数理解析研究所講究録
第1583巻 2008年 123-146

オイラーの不朽の業績、「力学」と「変分法」
— 彼の広汎な「数理科学」の基礎をめぐって —

阿部剛久 (Takehisa Abe)
芝浦工業大学 (Shibaura Institute of Technolodgy)

まえおき：Euler 再考

本年（２００７年）は、Leonhard Euler(1707.4.15－83.9.18)の生誕３００年という、いまだかつてない科学技術の進歩した年を迎えることができたことを素直に喜びたいと思う。しかし、科学技術の進歩に伴う弊害はますます複雑にかつ巨大なものになりつつあり、極論すれば人類の生存をも脅かしかねない状況下にある時代に、基本的には数学者として近代的な科学技術の先駆者でもあった Euler と彼の仕事を顧みることは決して無益ではなかろうと思う。

彼は、１８世紀の真っ只中に生きて、数学のほとんど全分野に貢献し、それに劣らぬ科学技術分野への多彩にして多大な応用とともにその世紀を通じて最も生産的であったことをはじめ、異分野（たとえば、哲学、音楽学）への造詣と寄与、多数の人々との交流と人間関係、さらには日常生活や趣味などに至るまでを、多くの専門的研究や興味深い断片的記述等を通して、今日では数多く見出される(たとえば、［１］—［６］、およびそれぞれにある文献資料を参照)。これらは Euler を知るうえで重要なことは言うまでもないが、その反面、通俗化されて、歴史上の彼に関する本質的な面の理解を妨げるのではないかとさえ案じられる。膨大な仕事とその個々の価値を理解し得ても、すべて同等に近い多大な賛辞で終わる数学史や科学史であっては、それは単なる‘偉人伝’か、それに近い域に留まるしかない。このままだと、従来の彼に関する歴史観は通俗的な理解を超えることはないであろう。このようなことが起こりがちな原因は、その時代に Euler のみが屹立して、彼に比肩する人物はごく限られていたことにもよろうが、それよりも重大なことは、‘ある種の要素’から離脱した時代的な必然性から来る彼自身の科学に取り組む姿勢とその科学に対する思想史的見方が一般に理解されていないことにあるかと思われる。Euler の真の評価と客観的理解のためには、この問題は避けて通れないであろう。

我々にとって当面重要なことは、彼の偉大な仕事をその時代の学術上の業績の視点のみから評価するだけでは不十分ゆえに、その評価に加えて、歴史の流れの中で業績を再評価し、位置付け、その役割と意義を考えなければならないことであろう。特に偉大とされた人々は、このような検証に耐えてこそ真に偉大であろうが、Euler については、これを機会に再考し、評価し直し、再確認する時期であろうと筆者は

考える。本テーマに入る前に、これらの事柄に関して不徹底ながら筆者の考えを概略的かつ簡潔にまとめておきたいと思う。

そのためには、可能な限り主観的な考えを排して公正な判断に基づくことに努めた。Euler の業績のうち、後世（次代または次世紀以降）に継承されたものの中から敢えて重要と考えられるものを選んで、前世紀（１７世紀）以前からの継承によるもの、および Euler 自身の創始によるものに分けて記載しておく。なお、参考文献や資料に関しては先に掲げたもの（[１] − [６]）の他に、専門的事項や特殊分野に関しては、[７] − [１４] が参考になる。

またここで用いられている言葉、“数理科学”は近年に生じたものであり、日本では、１９６０年前後から主に数学・物理学関係者の間で用いられ始めたと筆者は記憶している。この言葉は、数学を主要な研究方法とする学術的対象の特定分野（例：数理物理学、数理工学、数理経済学等々、‘数理・・・’と呼ばれる分野であることが多い）の総称または個々の分野を指し、目的や対象が特定化された科学としての応用数学である。このことからも、応用数学の世界はますます広大無辺となろう。

Euler の時代の数理科学は、解析学を強力な手段として力学や変分法の形成に注ぐとともに、その結果の応用を主とした幼少年期の数理物理学や数理工学であったと言えよう。これらが数理科学として著しく成長し、本格化してくるのは次世紀からであること等をまず注意しておきたい。下記に現れた矢印‘→’は、■で示された業績事項に直結する歴史的系譜または同一関係にあるものの時代的流れを表す：

（１）前世紀から継承されたものに基づいた業績

１）**数論**：(P. de Fermat→) ■Fermat の数論における諸命題の完全証明（1770,74）（最終定理へ向けて→A. M. Legendre (1825) →G. Lamé (1839) →E. E. Kummer (1846-47) →・・・→現代：R. Taylor & A. Wiles（1994-95）による解決）

２）**解析学**：(G. W. von Leibniz（→de l'Hopital→Jakob & Johann Bernoulli）→) ■微分法の記号の改良・整備 ■微分法の体系的構成（以上：1755）■積分法の記号の改良・整備 ■積分法の体系的構成（以上：1768-74）(→A. L. Cauchy (1820) →・・・→現代：積分論、微分概念の拡張、超準解析の確立、これらの応用）

３）**関数概念**：(Leibniz (1670) →Johann Bernoulli (1718) →A. C. Clairaut (1734) →) ■新概念の定義（1745）（→Cauchy（1823）→P. G. L. Dirichlet（1837）→・・・→現代：写像概念の特例、他）

４）**力学**：(G. Galilei & J. Kepler→I. Newton→) ■質点の運動の解析的理論（1736）■流体の運動理論（1755）■剛体の運動理論（1765,-76）■解析力学：最小作用の原理（1744）（→Lagrange の「解析力学」（1788）→W. R. Hamilton の運動方程式の確立：正準形式による「解析力学」（1834）→Hamilton-(K. G.

J.)Jacobi の方程式の導出（1835）→L. V. de Broglie-E. Schrödinge の波動力学の発見（1926）→（W. Heisenberg の行列力学（1925）とともに）量子力学の形成・確立（-1930）→・・・→現代：場の量子論、素粒子論、その他への応用）

5）**幾何学**：（R. Descartes（1637）→）■2次曲線、曲面の解析幾何学（→微分幾何学へ：G. Monge（1809）→J. C. F. Gauss（1827）→・・・→現代：多様体の各種幾何学、構造、多様体上の解析学、他）

6）**確率論**：（Fermat & B. Pascal→C. Huygens→Jakob Bernolli→）■遭遇の賭けにおける確率計算（1751-53）（→C. de Buffon（1777）→・・・→P. S. Laplace の「確率の解析的理論」（1812）→・・・→A. N. Kolmogorov の「公理的確率」（1933）→・・・→現代：確率過程論、確率解析等、これらの多大な応用）

7）**数理科学－応用数学**

1°．**力学的応用**：（Kepler & Newton→）■月の運動の議論（1752）■天体力学、特に3体問題：惑星と彗星の運動論（1774）（→ Laplace の「天体力学」（1799-1825）→・・・→Poincaré の「天体力学」（1892-99）→・・・→C. L. Siegel の「天体力学」（1971）→現代：条件付き理論と数値計算の進歩）

2°．**光学**：（Huygens, Newton→）■光の（縦波的）波動性を主張（1746）（→・・・→量子力学の形成後：光の粒子&波動の二面性が判明）■光の透過と色収差理論（1749）（→J. Dollond の色収差除去技術（1758））■幾何光学の集大成「屈折光学」と望遠鏡（1765, 1769-71）（→J. H. Lambert→J. F. W. Herchel→・・・→現代：高性能・高精度望遠鏡（量子エレクトロニクス技術の進歩））

3°．**他**：（D. Bernoulli→）■流体静力学（1927）（→D. Bernoulli の「流体力学」（1738）→）■船舶科学、特に船舶の構造理論と安定性（1749）（→造船工学と動力機器・装置へ貢献）。（M. Mersenne, Descartes, Leibniz→）■音楽理論（1739）（→消息不明：Euler にとって極めて稀なものの一つ）。（中世→）■魔法陣遊び（1759）（→・・・→現代：拡大された娯楽数学）。（Galilei, Newton→）■音響・振動弦（1726、1760 前後）（→Legendre & Lagrange→・・・→現代：電子・電気・機器振動力学系）

（2）Euler 自身の創始に基づいた業績

1）**数論**：■解析的整数論の先駆的研究：ζ 関数と素数分布（1748,75）（→）■平方剰余相互法則（-1783）（→Diophantus 解析（不定方程式論）：J.-L. Lagrange（1773-75）→A. M. Legendre（1798）→ Gauss（1801）→・・・→現代：解析的および代数的整数論、局所体理論、他）

2）**解析学**：■初等関数（三角法の諸公式、Euler の公式を含む）と無限級数（数値計算法と初等関数の展開）■Taylor の定理の応用（以上：1748）■微分方程式と

その応用 ■Euler 積分、ΓおよびB関数の導入（以上：1768-74）（→以下：（１）の２）に同じ）

３）楕円関数論：■端緒の把握：４次多項式の平方根を含む１階常微分方程式の積分（1756,57）■加法定理（1761）（→Lagrange（1780）→ Legendre（1810-30）→・・・→K. Weierstrass（1883-85）→現代：数理物理学等への応用）

