一ヶ所に置かせて,一度は7つずつ,一度は5つずつ,一度は3つずつ引き,それぞれの余りの数を聞いて,石の総数を答えることを「百五減」という.
たとえば,7つずつ引くと3つ余り,5つずつ引くと1つ余り,3つずつ引くと2つ余ると言われたとき,石の総数はいくつであるか.
答 総数101
法 7つずつ引いたときの余り1つを15と数え,$3\times 15=45$,5つずつ引いたときの余り1つを21と数え,$1\times 21=21$,3つずつ引いたときの余り1つを70と数え,$2\times 70=140$,これら3つの数を合わせて,$45+21+140=206$.この206から105を引いた残り101が答えである.(もし残りが105より多いときには繰り返し,105を引けるだけ引く.)また7つずつ引いても,5つずつ引いても,3つずつ引いても,3回とも余りがない時には,105と答える.

第20問 又三百十五減のこと

たとえば,5つずつ引いた余りが3,7つずつ引いた余りが4,9つずつ引いた余りが5のときはいくつであるか?
答 総数158
法 5つずつ引いた余り1つを126と数え $3\times 126=378$,7つずつ引いた余り1つを225と数え $4\times 225=900$,9つずつ引いた余り1つを280と数え $5\times 280=1400$.これら3数を合わせた2678から315ずつ(8回)引いた残り158が答である.

第21問 又六十三減のこと

7つずつ引くと3つ余り,9つずつ引くと5つ余るというときはいくつであるか.
答 総数59
法 7つ引くときの余り1つを36と数え,$3\times 36=108$,9つずつ引くときの余り1つを28と数え,$5\times 28=140$. 2つの数を合わせた248から63ずつ(3回)引いて,答えは59と分かる.
どの問題でもはじめに置く石の総数は引いていく数を上限とすると良い.

古く奈良時代から日本にも伝わっていた中国剰余方程式であったが,江戸時代初期,『算法統宗』(1592年,程大位)をもとに書いたとされる『塵劫記』(1627年,吉田光由)の中で「百五減算」[1]として紹介され,広く親しまれるようになった.『勘者御伽雙紙』第19問はその『塵劫記』と同じ「百五減」,第20問は「三百十五減」,第21問は「六十三減」と名付けられ,剰余方程式3題が続いている.(参考文献 [1] [4] [22])

また剰余方程式の解法に必要となる不定方程式「$ax-by=1$ 但し a,b は自然数の定数,$(a,b)=1$」[2]の解法を和算家たちは「剰一術」と呼んでいた.「剰一術」の本質は「ユークリッドの互除法」と同様の手続きであったが,『勘者御伽雙紙』には「剰一術」の解説はない.関孝和の『括要算法』(1712年)に詳しく書かれている.(参考文献 [8] [18])

[1] 7, 5, 3で割った余りに関する問題限定の名称.最後に7,5,3の最小公倍数105を引くことに由来する.
[2] 整数 a と b の最大公約数を (a,b) と表す

4 『勘者御伽雙紙』上巻 第22問「買物銭数ほど取る事」

『改算記』[3]に次のような問題がある.

代金一貫文（960文）で瓜, 茄子, 桃の3種を買う. それぞれの値段は, 瓜は1個2文, 茄子は3個1文, 桃は8個1文である. 3種混ぜて代金（960文）と同じ数ちょうど960個買うとすると, それぞれ幾つずつ買えば良いか.

この問題を解くのに, 『改算記』では, まず瓜を430個として決めて解いているが, 一体どういうことであろうか. この問題は狂題[4]で, 答えは一通りではなく, 63通りの答がある. 瓜の数でいえば, 385個から1つずつ増やして447個までの63通りの答えがある. それにもかかわらず, 瓜の数を初めから430個と決めているため, 自然に茄子の数も桃の数も一通りだけを答えとしている. もし初めの瓜の数を384個以下, 或いは448個以上としたなら他の個数をどのように求めるというのであろうか. 恥ずかしく, 耐えられないことである. また柴田理右衛門清行の弟子[5]が著した『綱目』[6]を見ても, 「翦管術」を分かっていないように思われる. 「買物銭数ほど取る事」は3種合わせる問題もどのような数値であっても自在に解ける, 2種の場合の解法は別記すると書いてある. しかし, 実際は数の組み合わせによっては思うように解けない3種の問題があることを知らずに, 濫りにこのように書いているのは滑稽, 大変恥ずかしいことである. 従って, 正しい解法を書き記すこと, 次のとおりである.

