数理解析研究所講究録
第1583巻 2008年 147-158

ヤーコプ・ベルヌーイの無限級数論

学習院高等科　林　知宏（Tomohiro HAYASHI）
Gakushuin Boys' High School

1　発表の主旨・意図

17世紀ヨーロッパは，数学上の貢献によって歴史に名をとどめる人物を多数輩出した．中でもニュートン，ライプニッツの二人は，ほぼ同時に無限小解析（微分積分学）を一つ上の段階へと進展させていった．これは時代を象徴する出来事である．

続く18世紀は，前世紀にくらべて比較的「穏やかな」時代だったように見なされることが多い．方法論的な革新よりも，成果の量的な拡大に向かったことが特徴とされる．当初の様々な混沌は次第に秩序づけられ，先人たちが開拓した土地から実り多い収穫を得た時期だったと考えられるからである．また直前の先人たちのように，数学上の伝統に依拠して自己の「正当性」を主張する必要もなくなったように見える．新たな領域であった無限小解析は立派に市民権を得ていったからである．

本論考は17世紀末から18世紀にかけて公刊されたヤーコプ・ベルヌーイ（1654–1705）の級数論に注目する．ベルヌーイは足かけ15年にわたって（1689年–1704年）5本の連作論文を書いた．それらの論文の中では，無限級数にかかわる全部で60個の命題が続き番号で記されている．以下で見るように，ベルヌーイの論文は伝統的な「総合的」スタイルによって記述されている．すなわち公理・公準を与えた上で，各命題が演繹的に証明されている．

その記述の方法から容易に想像できるように，ベルヌーイは彼以前の様々な人々による数学的貢献を規範化しようとしている．それはすでに述べたように開拓された数学的領域が，新たな収穫の土台となる様相を典型的に示している．したがってここでそのベルヌーイの級数論を取り上げることは，クーン流の概念「通常科学」の形成を追認するための例を提供することになるのかもしれない．ベルヌーイ論文は，特に彼自身のオリジナリティを示したものではない．したがってあらためて彼の論文を分析の対象にする必要がないと考えられがちである．

だが本論が主題的にベルヌーイ論文を取り上げる理由は，単に以上のことを確認したいがためだけではない．級数に対する数学的議論の組み方（たとえば，収束・発散に関する問題）をベルヌーイがどのように構成しているかを考察するならば，過去の数学史研究が与えた18世紀の数学全般に対する評価をいくぶん疑わしく感じるようになる．多少異なる理解が可能ではないか．蓄積されたノウ・ハウを整理するだけでなく，ベルヌーイの級数論は結果的に新たな数学的観点をも提示しているように見える．ベルヌーイの論考は，その意味で従来の数学史研究の中でもっと

取り上げられてしかるべきものだったろう．だがこうした観点からの先行研究は，フェッラーロを含めてわずかにあるばかりである．数学史研究の定説，すなわち「数学者たちは 18 世紀中に成果の量的拡大に励み，19 世紀になって初めて『解析学の厳密化』を開始した」はやはり疑義を投げかけられてしかるべきである．すでに 17 世紀末から 18 世紀初めにおいて，一定の反省の契機が与えられていた．ベルヌーイ論文は数学における通常科学化の事例を提供する以上の意味合いを持っているのである．本稿は紙幅の関係上，細部にわたる議論を行うことができない．[林 2005]，[林 2006] において詳細な分析を試みたので，そちらをあわせて参照していただきたい．

2 ベルヌーイ 5 連作論文の特徴

ヤーコプ・ベルヌーイ 5 論文の特徴を簡単に紹介する．なお本稿の後半には，これら 5 論文の概要をつけたので，適宜そちらを参照していただきたい．五つの論文は大きく二つのグループに別れる．第 1 グループは第 1 論文から第 3 論文の前半（命題 40）まで．第 2 グループは，第 3 論文後半から第 5 論文にかけてである．

2.1 第 1 グループについて

この第 1 グループの内容に関する特徴は次の通りである．

1) 求積問題と離れた無限級数の一般論を提示．

2) ベルヌーイ以前に既知であった事項に（例えば，調和級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$）体系的な証明を与える．