４）変分法：■定式化と解法の提示（1732–38）■Euler の方程式の提示とその応用（1744）（→Lagrange による解析力学（古典力学の統一形式）の提示（1760-61）→）■解析力学への変分原理の適用：Euler の原理の確立（1760 & 66）（→Legendre（1786）→Jacobi（1837）→Weierstrass（1872）→D. Hilbert（1900）→・・・→現代：最適制御理論、関数解析的直接法等）

５）幾何学：■位置幾何学の問題（Königsberg の橋の問題）の解法（→）■位相幾何学の創始：多面体定理（1752）（→ホモロジー論へ：E. Betti（1871）→H. Poincaré（1895-1901）→Euler 標数、Euler-Poincaré 公式→・・・ →S. Eilenberg-N. E. Steenrod（1952）→・・・→現代：（コ）ホモロジー代数学、カテゴリーへの拡張、多分野への応用）

６）代数学：■連立１次方程式の解法と終結式の議論（1950）（→・・・→消去論の完成（1930 年代末）：近代的代数幾何学の旧テーマの一つ）■「代数学詳解入門（２巻）」（1768,70）：２項定理、Fermat の定理（$n=3$の場合）、他の高い水準のテキスト

７）数理科学ー応用数学

1°．**力学的応用**：■楕円体の引力（1738）（→Clairaut の地球形状論（!743））■ 弾道学の新原理の確立（1745）（→英・仏訳の出版（1777-83）→先進国の砲術学校で採用）

2°．**変分的応用**：■Euler の方程式の応用：極小曲面カテノイド（懸垂面）、ライト・ヘリコイド（常螺旋面）の発見（1744 & 55）（→ ・・・→現代：極小部分多様体の理論）■その他の応用：弾道学、弾性体、材料力学等多数例（1760 & 66）（→・・・→現代：最適制御問題の解法、直接法による微分方程式の解法、量子力学の変分原理等）

3°．他：■船のマストの最適位置：パリ・アカデミーの懸賞問題への解答（1726）■サイクロイド等の曲線の数学的研究（1929）■空間と時間についての省察：I. Kant（1724-1804）に影響したとされる自然科学の哲学（1748）（Euler の哲学上の他の仕事をはじめ、倫理学、神学関係のものはここではすべて省略）

以上ざっと Euler の数学とその関連分野での仕事をまとめて展望したが、まさに十指にあまる顕著な科学者たちの業績を分類整理するかのような印象を憶えたこと

を正直述べておきたい。しかし、彼の全仕事はこれで尽きるものではなく、その編集と出版には少なくともまだ数十年から１００年はかかるであろうと言われるから、今世紀末までにその全貌が知られることが期待されようが、簡単なことではないかもしれない。

さて、Euler は１８世紀最大の数学者として既に数学史上に確固とした地位を築いていることは疑いの余地もないが、上に見たような大きな時間的スケールでの流れの中で彼の業績を考えるとき、様々なことが見えてくるのではなかろうか。その意味でもこのような業績事項の流れの概観表を作成することは重要な作業の一つになるであろうと思われる。Euler の仕事を再考する上で、これまで行われてきた評価に加えて、この表を一つの判断のための資料として用いた結果を総合的に述べてみよう。

まず、彼の仕事が数学と数理科学の進歩発展のために本質的にどれほど後に影響したか、その後の継承の消息を知ることによって判断し、その仕事の歴史的な意義と重要性をかなり客観的に理解できるであろうと期待したい。次の結果を得る：

業績種別（１）の場合： ２）解析学　４）力学　７）数理科学－応用数学の 1°、2° が最も優位にあり、続いて　１）数論　３）関数概念　５）幾何学　が重要な位置を占めるであろう。６）確率論は Euler にとっても不本意な結果に終わったであろうし、７）の 3° では、特に音楽理論、音響・振動弦、魔法陣の成果が他に比較して優位性は認められないと判断する。

業績種別（２）の場合： １）数論　２）解析学　４）変分法　７）数理科学－応用数学の 2° が最も上位に位置し、５）幾何学　はこれらに次いで顕著な存在であり　３）楕円関数論　６）代数学　７）数理科学－応用数学の 1° が中位にくるが、数理科学－応用数学の 3° は影響力の勢いや重要性に欠けていると見なされる。

それぞれの場合をある簡単な‘計量的手続き’によって比較することにより、業績種別（２）の場合が（１）の場合よりやや優っていることが言える。これは、Euler が課題とした仕事が前のものの継承であるか否かにかかわらず、彼の才能が十分に発揮されたということであり、強いて言えば、Euler 自身の発想に基づいた仕事の方が彼にはいくぶんやりやすい面があったのかもしれない。

ところで、Euler の行った仕事は常に厳密で厳正であったとは言いきれない、むしろ多くの曖昧な判定基準で結論された、それでいて大部分は正しいとして受け入れられたものも多いとされる。解析学における無限に関する事柄（無限小量、級数、積、積分などの）を筆頭に、種々の分野に証明が与えられていなかった結果や誤解も少なからず見られることが指摘されている。しかしながら、これらの欠点は、後

世において修正され、その再構成と厳密化に寄与する結果となったことは幸いであったと言えよう。

過去の歴史家によって批評されてきた、Euler の半ば通念化された見方に満足せず、以上に述べたことは、時代の大きな流れの中で仕事の分野別に敢えて彼を捉えることを試みたものである。このことはまた、人々の脳裏に刻まれた長い歴史の中での数学者 Euler の印象をかなり正確に（定量的意味で）裏付けているのではないだろうか。Gauss や Riemann でも長い歴史の過程を通して彼らの個々の仕事が常に満点であろうはずはないであろうから、Euler にとっても彼が過小評価されたことにはならないであろう。

最後に、これまで検証し得た結果に基づいて、Euler を総合的に見直してみることを彼に関する全体的な結論としたい：

どのような偉業でも時代を経るほどにその影響力とそれに基づいた生産性を弱めることは否定できない。しかし、定着し得た普遍的価値は永久に不変であるから、その意味では Euler の仕事の中で最上位に位置する分野、特に数論、解析学をはじめ力学、変分法とこれらの応用である数理科学は、数学史および科学史上で極めて高い地位を占めると考えられ、それらは将来にかけても数学の基礎と応用の両面にわたって時代の先導的な役割と次代以降の進むべき方向づけを担った優れた規範としての意義は大きく、社会的・文化的観点からもその学術的貢献は人類の知的遺産として、その継承と批判に耐えて永らえるであろうと考える。

さらに彼の当時代における社会的貢献に関して補足すれば、Euler は前世紀以来の基礎科学の近代的応用化（光学技術、船舶科学技術等）に尽力することによって、１８世紀末からのイギリスに始まった産業革命の基礎たる工業技術に先鞭をつけた意義は大きいと言えよう。これも従来の Euler 評に見落としがちな点であった。

冒頭部分の言葉への注：最初のページの後半部で述べた「‘ある種の要素’から・・・必然性」について触れておく。科学の近代化の当初に関わる人々（F. Bacon から Leibniz に至る）は、それぞれの業績と思想ともに歴史的意義はもちろんのこと、哲学的議論の対象にもなり得た。しかし、Euler には後者についのニュアンスが感じられない（のは筆者だけであろうか）。それは、近代科学の初期に貢献した人々に特有の雰囲気：１６世紀前半以前の伝統的支配からの脱却を意図した苦闘と努力に由来するかと思われる‘深刻さ’がないからであろう。（彼は、３０歳を過ぎて右目を、晩年に左目も失って全盲となったこと、また著名人たちとの交流の中での人間的な葛藤などは、上に述べた意味の深刻さとはまったく関わりがない。）１８世紀に入ってからは科学の近代化路線の定着とその安定化の促進に伴い、新しい希望へ

向けて開かれていく時代と人々の勢いからくる必然的な結果であろう。

参 考 文 献

[1] D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publ., U. S. A. (1948).

[2] J. Newman(ed.), *The World of Mathematics*, Vol. 2, Part V-VII, Dover Publ., U. S. A.(1956).

[3] 小堀　憲、18世紀の数学、数学の歴史V, 共立出版（1979）.

[4] F. Cajori, *A History of Mathematics*（5th revised ed.）, AMS Chelsea Publ.（1991）.

[5] A. Fellmann, *LEONHARD EULER*, R. T. Verlag GmbH, Hamburg（1995）（日本語版：山本敦之・訳　オイラー－その生涯と業績－、シュプリンガー・東京（2002））.

[6] W. Dunham (ed.), The Genius of Euler, Reflections on his Life and Work, The Mathematical Association of America（2007）.

[7] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics, with an introduction to the problem of three bodies*（4th ed.）, Cambridge Univ. Press（1947）.

[8] E. T. Whittaker and G. N. Watson　*A Course of Modern Analysis*（4th ed.）, Cambridge Univ. Press（1958）

[9] T. Abe and S. Fujino, Seki and Sarrus, and Again Sarrus—Relating to a History of the Theory of Elimination—, Proc. the Fourth International Symposium on the History of Mathematics and Mathematical Education Using Chinese Characters, Maebashi, Japan, pp.103－115（1999）.