術 瓜の値段2文に茄子の3個を掛けた数6から, 瓜の数1個と茄子の値段1文を掛けた数1を引き余り5. この5に桃の数8個を掛けた40を加数とする. また, 瓜の値段2文に桃の数8個を掛けた数16から, 瓜の数1個と桃の値段1文を掛けた数1を引き余り15. この15に茄子の数3を掛けた数45を減数とする. 加数40と減数45の最大公約数（等数と呼ぶ）は5なので, 遍約術（等数で割ること）によってそれぞれを等数5で割って加数を8, 減数を9とする. 不定方程式「$8x - 9y = 1$」を剰一術で解いて$x = 8$（段数）と求まる. また瓜の値段2文から瓜の数1個を引いた余り1に茄子の数3個と桃の数8個と代金960文を掛け23040となる. この数を前の等数で割って4608. (もし割り切れなければ答えがない.) この4608に段数8を掛けた数36864を減数9で引いていくと余りがなくなる. 茄子の数が0個では茄子がなくなってしまうので, 茄子の（最少の）個数を9個とする. この9に加数8を掛けた72を4608から引いた数4536を減数9で割った数504を桃の数とする.960から茄子と桃の数を引いた余り447を瓜の数とする. この答え, 茄子9個, 桃504個, 瓜447個から茄子は9個ずつ増やし, 桃は8個ずつ引き, 瓜は1個ずつ（加数8と減数9の差）引いて63通りの答えが得られる. 但し数値を変えて同じ解法で答えを得られる次のような問題もある.

1貫文（960文）で瓜, 茄子, 桃を（合わせて）960個買いたい. 瓜は7個37文, 茄子は10個7文, 桃は9個8文である. 瓜, 茄子, 桃の3種を何個ずつ買えば良いか.

答 瓜 三十五個　價百八十九文,　茄子 二百五十個　價百七十九文,
桃 六百七十五個　價六百二十四文

[3]山田正重著, 1659年 (万治2年) 刊行.
[4]不定問題
[5]持永豊次, 大橋宅清
[6]『改算記綱目』1687年（貞享4年）刊行

第22問は瓜を x 個, 茄子を y 個, 桃を z 個とすると,

$$\begin{cases} x+y+z=960\cdots① \\ \dfrac{2x}{1}+\dfrac{1y}{3}+\dfrac{1z}{8}=960\cdots② \end{cases}$$

という3元の連立不定方程式で表される問題である.

中根は『改算記』にあったこの問題を引用し，さらに,『改算記』及び『改算記綱目』の誤りを指摘している.

- 瓜の個数を430個と決めて解き, 1組の解しか答えていないが,
  瓜の個数で云えば385個から447個までの63通りの答えがある.
- 3元の不定方程式は数値が幾つであっても解けると書いているが,
  数値によっては解けない場合がある.

以上の誤り2点を指摘した後，中根は正しい解法を示し，さらにその解説の中で整数解がない場合の数値に関する条件についても明言している. 以下は中根の示した解法を現代語及び現代の数式を用いて表したものである.

術

$(\overset{\text{瓜}}{2}\text{文}\times\overset{\text{茄子}}{3}\text{個}-\overset{\text{瓜}}{1}\text{個}\times\overset{\text{茄子}}{1}\text{文})\times\overset{\text{桃}}{8}\text{個}=40$

$(\overset{\text{瓜}}{2}\text{文}\times\overset{\text{桃}}{8}\text{個}-\overset{\text{瓜}}{1}\text{個}\times\overset{\text{桃}}{1}\text{文})\times\overset{\text{茄子}}{3}\text{個}=45$

(40,45)=5(等数) で 40 と 45 それぞれを割り,

$40\div5=8\rightarrow$加数　,　$45\div5=9\rightarrow$減数　とする.