ここで 1）における一般論とは，個別の曲線にかかわる求積問題の解決と一線を画し，基本技法としての無限級数に対する議論を展開することを意味する．同時に 2）でいう体系的であることも要請される．すなわちギリシア以来伝統的な記述スタイルである総合的，演繹的論証を組み立てることである．ただしベルヌーイは，あくまでも少数の公理を前提にしつつ，数学的な整合性を獲得しようとする．したがって 1690 年代に生じた無限小解析の原理的部分に対する論争（「無限小」というものをどのように理解するか）に係わるような箇所はきわめて簡潔にすり抜けている．したがって数学外から借りてきたような，例えば形而上学的な議論は挿入されない．現代のわれわれからするとごく当たり前のことのように見えるが，これは同時代における一つの個性的態度である．

2）の一例として挙げた $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$ の証明は第 1 論文命題 16 で示される．また次の命題 17 では，ライプニッツが 1682 年論文中に結果のみ提示した成果に対する証明を与えている．したがってそこに至る過程は，その証明に必要な技法を確立することである．特に命題 15 は，後に「ベルヌーイの方法」として言及されるようになる点で重要である．技法に関して特徴を列挙すると次のようになろう．

- 項数が有限，無限であるかにかかわらず，また収束，発散の区別なく同様な代数的・形式的操作を行う．
- 特に無限級数における「和」とは何かを問題としない．
- 一定のア・プリオリな条件下で議論が成立することも意識．

特に3番目の特徴については注意を要する．ベルヌーイは命題15の方法を無限定に利用できないことを指摘しているからである．無論，この段階で無限級数に関する収束，発散に関する必要・十分な条件について一般的な議論が展開されるまでに至っているわけではない．だが17世紀における状況を鑑みるならば，これは異質な言明である．無限級数は求積問題の解決のための基本技法である．直接曲線と関連して,「目に見える」面積や長さといった量を求める中で利用されていた．ベルヌーイは一端，具体的な問題から離れて一般論を組み立てた．そうした演繹的体系を構成する中で生まれてきた着眼のように考えられる．

他方，ベルヌーイは17世紀人たちが最大に活用した代数的・形式的処理の威力について楽天的な発想も表明している．第2論文の命題24において，いわゆる「ゼータ関数」と後世呼ばれることになる無限級数 $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots$ を考察する．偶数番目の項の和と奇数番目の項の和との間に形式的に成立する比の関係 $2^m-1:1$ が，級数が発散する場合（$m=\frac{1}{2}$）についても成立することが述べられている．ここでベルヌーイは明らかに級数の収束・発散よりも代数的な関係式の一般性に重きを置いている．とかく17世紀，18世紀の数学者像として，厳密性に無頓着で，成果に拡大に邁進した人々という捉え方がある．この表明などは，従来からのイメージを支持するものになるかもしれない．しかしベルヌーイがそれほど単純でないことはすでに述べたとおりである．

第3論文の冒頭，命題36から40にかけて，メルカトールの名で知られる技法が紹介される．分数量を除算によって無限級数に展開する方法である．命題37とその系に典型的な例と注目すべき言明がある．ベルヌーイは次のような無限級数展開，

$$\frac{l}{m+n}=\frac{l}{m}+\frac{ln}{mm}+\frac{lnn}{m^3}-\frac{ln^3}{m^4}+\cdots \tag{1}$$

に対し，パラドックスが生じることを指摘する．すなわち（1）の左辺において $m=n$ とすると，$\frac{l}{m+n}=\frac{l}{2m}$．一方,（1）の右辺において $\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\cdots$．これがもし「最終項が＋で終わるならば」$\frac{l}{m}$ になり矛盾が生じるというのである．ベルヌーイ自身によれば,「割り算の残余項が減少しない」（すなわち l で一定）ことがその原因であるとしている．この5連作論文はこの第3論文の後半以降，具体的な曲線が与えられた場合の求積問題に焦点が移る．それ以前に第1グループの中で論じられた一般的議論の中で初めてこうした視点（残余項に着目する）は獲得されると考えられる．解析学の技法自体を整理し，体系化しようとするときにこそ到達できるアイデアではないか．したがって無限級数それ自身について理論がより整備される契機，素地はすでにここに見いだされると考えられる．解析学の「厳密化」を19世紀の数学者たちだけに負わせてしまうのはふさわしい歴史理解ではないだろう．徐々に連続的に進行する要因も合わせて了解されるべきであろう．