[10] 後藤武史-小松彦三郎、17世紀日本と18－19世紀西洋の行列式, 終結式および判別式、数理解析研究所講究録1392、京都大学、pp. 117－128（2004）.

[11] 高瀬正仁、数論と関数論 ― オイラーからヒルベルトへ ― 、数理解析研究所講究録1513、京都大学、pp. 52－61（2006）.

[12] 阿部剛久-小川　束、科学の近代化からライプニッツに至る話題の思想史的断片、数理解析研究所講究録 1513、京都大学、pp. 14－26（2006）.

[13] 物理学辞典編集委員会（編集）、「物理学辞典」（改訂版）、培風館（2002）

[14] 日本数学会（編集）、岩波「数学辞典」（第4版）、岩波書店（2007）.

本　論

「まえおき」によってわかるように、１８世紀は、Euler をはじめ他の数学者たちにとって「解析学」は微積分学を中心とするものであった。「力学」と「変分法」はその応用としてあり、またこれら二つのものは当時の数理科学にとって応用的基礎でもあった。

この本論は、Euler の力学（I 部）と変分法（II 部）における主要な仕事の解説、およびこれらへの補足的な注意事項、からなっている。なお、参考文献は「まえおき」にあるもの以外は、本論末に補足されているが、原典または原論文はすべて本文中に記載した。

I. 力　学

力学：物体とそれに作用する力に基づく運動との関係を調べる物理学の基礎分野の一つである。大別して、静力学（statics）：運動が静止状態にある場合の力の平衡条件を議論する力学、および動力学（dynamics）：運動状態にある場合の力学、があり、これらを合わせて単に力学（mechanics）と呼ぶが、動力学は静力学を特別な場合として含むと見なせば、力学を動力学と呼んでもよい。

対象となる物体が巨視的、微視的に応じて、それぞれを古典力学、量子力学と呼ぶ。ここでの議論は古典的力学であり、これは、質点、質点系、剛体の力学からなっている。また変形可能な連続体の力学として、弾・塑性体力学、流体力学、荷電粒子の運動理論としての電気力学等があり、これらの応用として更に、天体力学、空気力学、電磁流体力学、格子力学等の分野が存在している。

Euler の関係するものは、古典力学や流体力学であり、また古典力学の応用としての天体力学、振動論、他であった。古典力学の統一形式が解析力学であり、Euler はその形成にも関係したたことは注目すべきである。

１. 質点の運動

Galilei や Kepler 以来の伝統は、それまでの力学を幾何学的に扱うものであった。その最たるものが、Newton の‘プリンキピア’（*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687）であったが、Euler は、微積分法を縦横に駆使してこの名著で論じられた質点力学を解析学的に合理化することに初めて成功した。彼の大著、‘力学’（*Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, I & II, 1736）は２巻からなり、第１巻は自由運動を、第２巻は束縛運動をそれぞれ中心的に議論している（補・[１]、[７]、[８]、[１３]、[１４]、[４]）。なお、（　）内の文献は少なくともＩ部と II 部に共通している。補・[１] は本論末の補足文献 [１] を示す。

基本事項. ■質点：物体の形、大きさを無視して一点で代表させ、力学特性としての全質量を

その点に集中させ、その力学を議論するときの物体を表す点（例：重心；内部運動の無視できない物体（分子、原子等）は質点と見なさない。）■束縛運動：　物体の運動が他の物体または外力によって拘束され、自由な運動が制限された結果、その運動は一定の幾何学的空間（曲線、曲面）に留まり、束縛条件は $f(x,y,z,t)=0$ & $g(x,y,z,t)=0$（曲線），$f(x,y,z,t)=0$（曲面）。その原因となる力を束縛力（抗力）とよび、その作用は曲線や曲面に垂直で、運動方程式の右辺（作用力）$=\boldsymbol{F}$(動力：与えられた力)$+\boldsymbol{R}$(抗力：未知の力)、$\boldsymbol{R}$は曲線や曲面への垂直条件から決定。非束縛（自由）運動は $\boldsymbol{R}$が存在しない運動 。よって、質点の運動方程式は、$md^2\boldsymbol{r}/dt^2=\boldsymbol{F}$：非束縛、$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$：束縛（$m$：質点の質量、$\boldsymbol{r}$：位置ベクトル、$t$：時間変数）となる。（束縛運動の一般化された力学系＝ホロノーム系↔非ホロノーム系）■運動の決定と解軌道：簡単のため方程式は非束縛の場合とする（束縛の場合も同様)。x,y,z：空間に固定された座標系に関する座標($\boldsymbol{r}$ の成分)、X,Y,Z：同じ座標系に関する力 $\boldsymbol{F}$の成分⇒質点の方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z\qquad (*)$$

X,Y,Zは、$x,y,z,dx/dt,dy/dt,dz/dt,t$ の関数であるから、微分方程式（＊）を積分⇒解軌道：$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$（質点が表す空間内の一つの曲線（軌跡））（＊'）
x,y,z に含まれる６個の積分定数は、ある時刻における x,y,zの位置とそこでの速度（それぞれを初期値、これら全体を解の決定条件としての初期条件と呼ぶ）によって決定する。

(i) 自由運動

自由運動の中で最も基本的なものの一つである「真空中（または空気の存在を無視した場合）の一様な重力場における質点の運動」(a) に基づいて、「質点が空気中を速度の２乗に比例する抵抗を受けながら一様な重力場内での運動」(b) の決定を、Euler の考察によって見てみよう。最初に運動 (a) を簡潔に述べておく。

鉛直上方に z 軸をとり、重力は鉛直下方に大きさ mg（g：重力の加速度≒980cm/sec^2）から、$X=0,Y=0,Z=-mg$。方程式（＊）に代入、積分することによって、６個の積分定数を含む解軌道成分 x,y,zを得るが、初期条件：時刻 $t=0$のとき、質点が原点から x 軸と角 α の傾きで初速度 v_0で投げ上げられたとする⇒ 質点の運動は、解軌道：$x=(v_0\cos\alpha)t,\quad y=0,\quad z=-(g/2)t^2+(v_0\sin\alpha)t$　を描く。

tを消去すれば、解は $x=v_0{}^2\sin 2\alpha/2g$ を軸とする放物線である：

$$z=(\tan\alpha)x-\frac{g}{2v_0{}^2\cos^2\alpha}x^2$$

注意１：重力の加速度は、Galilei が１５８９年頃から１６０４年までに落体の法則（物体の自由落下の距離は時間の２乗に比例し、そのときの速度は時間に比例する）を実験的に発見確立した中で、その存在が確認された。記号 g は Johann Bernoulli によって初めて用いられた。

注意２：原点から質点が x 軸上に落下する位置までの最大距離は、原点からこの放物線の軸までの最大距離の２倍（または $z=0$ から得られる原点と異なる x 軸上の位置までの最大距離）であるから、$\alpha=45°$ のとき最大値をとることに注意する。

場合（b）も（a）の場合と同様に $X=-mkv^2\cos\varphi, Y=0, Z=-mkv^2\sin\varphi-mg$

（φ：速度 v が x 軸となす角）から、$dx/dt=v_x, dz/dt=v_z$ を用いると、

運動方程式は、$dv_x/dt=-kv^2\cos\varphi,\quad dv_z/dt=-kv^2\sin\varphi-g$（$k>0$）. これらは、非線形の微分方程式であるから簡単に積分できない。ここでは、Euler にしたがって求めてみる。

最初の方程式において、$v\cos\varphi=v_x$，$v=ds/dt(s$ ：r の軌跡$)$とおけば、$\dfrac{dv_x}{dt}=-k\dfrac{ds}{dt}v_x$. 初期条件：$t=0$ のとき、$v=v_0, s=0, \varphi=\alpha$ の下でこれを積分すれば、

$$v_x=v_0\cos\alpha\cdot e^{-ks}\qquad(1)$$

２番目の方程式において、$p=dz/dx=\tan\varphi, v_z=pv_x$ として、最初の方程式に $p=\tan\varphi$ を乗じて、２番目の方程式から引けば、

$$v_x dp/dt=-g\qquad(2)$$

$$dp/dt=(dp/ds)v=(dp/ds)v_x\sqrt{1+p^2}$$

よって、$\sqrt{1+p^2}(dp/ds)=v_x^{-1}(dp/dt)=v_x^{-1}(-g/v_x)=.-(g/v_0^2\cos^2\alpha)e^{2ks}$. これを

積分、ここで $2\int\sqrt{1+p^2}dp=p\sqrt{1+p^2}+\log(p+\sqrt{1+p^2})\equiv\Phi(p)$ を用いれば、

$$\Phi(p)-\Phi(p_0)=g(1-e^{2ks})/kv_0^2\cos^2\alpha\qquad(3)$$

また、$\Psi(p)\equiv g/kv_0^2\cos^2\alpha+\Phi(p_0)-\Phi(p)$ を用いれば、（１）、（２）、（３）から

$dp/dt=-g/v_x=(-g/v_0\cos\alpha)e^{ks}=-\sqrt{gk\Psi(p)}$. よって $t=\dfrac{1}{\sqrt{gk}}\displaystyle\int_p^{p_0}\dfrac{dp}{\sqrt{\Psi(p)}}$.