不定方程式「$\overset{\text{加数}}{8}a-\overset{\text{減数}}{9}b=1$」を剰一術によって解き, $a=8$ (段) と分かる.

$(\overset{\text{瓜}}{2}\text{文}-\overset{\text{瓜}}{1}\text{個})\times\overset{\text{茄子}}{3}\text{個}\times\overset{\text{桃}}{8}\text{個}\times960=23040$,

$23040\div\overset{\text{等数}}{5}=4608$ (←この数が割り切れなければ答えはない.)

この商4608に段数8を掛け，減数9で割ると，$4608\times\overset{\text{段数}}{8}\div\overset{\text{減数}}{9}$ は余りがない.
この余りが茄子の最少個数となるはずであるが, 茄子は0個ではないので,
茄子の最少の個数が9個と分かる.

次に茄子を9個としたときの桃と瓜の個数を求めている.

$4608-\overset{\text{茄子}}{9}\text{個}\times\overset{\text{加数}}{8}=4536$

$4536\div\overset{\text{減数}}{9}=504\text{個}$　→　桃の数は504個

$960\text{個}-(\overset{\text{茄子}}{9}\text{個}+\overset{\text{桃}}{504}\text{個})=\overset{\text{瓜}}{447}\text{個}$　→　瓜の数は447個

瓜447個, 茄子9個, 桃504個が一組の答えと分かる.

この答えから, 茄子は$\overset{\text{減数}}{9}$個ずつ増やし, 桃は$\overset{\text{加数}}{8}$個ずつ減らし,
瓜は1個 (=$\overset{\text{減数}}{9}$個−$\overset{\text{加数}}{8}$個) ずつ減らし, 全部で63通りの答えがある.

第22問の最後にさらに一題，問題が加えられている．その答えにある3種の金額を加えても一貫文（960文）にはなっていない．1文銭を96枚紐に通して100文と見做し，これを「九六の百」といい，差の4文を目銭といった．一貫文は目銭40文（100文につき4文）を差し引いた960文と換算していた．96で100，960で1000に繰り上がる単位換算法であった．この問題の個数に対応する金額はこの換算法に基づいて計算されている.10進法の単位計算に従えば，瓜は35個で185文，茄子は250個で175文，桃は675個で600文，従って3種合わせて960個，960文になっている．

「買物銭数ほど取る事」問題及び解法をさらに一般化し現代の数式記号を用いて表すと以下のようになる.左欄が一般式，右欄は『勘者御伽雙紙』の「買物銭数ほど取る事」問題にある数値を当てはめ，解法の流れを書き出したものである．

瓜 a 個 A 円を x 個，茄子 b 個 B 円を y 個，桃 c 個 C 円を z 個 3種合わせた個数と代金がともに t 個 t 円 であったとすると，以下の3元連立1次不定方程式が得られる．

$$\begin{cases} x+y+z=t\cdots① \\ \dfrac{A}{a}x+\dfrac{B}{b}y+\dfrac{C}{c}z=t\cdots② \end{cases}$$

$A=2,\ B=1,\ C=1$
$a=1,\ b=3,\ c=8$
$t=960$

$$\begin{cases} x+y+z=960\cdots① \\ 2x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{8}=960\cdots② \end{cases}$$

①× Abc − ②× abc より，
$(Abc-Bac)y+(Abc-Cab)z=(A-a)bct$
ここで，
$Abc-Bac=M,\quad Abc-Cab=N,\quad (A-a)bct=S$
とおくと，「$My+Nz=S\cdots③$」 と表せる．

$M=40,\quad N=45$
$S=(2-1)\times3\times8\times960$
$=23040$
「$40y+45z=23040\cdots③$」