他に、x と p, z と p の関係は次式で与えられる：

$$x = \frac{1}{k}\int_{p}^{p_0} \frac{dp}{\Psi(p)}, \qquad z = \frac{1}{k}\int_{p}^{p_0} \frac{pdp}{\Psi(p)}.$$

この他にも一般に動力 $\boldsymbol{F}$ として、万有引力、弾性力、電磁場による力、流体の抵抗力、ポテンシャルをもつ保存力などが考えられるが、省略する。

(ii) 束縛運動

曲線や曲面上の質点の束縛運動は方程式の積分とその表示がさらに複雑になってくる。ここでは、'力学' 第 II 巻で中心的に扱われた二つの議論：「曲線上の運動－単振子－」(a) は基本的であるから最初にやや詳しく説明、次に「曲面上の運動」(b) を、簡単に触れておく。後者の場合の理解には、微分幾何学と楕円関数に関するかなり多くの準備を必要とするからである。

場合 (a) は、質量を無視できる、たとえば長さ l の糸の一端を固定して他端に質量 m の質点を付けて鉛直面内で運動させる振り子の運動である。ここで、θ：糸の鉛直線に対して一定の向きに測った傾角、$s = l\theta$：最下点から同じ向きに測った円弧の長さ。よって $\dot{s}$（s の時間微分）$= v$（質点の運動速度）$= l\dot{\theta}$。軌跡は円周であるから、運動方程式はこの曲線の接線と主法線の方向に分解して考えると解きやすい。$\ddot{\theta}$：$\dot{\theta}$ の時間微分、R：主法線方向の束縛力（抗力）として、運動方程式：

接線方向に　$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$,　主法線方向に　$ml\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R$.　（1）

を得る。方程式（1）の最初の式に $\dot{\theta}$ を乗じて積分⇒エネルギーの積分：

$\dot{\theta}^2 = 2E + 2(g/l)\cos\theta$, E：全エネルギー, $U(\theta) = -(g/l)\cos\theta$：位置エネルギー

を得る。位置エネルギーのグラフにおいて、$-g/l < E < g/l$ のとき、$\cos\alpha = -El/g$ とすれば、質点は $-\alpha < \theta < \alpha$ の範囲で往復運動（振子振動）を行う。$E > g/l$ のとき、θ は一方向に増し、振子は回転運動を、$E = g/l$ のときは、$U(\theta)$ が極大となる点 $\pm\pi$ で $U = E$ となって、特殊な運動を行う。ここでは、振子振動の場合だけ触れておこう：

$\dot{\theta} = 0$（振幅最大）となる角を $\theta = \alpha$ とすれば、エネルギーの積分式から、

$\dot{\theta}^2 = 4(g/l)\left(\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)\right)$. よって、$t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)}}$.

ここで、$\sin(\theta/2) = \sin(\alpha/2)\sin\varphi = k\sin\varphi, k = \sin(\alpha/2) < 1$ として、

$$t = 0 \text{ で } \varphi = 0, \dot{\varphi} > 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.. \qquad (2)$$

式（2）は、振子の質点が最下点の位置から傾角が $\theta = 2\sin^{-1}(k\sin\varphi)$ である位置にくるまでに要した時間（周期）である。一往復の周期 T は θ が 0 から α までに要

する時間の４倍、よって式（２）において、$\varphi=\pi/2$ とした定積分の値である。

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \qquad (3)$$

また、束縛力 R は、$\dot{\theta}^2=(2g/l)(\cos\theta-\cos\alpha)$ を（１）の２番目の方程式に代入して得られる。

注意１：式（２）の中の積分$=w(z)=F(k,z), z=\sin\varphi$ は**第１種不完全楕円積分**、式（３）の中の積分$=K(k)=F(k,\pi/2)$ は**第１種完全楕円積分**と呼ばれる。一般に楕円積分と**楕円関数**とは互いに他の逆関数である。たとえば、ここの例では、$z=\mathrm{sn}\,w$ と書かれたものは楕円積分の逆関数としての楕円関数であることの記法である。楕円関数論によれば、$\varphi=\mathrm{am}\,w$, $\sin\varphi=\mathrm{sinam}\,w=\mathrm{sn}\,w$ でもあるから、式（２）は $\varphi=\mathrm{am}\,(\sqrt{g/l})t$，また $\sin(\theta/2)=k\sin\varphi=k\,\mathrm{sn}(\sqrt{g/l})t$ と書かれる。束縛曲面が球面である振子（球面振子）の運動では、θ と z との関係が**第３種楕円積分**で与えられる。また、楕円関数が解析学の基本的関数であることが理解されるまで、非常に多くの楕円積分の重要な性質が Euler と Legendre によって発見されていた。

注意２：微小振動の場合は、方程式（１）の右辺の $\sin\theta\cong\theta$ として容易に得られる解の周期$=2\pi\sqrt{l/g}$. これは、周期の式（３）に含まれた積分を、α が小さいとき $k\cong\alpha/2$ として、k について展開した式：$K(k)=(\pi/2)(1+k^2/4+\cdots)$ を用いて、$T=4\sqrt{l/g}K(\alpha/2)=2\pi\times\sqrt{l/g}(1+\alpha^2/16+\cdots)$ とした場合の $\alpha^2/16$ 以下の項を省略したものに一致することがわかる。

場合（b）は、滑らかな曲面上を自由に移動する質点の運動問題の解を与えている。質点に作用する外力（たとえば重力など）の直交軸に平行な成分、質点の位置座標、速度、軌跡の弧長、曲率半径、弧の主法線と曲面上の法線のなす角、曲面の接平面内にあって弧に垂直な直線の方向余弦などの幾何学的設定を用意する。次に質点の加速度成分は、弧の接線に沿うもの（A）と主法線に沿うもの（B）とがある。

以上の状況下で、質点に作用する加速度（A）と（B）に対する運動の方程式、および曲面の方程式が与えられていれば、運動が決定される。たとえば、外力 F が保存的（$F=-\mathrm{grad}\,V$, V: 位置エネルギー）であれば、加速度（A）に対する方程式は直ちに積分され、その結果、加速度（B）に対する方程式は２階の微分方程式に帰着される。しかし、これらの方程式は一般に求積法では解かれないが、他との関係において得られた結果を用いれば、問題が定式化されて解かれる二つの場合がある。それぞれは、(i) 外力の作用がない運動 (ii) 可展面上の運動の場合である。

これらは微分方程式と力学に限られる問題として処理されることは困難である。

場合 (i) は外力の非存在から弧の主法線と曲面の法線のなす角が0となって、**Euler** の定理：'解軌道は曲面上の測地線である' を得る。このとき、積分のエネルギーは、測地線が定常速度によって述べられることをを示してくれる。

応用例の一つ：中心線が z 軸である滑らかな線織面（空間内の曲面で、それが直線運動の軌跡となっている曲面で、直線を母線として形作られている）上に外力の作用下にない質点があって、点 z で母線の方向余弦が与えられているとき、質点の運動を決定せよ。

この問題の解決には、方向余弦に含まれる v（質点の位置を定める座標）の時間微分を変数とするエネルギーの積分 u を変数とした楕円関数 $\wp$ (u) を用いて v を表す。これらの手続きはかなり複雑であるが、u と時間 t の関係、したがって v と t の関係が明らかとなる。

次に (ii) の場合は、線織面の接平面がその母線に沿って一定であるとき、その線織面は平面上に展開可能である場合の曲面を意味するが、このような曲面に対しては、**定理**：'曲面が可展面であれば、弧長とある量（弧の主法線と曲面の法線のなす角の正弦値/軌跡の曲率半径）は平面上でも不変である' を用いて質点の運動が決定される。その際、曲面上の運動は平面上のそれに帰着され、どんな外力の作用が存在してもよい。２，３の例があるが省略する。

注意：曲面上の運動の研究を最初に行ったのは Galilei で、彼は傾斜面上の質点の運動についてであった (1638)。また、球面上の水平な円領域内を動く質点の運動は C. Huygens によって研究された (1673)。Euler は、これら Galile や Huygens の仕事をここでも受け継いだことになる。

２． 剛体の運動

Euler の力学は質点のそれにとどまることなく、その解析的手法を、解析力学の基礎の一つ：最小作用の原理 (1744)、流体の運動方程式 (1755)、そして剛体の運動方程式 (1765,-76) の確立に向けて適用していく。今日では力学の体系上、これらの叙述順序を、最初に剛体の運動、次に最小作用の原理、最後に流体の運動とする方が説明しやすいが、II 部との関係で、この順序の最小作用の原理と流体の運動を入れ替えて、結局、最初の時間的順序を逆転して述べることを予め断っておく。

剛体に関する Euler の主要な仕事は、先の '力学' 次いで、'第二の力学' ともいわれる彼の書（*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, 1765）において、剛体の回転運動を中心に議論されている。その主なものは、剛体の回転運動の方程式とその応用問題の一つとしてのこま (top,独楽) の運動であり、後者の問題は普遍的な前者の確立のための動機でもあったといわれる。更にこまの運動のきっかけとなったものがあるが、後の注意で触れておく。

また、剛体の回転運動に付随するオイラーの角は、彼の剛体に関する研究では最も遅く１７７６年に発表されている (Novi Comment, Petrop, xx, p. 189) が、ここでは彼の運動方程式の応用上、これを最初に述べることにして、後でこれを一般

化座標の特例とみて解析力学で再び触れることにしたい。参考文献は1に同じ。

基本事項. ■剛体：任意の２点間の距離が不変な物体、または任意の部分の形状が不変な物体 剛体の運動：固定点と固定軸からのベクトルの変位が回転と並進（平行移動）からなる ■慣性テンソル：剛体に固定した直交座標を (x,y,z)、剛体の微小体積の質量を dm（x,y,z の関数）として、剛体全体にわたる３重積分：

$$A_{11}=\int(y^2+z^2)dm, A_{22}=\int(z^2+x^2)dm, A_{33}=\int(x^2+y^2)dm, A_{23}=A_{32}=-\int yzdm,$$

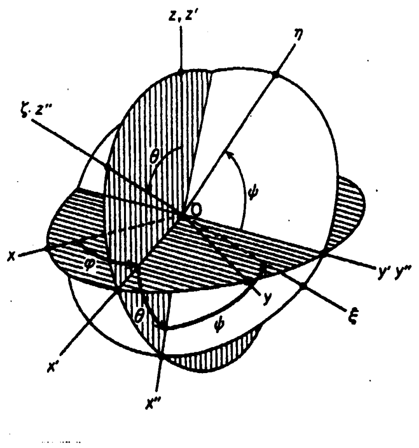
$A_{31}=A_{13}=-\int zxdm, A_{13}=A_{31}=-\int xydm$ は座標軸の回転に関して２階の対称テンソルをなすこれらの全体（A_{ij}）（$i,j=1,2,3$）■慣性楕円体：直交座標における２次曲面の係数を慣性テンソルの成分を用いて表したもの：$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{23}yz+2A_{31}zx+2A_{12}xy=1$（＊）。この曲面の主軸 ξ,η,ς を座標系とすれば、（＊）は $A\xi^2+B\eta^2+C\varsigma^2=1$。この場合、$A_{11}=A, A_{22}=B, A_{33}=C, A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3,\ i\neq j)$ となり、A,B,C をテンソルの‘主値’、この楕円体の主軸を‘慣性主軸’、慣性テンソルに対して A,B,C は‘主慣性モーメント（能率）’という。■モーメント：座標上の一点にあるベクトル量 $\boldsymbol{V}$ と座標の原点からこの点までの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ とのベクトル積 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}$ を原点の周りの $\boldsymbol{V}$ のモーメント、$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}$（外力）であれば、’外力のモーメント’、$\boldsymbol{V}=m\boldsymbol{v}$（運動量）であれば、運動量のモーメントを‘角運動量’という。■回転の角速度：回転軸の周りを剛体が Δt の時間内に $\Delta\theta$ 回転するとき、$\Delta\theta/\Delta t\to\omega(\Delta t\to 0)$ の絶対値を大きさとして、回転が軸に沿って右ねじの向きである場合を正、逆の場合を負とするベクトル ■こま：固定点（支点）の周りを回転する剛体、固定点でなくても重心の周りを回転する剛体もこまとみなされる。

(i) オイラー（の）角

剛体が回転するとき、最初に基準とした空間の直交座標系における位置の変化に伴う、その方位を表すために用いられる３個の角 φ,θ,ϕ である。剛体に固定した直交座標系の軸 ξ,θ,ς に対応する空間に固定した直交座標系の軸 x,y,z は、剛体が回転する直前まで一致していたものとし、回転は各軸を基準にして考えることにする。最初に $z(\varsigma)$ 軸の周りに $y(\eta)$ 軸を φ だけ回転させ、次にこの回転による η 軸に代わる新しい軸 η' の周りに ς 軸を θ だけ回転させ、最後にこの回転による ς 軸に代わる新しい軸 ς' の周りに η' 軸を ϕ だけ回転させる。この回転による η' 軸に代わる新しい軸を η'' とする。これらの回転によって、$x(\xi)$ 軸は最初に軸 ξ' へ、次に ξ' 軸は軸 ξ'' へ、最後に ξ'' 軸は軸 ξ''' へ位置する。ここで改めて、$\xi'''\to\xi,\eta''\to\eta,\varsigma'\to\varsigma$ とするとき、座標 (ξ,η,ς) と (x,y,z) の間の変換は次式で与えられる：

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \varsigma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

$$a_{11}=\cos\phi\cos\varphi\cos\theta-\sin\phi\sin\varphi,$$
$$a_{12}=\cos\phi\sin\varphi\cos\theta+\sin\phi\cos\varphi,$$
$$a_{13}=-\cos\phi\sin\theta,$$
$$a_{21}=-\sin\phi\cos\varphi\cos\theta-\cos\phi\sin\varphi,$$
$$a_{22}=-\sin\phi\sin\varphi\cos\theta+\cos\phi\cos\varphi,$$
$$a_{23}=\sin\phi\sin\theta,$$
$$a_{31}=\cos\varphi\sin\theta, a_{32}=\sin\varphi\sin\theta, a_{33}=\cos\theta$$



オイラーの角

(ii) 回転運動の方程式

剛体に作用する力が与えられたとき、固定点がある場合の回転運動を決定する方程式は、剛体に働く外力 $\boldsymbol{F}$ のモーメント $\boldsymbol{N}=(N_1,N_2,N_3)$ と角運動量 $\boldsymbol{L}$ の間に成り立つ関係：$d\boldsymbol{L}/dt=\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}=\int \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{F}$ を剛体に固定した慣性主軸 ξ,η,ς に関して分解することによって得られる。これが **Euler の（回転運動の）方程式**である：

回転の角速度を $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ として、

$$A\frac{d\omega_1}{dt}-(B-C)\omega_2\omega_3=N_1, B\frac{d\omega_2}{dt}-(C-A)\omega_3\omega_1=N_2, C\frac{d\omega_3}{dt}-(A-B)\omega_1\omega_2=N_3 .$$

この方程式は、剛体の回転運動を決定する基礎となる重要な方程式である。

固定点をもたない剛体の運動は、重心の運動と重心の周りの回転運動に分解され、前者は質点の場合と同様の運動方程式により、後者は外力のモーメントと角運動量の関係式から Euler の方程式に帰着できる。また、固定軸をもつ剛体の運動（のその軸の不動性に関わる）抗力（束縛力）の決定にも Euler の方程式は有用である。いずれにせよ、彼の運動方程式は回転運動にとって決定的な役割を担っている。

これらの例は興味深いが、省略しよう（補・[1]、[7] に詳しい)。ここでは、Euler の定理の応用上、最も歴史的にも興味深い、彼の研究を発端とする‘こまの問題’(Mémoires de Berlin, Annee 1758) をとりあげる。

(iii) オイラーのこま

重心を通る慣性テンソルの主軸を ξ,η,ς、主慣性モーメントを A,B,C とすれば、こまと呼ばれるものには、**球こま**（$A=B=C$ の場合)、**対称こま**（主慣性モーメントのうちの二つだけが等しい場合)、**非対称こま**（主慣性モーメントがすべて異なる場合）の３種類がある。任意の初期条件に対して積分可能な場合は **Euler のこま**、**Lagrange のこま**（１７８８)、および **S. V. Kovalevskaya (Kowalevski) のこま**（１

８８８）だけである一方、種類別の可積分性の議論も一部可能である。Euler のこまを除いては、これらに関しては注意４において触れたい。

Euler のこまの場合は、外力が存在しないか、存在しても固定点に対する力のモーメントが零、すなわち $N=0$ の場合である。この場合の完全な紹介はかなり長大な説明を要するから、ここでは要点に触れるにとどめる：

Euler の方程式におけるモーメントの各成分を $N_i=0(i=1,2,3$：以下同じ）として、各方程式に ω_i を乗じて和をとり、時間についての積分を（a）、同様に $A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3$ を乗じて和をとり、時間についての積分を（b）とする。(a)、(b) それぞれは、一定で、(a) の一定値（＝運動エネルギーの２倍）＝c^2、(b) の一定値（＝角運動量の大きさの２乗）＝L^2であるから、

$$A\omega_1^{\,2}+B\omega_2^{\,2}+C\omega_3^{\,2}=c^2 \quad (1) \qquad A^2\omega_1^{\,2}+B^2\omega_2^{\,2}+C^2\omega_3^{\,2}=L^2 \quad (2).$$

$$\omega_1^{\,2}+\omega_2^{\,2}+\omega_3^{\,2}=\omega^2 \quad (3)$$

これらのに三つの式と Euler の運動方程式から回転の角速度の ξ,η,ς 方向の成分 ω_i を求めることになる。それは、Poinsot の定理（慣性楕円体が固定点を中心に回転運動しながら接触平面（不変面と呼ばれる）上を運動するとき、その運動を、楕円体上に描かれる（$\omega=cr($ r：固定点から回転のベクトルの楕円体を貫く点Ｐまでの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさ）によるＰの軌跡である）ポールホード（polhode）と呼ばれる曲線とこの曲線の不変面上への射影であるハーポールホード（herpolhode）曲線によって幾何学的に表現したもの）を合理的な解の構成のための判断の手がかりに用いることによって遂行される。