整数 y,z を未知数，M,N,S を有理数定数とする不定方程式③ の可解条件は

$$\begin{cases} \cdot「(M,N)=1」 \\ \text{または} \\ \cdot「(M,N)\neq1 \text{ かつ } (M,N)|S」 \end{cases}$$

特に，「$(M,N)\neq1$ かつ $(M,N)|S$」 の場合は，
$\dfrac{M}{(M,N)}=m,\ \dfrac{N}{(M,N)}=n,\ \dfrac{S}{(M,N)}=s$ とおくと，
$(m,n)=1$ となり， 不定方程式③ は，
「$my+nz=s\cdots③'$」 と書き換えられる．

$(M,N)=(40,45)=5$
$\therefore\ m=8,\ n=9,$
$s=S/(M,N)$
$=23040/5=4608$
[注] S が (M,N) で割り切れない場合は整数解はない．
（参考文献 [3]）

「$8y+9z=4608\cdots③'$」

剰一術を用いて「$my-nz=1\cdots④$」を解き y の解 y_0 を得る．
このとき，$y=sy_0$ は「$my+nz=s\cdots③'$」の一つの解であり，
y の一般解は「$y=sy_0+nt\ (t\in Z)\cdots⑤$」と表せる．
[注] 不定方程式③′の y の解 sy_0 に対応する z の解を sz_0 とすると，
不定方程式③′の z の一般解は「$z=sz_0-mt\ (t\in Z)$」と表せる．しかし和算では一般に z の解を求めない，用いない．

「$8y-9z=1\cdots④$」
を剰一術を用いて解き，
「$y_0=8$」と求まる．

不定方程式③′の y の一般解⑤のうち最小の自然数解を求める.
sy_0を n で割った商を Q, 余りを r とすると,

$$sy_0 = nQ + r$$

であるので, 一般解⑤式において $t = -Q$ とした y の値

$$\begin{aligned} y &= sy_0 - nQ \\ &= (nQ + r) - nQ \\ &= r \end{aligned}$$

この r が不定方程式③′を満たす y の最小の自然数解である.
y の最小の自然数解を y_1 とすると,
y_1に対応する z_1の値は「$my + nz = s \cdots$③′」より,

$$z_1 = \frac{s - my_1}{n}$$

x_1の値は「$x + y + z = t \cdots$①」より,

$$x_1 = t - (y_1 + z_1) = t + \frac{(m-n)y_1 - s}{n}$$

更に一般解は

「$x = x_1 - (n-m)k$
$y = y_1 + nk$
$z = z_1 - mk \quad (k \in Z, k \geqq 0)$」

と求められる.

$sy_0 = 4608 \times 8$ は
$n = 9$ で割り切れるので,
「$r = 0$」
従って一般解 $y(= sy_0)$ は
$y = 9k (k \in Z)$
となり,
y の最小の正の解は,
「$y_1 = 9$」と求まる.

$y_1 = 9$ のとき,
$z_1 = (4608 - 8 \times 9) \div 9$
$=504$
$x_1 = 960 - (9 + 504)$
$=447$

一般解は,
$x = 447 - k$
$y = 9(k+1)$
$z = 504 - 8k$
$(k = 0, 1, 2, \cdots, 62)$
と求められる.

『勘者御伽雙紙』第22問では『改算記』が1組の解しか答えていないことを指摘し, 条件に適う解すべて, 63組を答えるべきであると主張している. しかしその一方, 第19問から第21問までの剰余方程式の解は, それまでの中国の算書や和算書と同様, 一般解ではなく, 最小の正の整数解ひとつだけを答えとしている. しかも「石の総数は引く数 (最小公倍数) を上限とすると良い」と但し書きが添えられている. 本来は解が沢山 (無数) あることを意識し、敢えてひとつの答に限定するための配慮といえよう. 数当て遊びという設定のゆえもあろうが, 一般解で答えようという意識は窺えない. 一冊の算書の中の, それも連続した問題での答え方の違い, 一見矛盾しているかに見える中根の意識の差に注目したい. 第19問から第21問剰余方程式の一般解は無限にあり, 現代の私たちは一般解を無限集合である剰余類として認識している. 一方第22問「買物銭数ほど取る事」の解の組合せは高々有限個のものである. 従って, 答え方に対する中根の意識の差は, 無限の概念, 或いは集合論的な数の認識に至っていない数概念の発達段階による限界を語っていると考えることができるのではないだろうか.