結果を略述すれば、各 $\omega_i^{\,2}$ を ω^2, A, B, C の他に α,β,γ を用いて表す。各ギリシャ文字は、A,B,C,c の他に $\lambda=L^2/c^2$ を用いて表される。そのとき、時間 t と ω^2 との関係：　$2\,(t-t_0)=\pm\int d\omega^2\Big/\sqrt{(\omega^2-\alpha)(\beta-\omega^2)(\omega^2-\gamma)}.$　を得る。次に、B と λ の大小関係（Poinsot の定理でいうポールホードの存在とその状況の確認）による三つの場合に分けて、各場合の ω^2 を、したがって $\omega_i^{\,2}$ を、よって最終的に解 ω_i を得る。たとえば、$\lambda>B$　の場合の結果を示しておこう：

$$2(t-t_0)=2\int_0^\theta d\theta\Big/\sqrt{\beta-\alpha-(\beta-\gamma)\sin^2\theta}=(2/\sqrt{\beta-\alpha})\int_0^\theta d\theta\Big/\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$$

$\omega^2=\beta-(\beta-\gamma)\sin^2\theta, k^2=(\beta-\gamma)/(\beta-\alpha)<1$．よって　$\theta=\mathrm{am}\left\{\sqrt{\beta-\alpha}(t-t_0)\right\}$、

したがって、また　$\omega^2=\beta-(\beta-\gamma)\mathrm{sn}^2\left\{\sqrt{\beta-\alpha}(t-t_0)\right\}$　で与えられる。一般に積分可能なこまの運動やミクロからマクロにおよぶ歳差運動（注意１）の解は楕円積分や楕円関数で表示されるのが普通である。

その他に、こまの運動の安定性に関する問題も種々議論が可能であるが省略する。

注意１：こまの研究のきっかけは、Eulerにとって太陽と月の影響（起潮力）による地球の**歳差運動**（地軸を対称な回転軸とする首振り運動で、中心軸（鉛直軸）を角運動量とする一定の角速度をもった運動の非周期的部分を指す。（周期的部分の運動は章動と呼ばれる振幅の小さい運動（微小振動）である。））を理解することにあった。なお、地球の歳差運動はGalileiやKeplerの頃から知られていたが、周期を１８.６年とする章動の発見はJ. Bradley(イギリスの天文学者)による（1745)。この言葉は、古代中国の暦法で１９年を１章と呼んだことに由来する。

. **注意２**：Euler のこまの運動は、ここでは時間と角速度の関係で解かれたが、Lagrange やKovalevskayaのこま（項目Ｂ参照）の運動の場合と同様に、時間とEulerの角の関係でも厳密に解かれる。Eulerのこまの時間－角速度の解はほとんどEuler自身の解法にしたがっているが、後者（時間－Eulerの角）の場合のEulerのこまの解は、A. S. Ruebによって初めて楕円関数が適用され（1834)、その後,C. G. J. Jacobiによって完成された（Journal für Math. xxxix, p. 298, 1849)。それは、角速度 $\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{\phi}$ を含む１階の非線形の微分方程式の解構成であり、楕円 ϑ 関数が主要な役割を演じている（[７]と[８]）。なお、数理物理学の非線形（偏）微分方程式の可積分性に関する基本的問題については、たとえば補・[２]、補・[３]がある。

注意３：Poinsotの定理は彼の１８３４年の論文（Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris）に現れたから、Euler はもちろん知らなかったことになる。だから彼の解法はその当時ここに示されたよりはやや厳密さに欠けた素朴な結果であったと言わざるを得ないであろう。

注意４：Lagrange, Kovalevskayaのこま：運動の決定はオイラーの角と時間の関係によって、たとえば、対称こまの運動は、時間 t と角 θ の関係を第一種楕円積分または楕円関数 sn によって、また θ と角 φ の関係を第三種楕円積分で表すことができるが、固定点のない（たとえば滑らかな水平面上の）対称こまの運動は時間 t と角 θ の関係が超楕円積分（x と y の関係が $y^2=f(x)$，f の次数 ≥ 5 である有理関数の変数 x に関する積分）の形で与えられる。また、球こまの場合は時間と角との関係は $\wp$ 関数を用いて表される。この関数は Weierstrass による楕円関数であるから、Eulerの死後１世紀以上もたってから見出された解である。

３． 流体の運動

力学の対象が質点や剛体から流体に変わっても、先のものと同様に流体の静力学と動力学が考えられる。前者は、Archimedes の原理（B.C. 250 頃）に始まり、Leonardo da Vinci、Galilei たちを経て、Newton による過去の実験的成果の集大成とともに、後者に関しても流体に働く抵抗を慣性抵抗と粘性抵抗に分解することによって運動の実体の解明に向けられた。１８世紀に入ると、流体独自の圧力概念の導入に基づいた組織的な研究が進められ、非圧縮性流体に関する（D.）Bernoulli の定理（１７３８）、および Euler の運動方程式（１７５５）が確立されたことは大きいが、いずれも非粘性（または完全ともいう）流体に対するものであった。その後により実在的な流体の理論に向けての開発研究が展開されていく。

Euler の偏微分方程式は理想的な流体にとって完璧なまでの運動方程式であり、粘性流体の場合との解の性質の比較やその近似解等、多くの数学者、数理物理学者を今日まで魅了し続けてきたといえよう（補・[４]、補・[５]）。

基本事項. ■流体：運動状態時における液体と気体の総称。ずれ変形に対して復元力が働かないが、復元力が働くものが弾性体、両者を合わせて連続体と呼ぶ。（非）粘性流体：ずれ変形による接線応力の現れる流体を粘性流体、そうでない流体を非粘性（または完全）流体と呼ぶ（ヘリウムだけが完全流体）。他に流体と呼ばれるものには、やや抽象的なものから実際的なものに至るまで種々ある。■レイノルズ（Reynolds）数：Re で示される流体力学における最も代表的な無次元量の一つ。流体密度を ρ、流れの速さを U、流れの中の物体の代表的長さを l、粘性率を μ（$\mu/\rho=\nu$：動粘性率）として、$Re=\rho Ul/\mu=Ul/\nu$ で定義されるが、粘性率の単位は単位系によって異なる。■grad と div: ∇ を Hamilton（勾配）演算子⇒grad$\equiv\nabla$, div$\equiv\nabla\cdot$（・はベクトルの内積）として、それぞれスカラー場、ベクトル場に作用。

（i）連続の方程式

流体の質量保存則を表す。Euler の連続方程式とも呼ばれ、１７５０年代初期の流体力学のいくつかの論文中に見出されるといわれる。流速を $\boldsymbol{v}$ として、

$$\partial\rho/\partial t+\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v})=0.$$

非圧縮性流体では、$\rho=$一定から連続の方程式は単に　$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$　である。

本方程式は、S を流体内の任意の静止閉曲面、$\boldsymbol{n}$ を S の外向き単位法線ベクトル、V を S で囲まれた流体内部の領域として次式から得られる：

$$(d/dt)\int_V \rho dV=-\int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=\text{（Gauss の定理から）}-\int_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})dV$$

（最初の等式は、V 内の流体の質量の時間的変化は、流体の単位時間当たりの S からの V 内への流入量に相当することを意味する）。ここで最左辺の微分は、積分記号下では、$\partial/\partial t$ であることに注意する。（また、$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=\mathrm{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v}+\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ の右辺からも、$\rho=$一定 ⇒ $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$ が確かめられる。）

（ii）完全流体の運動方程式

Euler の運動方程式ともいわれるこの方程式は、非粘性流体の運動を支配する、ニュートンの第二法則にも当たる重要な方程式である。

これまでの密度ρ,速度 v に圧力pと単位質量当たりの外力 Fを加えて、これらは時刻t、位置(x,y,z)におけるものとする。このとき、Euler の運動方程式は次の形で与えられる：

$$\partial v/\partial t + v\cdot \mathrm{grad}\, v = -(1/\rho)\mathrm{grad}\, p + F.$$

ここで、$D/Dt = \partial/\partial t + v\cdot \mathrm{grad}$（Lagrange 微分：（$x,y,z;t$）における流体部分の物理量の時間的変化を表す）を用いて、左辺はDv/Dt（流体の加速度）と書かれる場合もある。方程式の解を得るためには、先の連続の方程式の他に、断熱の方程式および初期値や境界値等に関する、条件が付け加わる。今もなお大変難しい問題につながる。