5 「買物銭数ほど取る事」と「百鶏算」,「Regula Caeci」

『勘者御伽雙紙』第19問から第20問は「鶏管術」の名のとおりの剰余方程式の問題であった. しかし第22問「買物銭数ほど取る事」は剰余方程式というより中国伝来の類別に従えば「百鶏算」と呼ばれる問題である. にも拘らず中根彦循は「買物銭数ほど取る事」の解説の中

で何故「鶏管術」と語っていたのであろうか．その心を探るべく，不定方程式の歴史的流れについて，少しく思い起こしてみたい．一般に不定方程式の嚆矢はギリシアのDiophantos『算術』(300年頃）と見られている．Archimedesの「家畜問題」（参考文献［6］［16］）に遡ることもありえようけれど，これは短詩体の問題が残されているだけである．関をはじめ和算家たちが「剰一」と呼び，剰余方程式を解くために常用した不定方程式「$ax - by = 1$ 但し，a, b は自然数の定数，$(a, b) = 1$」$\cdots(*)$ をはじめ不定方程式一般はしばしばDiophantos方程式と呼ばれている．一方Diophantosの『算術』は主に２次以上の不定方程式を扱い，不定方程式 $(*)$ の解法は示されていない．さらに，中国『孫子算経』(400年頃）を嚆矢とする剰余方程式であるが，その解法の核心となる不定方程式 $(*)$ の解法は『孫子算経』の中にも示されていない．不定方程式 $(*)$ の解法をはじめて著したのはインドのBrahmagupta (628年）とみられ，続く5世紀のAryabhatiya,12世紀のBhaskaraなどインドの数学者達によって進められた不定方程式の研究が残されている[7]（参考文献［9］［10］［20］）．

一方「買物銭数ほど取る事」の原型と見られる問題は，『孫子算経』の直後の『張丘建算経』(470年頃）にあるものが知られている．「雄鶏１羽５文，雌鳥１羽３文，雛鳥３羽１文を３種合わせて百100羽を100文で買う」という問題すなわち，

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \cdots ① \\ 5x + 3y + \dfrac{z}{3} = 100 \cdots ② \end{cases}$$

であり，『張丘建算経』の後「百鶏算」と呼ばれ『楊輝算法』をはじめ多くの中国の算書で伝承されていった．『張丘建算経』には鶏だけでなく３種の酒を合わせて10銭で10升買うなど同種の問題も載せられていた．

また，ヨーロッパにおいてもFibonacciの『算術の書』をはじめ（参考文献［15］），BachetによるDiophantos『算術』の翻訳も経て，数多くの数学者達によって不定方程式が研究されていたことは良く知られている．『勘者御伽雙紙』(1743年）と同世紀，Eulerは『代数学への完全な入門』(1770年）[8]の第２巻第２部の第２章を３元以上，２連の不定方程式の問題と解法に充てている．その第２章は通し節番24節から30節までの７節から成り，冒頭の24節は「Regula Caeci」と呼ばれる解法の名称の紹介，また27節では一般的な考察へ踏み込み，可解となるための係数の条件について言及している．しかし，完全な条件には至っていない．ほか５節は各節ごとに１題の問題と解法，計５題の問題が紹介されている．例えば26節の問題は，「ブタは $3\frac{1}{2}$ エキュ，ヤギは $1\frac{1}{3}$ エキュ，ヒツジは $\frac{1}{2}$ エキュ，３種合わせて100頭を100エキュで買う」，すなわち「百鶏算」と同じ「100頭を代金100で買う」という設定の問題になっている．このほか「３種の銀を混ぜて買う」「雄牛，牝牛，子牛，羊を４種合わせて100頭を代金100で買う」など買物，支払いに関する問題である．最後30節の問題は買物などの設定のない抽象化された方程式で与えられ，しかも①の方程式の x, y, z の係数が１でない問題例になっている．