この方程式では、まったく粘性が考慮されていないから、レイノルズ数が大きい（粘性が小さい、例：水、空気）流れに対してそのおおよその近似を与えてくれる一方で、実際に生じる問題（抵抗、渦の発生・消滅機構等）の解決のためには、粘性、その他の物理学的条件の考慮を必要とする。

注意：実在流体の場合は少なくとも粘性を考慮するが、これは Euler の方程式の修正に相当し、たとえば、非圧縮性流体では、彼の方程式の右辺に$\nu\Delta v$（粘性項、Δはラプラス演算子）のみを加えればよい。このような粘性項を含む運動方程式を**ナヴィエーストークス**（Navier−Stokes）**の方程式**と呼ぶ。この方程式の含む問題は今日ますます重要となっている。

II 変分法

変分法：独立変数とその関数（ある条件を満たす）を未知関数として、その導関数も一般に含む関数の定積分で与えられた汎関数の値が、未知関数の微小変化に関して停留値（極値を特別な値とする）をとるように未知関数を決定する問題とその方法を議論する数学の一分野である。

微積分法とほとんど同時に研究が進み、Bernoulli 兄弟の影響もあって Euler はこの方面に関する著書（１７４４）以前に最初の定式化を試みている（１７３２−３８）が、特に多くの基本例と応用はその当時として顕著な成果であるとともに、後に Lagrange の寄与と合わせて、この方面の近代的な方法の源となった。

１． Euler の微分方程式

P. De Maupertui による光の運動量に対する形而上学的な最小作用の原理の試み（Mém.de l' Acad., 1744, p. 417）とは別に、Euler は中心力場の１個の質点に対して、この原理を確立した（*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietate gaudentes,* 1744)。それは変分法の問題を、いわゆる Euler の微分方程式に帰着させることであり、彼のこの著‘発見法’には方程式の例とともに、これらの応用例が述べられているが、特に極小曲面に関する発見的知見は彼の方程式

とともに変分法の初期における重要な貢献というべきである。‘発見法’は後に一般化され解析力学への応用となって再論される。項目 A に共通の文献は、‘力学’の冒頭に挙げたものの他に、補足文献中の［６］－［８］が読みやすい。

基本事項. ■変関数：以下で定義される汎関数中の未知関数 ■変分法の基本補題：それぞれがある条件を満たす二つの関数があって、これらの積の定積分が０であれば、そのうちの一方が恒等的に０でなければならないことを示す ■等周問題：平面上に与えられた長さの閉曲線によって囲まれた面積の最大なものを求める問題 ■Plateau 問題：空間内において与えられた閉曲線によって囲まれた曲面の面積が最小となるものを求める問題（１９世紀後半に生まれた問題であるが、その問題はすでに Euler たちの時代から存在した。ここでは便宜上この言葉を用いる。）

Euler 自身によって取り上げられた変分問題は、変関数 $y(x)$ に対する境界条件：$y(a_0)=b_0, y(a_1)=b_1$ の下に汎関数 $J[y(x)]=\int_{a_0}^{a_1} f(x,y(x),y'(x))dx$ （y'：y の導関数）を極値とする関数 $y(x)$ を求めることであり、そのための微分方程式の提示であった。彼のその証明の不完全さに対する Lagrange による改良（1755）によれば、$\eta(x)$：両端点で０となる任意の１回連続微分可能な関数を用いて、$y(x)$ が上記の汎関数の最小値を与える関数とすれば、$Y(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$ は $y(x)$ と同じ境界条件を満たすから、$J[Y]=\int_{a_0}^{a_1} f(x,Y,Y')dx$ （Y'：Y の導関数）は $\varepsilon=0$ のときに極値をとらねばならない。よって、$[dJ[y+\varepsilon\eta]/d\varepsilon]_{\varepsilon=0}=0$ から $\int_{a_0}^{a_1}[f_y\eta+f_{y'}\eta'(x)]dx=$ （［・］内の第二項の部分積分と $\eta(x)$ の境界条件によって）$\int_{a_0}^{a_1}[f_y-df_{y'}/dx]\eta(x)dx=0$ を得る。変分法の基本補題から、［・］内の式＝0、すなわち

$$f_y-df_{y'}/dx=f_y-f_{y'x}-f_{y'y}y'-f_{y'y'}y''=0 \qquad (1)$$

方程式（１）は変分法の最初期に Euler によって得られ、Lagrange によって証明が完成した一変数の場合の Euler の微分方程式である。

また $z=z(x,y)$ を変関数とする２重積分によって定義された汎関数の変分問題は、$J[z]=\iint_D f(x,y,z(x,y),z_x,z_y)\,dxdy$ （z_x,z_y：x,y による偏導関数, D：(x,y) 平面上の滑らかな閉曲線で囲まれた領域）が極値をとるとき、一変数の場合と同様に考えて、関数 $z(x,y)$ を求める次の Euler（－Lagrange）の偏微分方程式に帰着する：

$$f_z-f_{z_x x}-f_{z_y y}=0 \qquad (2)$$

（第２，３項は、それぞれ z_x,z_y で、さらにそれぞれを x,y で偏微分したもの）。

方程式（１）と（２）は変分法とその関連問題において基本的に重要である。し

かし、これらの方程式は汎関数が極値をとるための必要条件であるが、一般に十分条件ではないから、そのとき汎関数は極値とは限らない。これを**停留値**と呼び、そのときの変関数を**極性**（または**停留**）**関数**と呼ぶ（正確には第１変分と呼ばれる量 δJ で定義される）。以下、Euler の微分方程式の応用として、彼が扱った中の最も基本的かつ重要なものから２，３の例をここに留めておく。なお、汎関数が単一積分の場合に重要な等周問題は Euler も扱ったとされるが、これらは Lagrange を待って以後本格化していったものであり、Euler 自身による問題の定式化と応用例はかなり未開発であったと想像される。ここでは、むしろ汎関数が２重積分の場合の Plateau 問題の Euler による結果（極小曲面）を取り上げる。

（i）**停留曲線**：(a) 懸垂線（catenary）(b) サイクロイド（cycloid）

停留関数が１変数の場合とする。微分方程式（１）は常に簡単に解けるとは限らない。$f = f(y, y')$（xを含まない）のときは比較的容易に解ける：

$f - y'f_{y'} = c$（定数）（$d(f - y'f_{y'})/dx = y'\left[f_y - (f_{y'})'\right] = 0$　（方程式（１）から））。

上式の左辺は y, y' の関数、よって $y' = F(y, c)$ ($\neq 0$ と仮定）と表せば、これから

$$\int dy/F(y,c) = x - d \quad (d：定数) \quad (3)$$

式（３）を得るための一つの汎関数を次のものとする：

$$J[y] = \int_{a_0}^{a_1} y^l \sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad (y > 0, l：定数) \quad (4)$$

(a) の場合の汎関数（４）は、$l = 1$　に対応。このとき　$y' = \sqrt{(y/c)^2 - 1} = F(y, c)$

から、（３）を積分して　$y = c(e^{(x-k)/c} + e^{-(x-k)/c})/2$　(k：定数)：**懸垂線**

この曲線は停留曲線であるが、停留値の最小性を示すことは停留曲線の存在問題とともにそれほど容易なことではない。

(b) の場合の汎関数（４）は、$l = -1/2$ であり、$y' = \sqrt{(c/y) - 1} = F(y, c)$。よって、積分（３）から　$x = c(t - \sin t)/2 + k$,　$y = c(1 - \cos t)/2$：**サイクロイド**を得る。サイクロイドは停留値を最小にする停留曲線であることが知られている。

注意１：懸垂線の場合の積分は、$y = c\sec t$、サイクロイドの場合のそれは、$y = c\sin^2(t/2)$ と置換する。汎関数が（４）の形の停留曲線ではこの他に、$l = -1, 1/2$ に対応して、中心が x 軸上にある円、および放物線がある。

注意２：懸垂線は、均質のケーブルを２つの支柱の間に張るとき、重力の作用で垂れるケーブルの形状を指して呼んだものである。また、サイクロイドは質点の力学的運動に関係して、**等時曲線**（tautochrone）とも、**最短降下線**（brachistochrone）とも、あるいは**最速降下線**（line of swiftest descent）とも呼ばれる。

（ii）**極小曲面**：（a）懸垂面（catenoid）（b）常螺旋面（right helicoid）

次に停留関数が２変数の場合である２重積分の問題では、Euler にとって実際に取り組んだものは、Plateau の問題,すなわち極小曲面を求めることであった。それは、拡張された Euler の微分方程式（２）の応用を意味するものである。

特に、$f=\sqrt{1+p^2+q^2}$　（$p=z_x, q=z_y$）の場合、方程式（２）から

$$\partial(p/\sqrt{1+p^2+q^2})/\partial x+\partial(q/\sqrt{1+p^2+q^2})/\partial y=0.$$