一般に連立不定方程式，

$$(**) \begin{cases} x + y + z = t \\ ax + by + cz = u \end{cases} \quad (\text{但し } a, b, c, t, u \text{ は有理数の定数.})$$

[7]資料「不定方程式研究の流れ」を本稿末尾に添付

[8]1770年は独語版の出版年，それ以前に露語版があり，また1774年には仏語訳が刊行された．Euler全集では第一系列第１巻に収録されている．

の自然数解 x, y, z を求める問題の中でもとりわけ $t = u = 100$，しかも買物に関わる設定の問題が多く見られる点で洋の東西を越えた奇妙な共通性が認められる．しかし一方，その解法は様々であった．例えば，中国古算書『張丘建算経』を継承した『楊輝算法』は３つの未知数の一つを消去し，残り２つの未知数を「鶴亀算」[9]的手法で求め，まず１組の解を得る．その後，一つ未知数の値を増やし，その増加に伴う他の２つの未知数の増減の調整を考え順次他の解を求めている．最後の増減調整に関する解説はない．これに対して Euler『代数学への完全な入門』における「Regula Caeci」と呼ばれる解法は，まず未知数一つ，例えば z を消去し，x, y が自然数である条件から，第４の文字 s で x, y を，さらに続いて z を表し，x, y, z が自然数であることを用いて s の範囲を限定し，対応する x, y, z を算出している．

6 結び

前節のような，中国あるいは西欧それぞれにおける連立不定方程式 (**) の解法に対して，『勘者御伽雙紙』の中根彦循は「買物銭数ほど取る事」で「剰一術…不定方程式 (*)」を駆使することによる一般的な解法を示している．Euler のような文字式を用いた表現こそできていないが，単に数値だけでなく「茄子３個」,「瓜２文」といった表現の解説は充分一般性を意識しての解説として読み取ることができる．さらに『楊輝算法』などでは触れられていない，この種の連立不定方程式の解法の要である３つの未知数の増減の調整に関しても，剰一術を用いて整然と語り，しかも可解となる係数の条件についても明言している．

様々な和算書の中でも遊戯的要素の強い一般庶民向け通俗書とみられている中根彦循の『勘者御伽雙紙』ではあるが，この「買物銭数ほど取る事」の解法では，それまでひとつの答えだけを出して良しとしていた和算書に対して，条件に適うすべてを答えるべきであると主張し，さらに３元の連立不定方程式の一般性のある解法を示し，可解条件までも明示している．その可解条件は，同時代の Euler の可解条件に関する言及と較べても，より完全な形で解明され，語られている．この連立不定方程式の一般的解法に関しての深い洞察があったゆえにこそ，中国では「鶴亀算」と見做されていた「買物銭数ほど取る事」の解法について，中根は「翦管術」と呼んだのであろう．数学の，特に歴史の流れの中での問題を類別するには，ただ問題としての類似性だけでなく，それぞれの文化圏のエートス，時代背景によってきたる問題の捉え方の違い，それに伴う解法の異同を含め考えるべきであろう．

本稿では『勘者御伽雙紙』上巻の「買物銭数ほど取る事」に重点を置き，解読を試みた．しかし，この問題の他にも『勘者御伽雙紙』には上・中・下巻それぞれに興味深い問題が多数収録されている．しかも，所々添えられている挿絵[10]もまた一層魅力的なものである．漢文で書かれた専門書とは趣の異なる算書であるが，それゆえにこそ江戸時代の文化としての数学的営みの奥深さを活き活きと語っているともいえよう．今後，『勘者御伽雙紙』全巻に亘るより丹念な精読を通して，当時の和算家たちの数学的感性，数概念のありようについての豊かな示唆が得られるであろう希望を含んだ算書であるといえる．