すなわち、　$(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x^2)z_{yy}=0$　（５）　を得る。

この方程式を満たす曲面の一つが**懸垂面**（懸垂線を母線とする水平軸の周りの回転面）であり、他の一つが**常螺旋面**（平面曲線Cが直線lの方向へ一定の角速度でlの周りを回転しながら進むときにCが描く曲面が螺旋面、特にCがlに垂直なときの螺旋面）である。

注意：懸垂面は極小曲面であり、極小曲面となる回転面は懸垂面か平面である。また、曲面が常螺旋面であることと、極小曲面かつ線織曲面であることとは同値であること等が知られている（補・［９］、補・［１０］）。

２． Euler の原理

この原理はまた別名「**最小作用の原理**」ともよくいわれる、運動法則を変分原理の形式で表したものである。この仕事を触発したものは、Lagrange による質点系に対して**ラグランジアン**（Lagrangian）（＝ラグランジュ関数または運動ポテンシャル）を用いた運動方程式に関する仕事（Miscell. Taurin. II (1760-61), Oeuvres, I, p. 365）であった。Euler は以前の‘方法’の一般化を、Lagrange のより解析的で近代的な手法にしたがって提示した（*Elementa calculi variationum*, 1760, 66)。ここに初めて「変分法（または学）」の言葉が現れた。

基本事項：■一般化座標（広義座標）：力学系の運動を一義的に表すのに十分なだけの独立な変数$q_r(r=1,\cdots,n)$をいう（例：質点の運動軌跡⇒直角座標、中心力場の運動⇒極座標、長さ一定の単振子⇒傾角、剛体の運動⇒重心の位置を示す３個の座標とその周りの方位を示す３個の角（オイラーの角）■一般化座標の数n：ホロノーム系⇒n＝系の自由度f、非ホロノーム系⇒$n>f$。

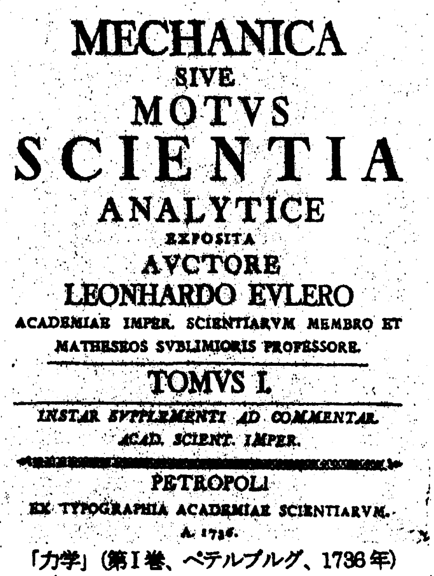
質点系における一般化座標をq_r,時間微分を$\dot{q}_r\ (r=1,\cdots,n)$として、ラグランジアン$L=T-U$($T$：運動エネルギー、$U$：ポテンシャルエネルギー）が時間$t$を陽に含まないとして、この系のエネルギー$\sum_{r=1}^{n}\dot{q}_r(\partial L/\partial\dot{q}_r)-L$　の積分が存在すると仮定する。このとき、実際に起こる運動を含んで、時刻t_0, t_1において一致する仮想的

運動の軌跡の全体について積分 $I=\int_{t_0}^{t_1}(\sum_{r=1}^{n}\dot{q}_r(\partial L/\partial\dot{q}_r))dt$ を考えると、実際の運動において停留値（極小値）をとるという形、I の第一変分：$\delta I=0$ であるとすることを、Euler の原理と呼ぶ。また積分 I は**作用**（**量**）(action) と呼ばれる。

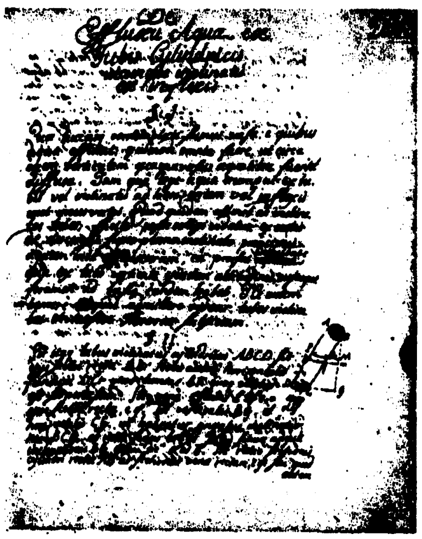
Euler は元々、変分法の仕事を行ったことではあったが、そのことが Lagrange の力学の仕事に結びつくことによって、変分法の力学への応用に至ったことになる。このことは、後に下記の注意にある Hamilton の原理を生んで **Lagrange の解析力学**の変分原理による合理化とともに、彼自身の創始によるもう一つの解析力学を確立した。このような経過を顧みるとき、「Euler は変分法を通して解析力学へ少なくとも間接的に貢献、または Maupertuis の最小作用の原理を初めて解析力学の特別な場合に対等な変分原理となし得た」と評価できる。このことからも、下記の Lagrange の方程式は、Euler－Lagrange **の方程式**と呼ばれるのも別に不自然ではないであろう。Euler の微分方程式で単に空間変数 x が時間変数 t に変わっただけであるからそのように呼ぶということも一理あるが、そこにはそれ以上の Euler による解析力学への変分学的影響が少なからずあると考えたい。

注意：Euler の定式化を経て後、W. R. Hamilton によって **Hamilton の原理**：δL（L の第一変分）$=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)dt=0$, L：ラグランジアン、が確立され（1835）、先のオイラーの方程式に対応する微分方程式が解析力学の基本方程式の一つ、**Lagrange の方程式**：$d(\partial L/\partial\dot{q}_r)/dt-\partial L/\partial q_r=0$，$q_r$：一般化座標、$\dot{q}_r$：$q_r$ の時間微分、（$r=1,\cdots,n$）である（1760-61 の先の論文で Lagrange はすでに提示済みであった）。これらは種々の場合に拡張される。

付　録


MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.
TOMVS I.
INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR. ACAD. SCIENT. IMPER.
PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

「力学」（第I巻、ペテルブルグ、1736年）の扉



最初の論文：「流体静力学」（ペテルブルグ、1727年）の最初のページ


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae Socio.
LAUSANNAE & GENEVAE,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

「発見法」（ローザンヌ&ジュネーブ,1744年）の扉

あ と が き

本論の最初の構成では、A. Eulerの仕事：力学（I部）と変分法（II部）における主要なもの、B. その後の発展：主要テーマと方法、に関するやや専門的な解説、C. 補足説明、とする予定であったが、項目Aだけでもかなりの紙数を要し、項目BとCは割愛せざるを得なかったから、ここで述べ得たものはほとんどがEulerの仕事に限られた。彼の力学と変分法における仕事が今日まで広範囲にわたる問題に如何に影響し続けているかを示したかったが、ほとんど不可能となった。せめて「まえおき」にあるEulerの業績リストの「力学」、「変分法」および「数理科学―応用数学」の項目中の（　）内に記載の学術の発展推移の大略と、本論中の注意事項を参考にして多少とも現代に至るまでの補いができれば誠に幸いである。そのためにも現代的視点から書かれた著書、［１１］と［１２］を補足しておきたい。

今回の研究集会「数学史の研究」（８月２１－２４日）では、Euler生誕３００年の記念講演会を２３日に集中的に挙行し、８名の講演者による意義深いテーマの熱心な講演は実に欣快な出来事であった。この特別企画の実現に多大なご尽力を戴いた本研究会代表・小林龍彦先生、副代表の高瀬正仁先生に深く感謝申し上げたい。特に筆者は個人的に種々ご配慮を賜り、この場を借りて両先生へ心から謝辞を申し上げる。末永く思い出深いワークショップであってくれることを願っている。

補　足　文　献

［１］山内恭彦、一般力学（増訂第３版）、岩波書店（1977）．

［２］K.Toda, Integrability Test for Nonlinear Differential Equations—Painlevé Analysis —, Hiyoshi Review of Natural Science, Keio University No.32, 1－32(2002).

［３］阿部剛久、非線形力学系の可積分性について— 概念の意味と系の拡大化に伴う可積分性の一般化に関する考察 —、数理解析研究所講究録　1368、京都大学、pp. 88－95 (2004)．

［４］ランダウ&リフシッツ（竹内均　訳）、流体力学、東京図書、１（1974），２（1975）．

［５］ A. J. Chorin & J. E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics (The 3rd ed.)，Springer（1993）．

［６］南雲道夫、変分学、朝倉書店（1951）．

［７］R. Courant & D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Interscience Publishers（1962）．

［８］吉田耕作・加藤敏夫、応用数学　I、裳華房（1964）．

［９］C. B. Morrey, Multiple Integrals in the calculus of variations,Springer（1966）．

［１０］小林昭七、曲線と曲面の微分幾何(改訂版)、裳華房（1997）．

［１１］R. Abraham & J. E. Marsden, Foundations of Mechanics(The 2nd ed.), Benjamin（1978）．

［１２］P. A. Griffiths, Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations, Birkhäuser（1983）．