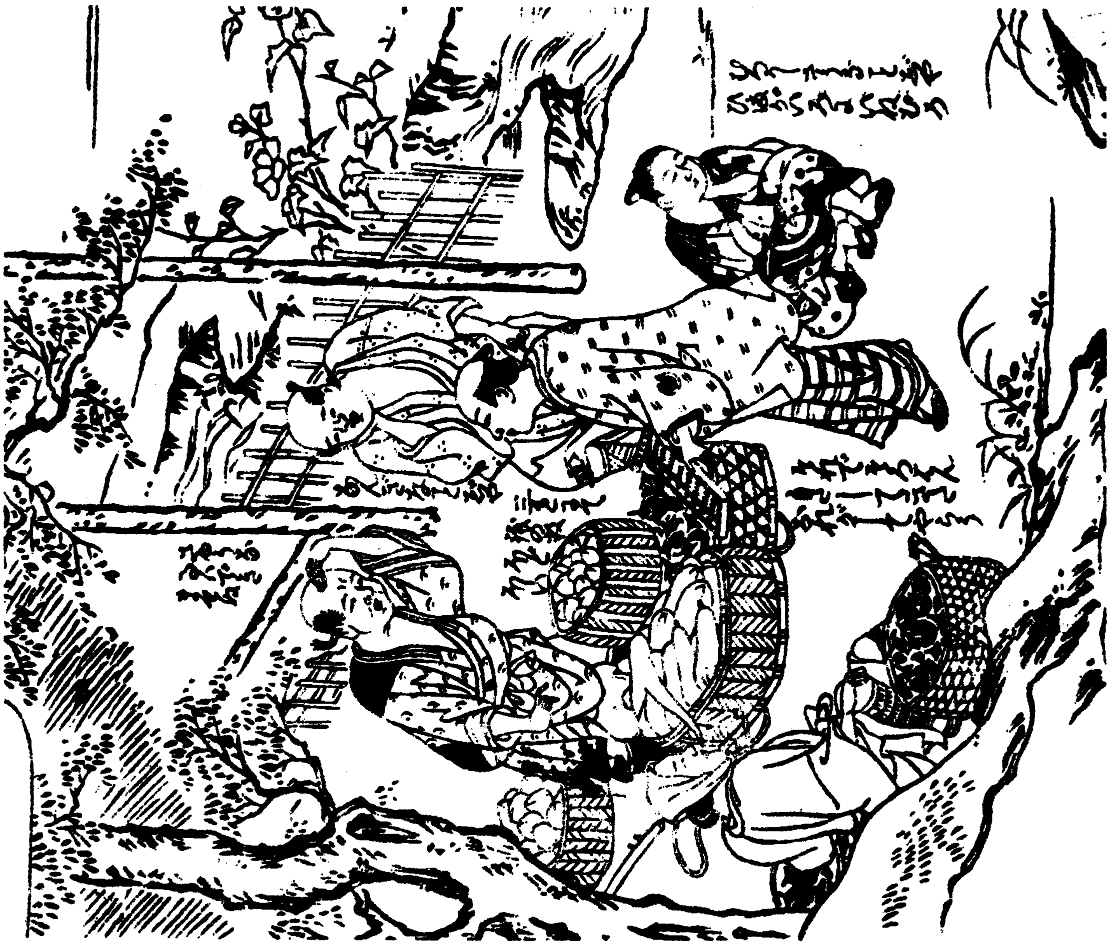
[9] 中国では『孫子算経』に始まる「雉兎同籠」問題として伝承されていた．日本では『算法点竄指南録』(1815, 坂部広胖) によって「雉と兎」が縁起の良い「鶴と亀」に置き換えられて紹介され，広く親しまれた．

[10] 「買物銭数ほど取る事」の挿絵（部分）を本稿末尾に添付

不定方程式研究の流れ

B.C.200年頃	家畜問題	Archimedes?
・	・	・
300年頃	『算術』	Diophantos
400年頃	『孫子算経』	不詳
475年頃	『張丘建算経』	不詳
499年頃	『アリヤバティヤ』	Aryabhate
628年頃	『ブラフマースフタ・シッダンタ』	Brahmagupta
・	・	・
1150年頃	『ヴィジァ ガニタ』『リラヴァティ』	Bhaskara
1202年	『算盤の書』	Fibonacci
1247年	『数書九章』	秦九韶
1275年	『楊輝算法』	楊輝
・	・	・
1592年	『算法統宗』	程大位
1612年	『数の織り成す面白くて楽しい問題』	Bachet
1621年	Diophantosの『算術』訳本	Bachet
1627年	『塵劫記』	吉田光由
1630年頃	欄外ノート	Fermat
1640年	Fermatの小定理(手紙)	Fermat
1659年	『改算記』	山田正重
1672年	『股勾弦鈔』	星野実宣
1687年	『改算記綱目』	持永豊次、大橋宅清
1710年	『大成算経』	関孝和、建部賢明、建部賢弘
1712年	『括要算法』	関孝和
1741年	Fermatの小定理の証明	Euler
1743年	『勘者御伽双紙』	中根彦循
1770年	『代数学の完全な入門』	Euler

『勘者御伽雙紙』「買物銭数ほど取る事」の挿絵（部分）



むつかしそうなことじや
ひまがいるにいねむろ

なんぎなことじや

それでそろばん
もたしてきた
おれがしてやろう

三色にて
銭の数
ほど
ほしい

さような
ことはでき
ませぬ

参考文献

[1] 中根彦循『勘者御伽雙紙』天王寺屋市郎兵衛 (京都寺町) 1743 年 (寛保 3 年)
[2] Leonhard Euler 『*Elémensd'Algèbre*』(仏語訳版)
Lyon:Chez Jean-Marie Bruyset 1774 年
[3] 高木貞治『初等整数論講義』共立出版 1931 年
[4] 中根彦循 (大矢真一訳注)『勘者御伽雙紙』大紘書院 1942 年
[5] 日本学士院編 『明治前日本数学史』第 2 巻 岩波書店 1956 年
[6] T.H.Heath(平田寛他訳)『ギリシア数学史』共立出版 1959 年
[7] 藪内清『中国の数学』岩波新書 1974 年
[8] 関孝和 (平山諦, 下平和夫, 広瀬秀雄編)『関孝和全集』大阪教育図書 1974 年
[9] 矢野道雄編『インド天文学史・数学集』朝日出版 1980 年
[10] C.B.Boyer (加賀美鐵雄, 浦野由有訳)『数学の歴史 1, 2』朝倉書店 1984 年
[11] B.L.van der Waerden(村田全, 佐藤勝造訳)『数学の黎明』みすず書房 1984 年
[12] 伊東俊太郎編『数学の歴史 II 中世の数学』 共立出版 1987 年
[13] 銭宝琮 (川原秀城訳)『中国数学史』みすず書房 1990 年
[14] 任継愈 他編 中国科学技術典籍通彙 數學卷 1993 年
[15] B.L.van der Waerden(加藤明史訳)『代数学の歴史』現代数学社 1994 年
[16] F.Cajori(小倉金之助補訳)『復刻版カジョリ初等数学史』共立出版 1997 年
[17] 城地茂 「不定方程式の系譜」(和算研究所紀要 3 : 3 − 21) 2000 年
[18] 田辺寿美枝「関孝和の『翦管術』」
(京都大学数理解析研究所講究録 1257:114 − 124) 2003 年
[19] 上野健爾「『勘者御伽雙紙』とコンピューター」(数学文化第 2 号)
日本評論社 2004 年
[20] V.J.Katz(上野健爾, 三浦伸夫監訳)『カッツ 数学の歴史』共立出版 2005 年
[21] 田辺寿美枝「関孝和の翦管術 其の二」
(京都大学数理解析研究所講究録 1513:91 − 103) 2006 年
[22] 中根彦循 (佐藤健一, 西田知己, 田辺寿美枝他訳注)『勘者御伽雙紙 上』
NPO 法人和算を普及する会 2007 年