2.2 第2グループについて

第3論文の半ば以降は，17世紀中に開発された無限級数の手法（ウォリスの補間法，ニュートンによる一般2項展開，未定係数法）が紹介される．また円錐曲線や超越曲線（カテナリー，対数曲線，弾性曲線，等々）に対する求積問題への応用が次々に述べられる．これらはみなアルキメデス以来の問題を本格的に受容した上で，代数的な記号法の活用を備えた17世紀の数学者たちの成果の一覧である．とくに上記の手法を並列して，一つの「道具箱」を作り，使いこなす様子がこのベルヌーイ論文にはよく表れている．具体例は4.3項から4.5項を参照していただきたい．

この後半の命題群においては以下の特徴を挙げることができる．

- 円錐曲線から超越曲線への適用を目指す．
- 問題解決の流れ；微小量間の関係式（微分方程式）を立てる→変量変換（無理量の回避）→「道具箱」の利用→無限級数展開→項別積分．
- 求積問題に備えている図形の条件が，形式的な項別積分の計算を可能にする．

第1に掲げた点が17世紀後半の発展の大きな特徴である．そしてニュートン，ライプニッツの貢献は求積の適用範囲をそのように拡大したことによって特別視される．

「道具箱」に含まれる技法のそれぞれについて特別な優劣の示唆する判断は述べられていない．先取権論争が世紀の変わり目（1700年頃）には起きるのだが，イギリス側，大陸側の数学的成果が「平等に」紹介されている．ここで頑迷で心の狭い数学者像をヤーコプ・ベルヌーイにかぶせるべきではない．結局，われわれが想像する以上に問題解決のテクニックによく通じているのである．加えて多くの場合，問題解決の方法はパターン化されている．要は，無限級数を与え，項別積分を行うことで終了する．こうした一連の計算に対して，収束・発散についてのア・プリオリな条件が与えられることは少ない．あたかも実際の図形の状況が保証を与えてくれているかのようである．すなわち面積や曲線の長さは「目で見える」のである．したがって収束や発散についての一般的な問題の提起へつながる契機は生まれにくいだろう．

3 まとめ．問題点の指摘

ヤーコプ・ベルヌーイの5連作論文はオリジナルな成果を提示することに主眼はなく，既知の成果に対して体系化を図ること，この分野の学習者に便宜を図ることが目的であったといえよう．当時，新しい結果を論文を公表する際，伝統的な表現スタイルによって記述されることはもはや一般的ではなかった．総合的（演繹的）に議論が構築されていること自体が異彩を放っている．やはりオリジナルな成果を知らしめることよりも，17世紀を通じて発展してきた求積問題に関して，一定の整理を試みることが目的の一つだったからであろう．その意味でこのベルヌーイ論文は，数学史研究者たち中でさほど大きな注目をひきつけてこなかった．だが違った角度から眺めることも必要である．例えば，級数の収束にかかわる必要な条件，十分な条件に対する意識づけが生まれてくる契機がこのベルヌーイの記述の中に潜んでいる．無限小解析学の発展が一段落したと思えたときに，基礎を据えて体系化する動機づけがなされる．何も19世紀を待たずして，17世紀

末，あるいは18世紀の初頭の段階で一つの「厳密化」への道はスタートしていくではないか．個別の曲線に対する問題処理から一定の距離を置く．そして理論的整合性を考えることで初めて一般論が展開される可能性が生じるのではないか．

級数論に関する Ferraro の議論（[Ferraro 2002]）では，1730年前後の転換を重視している．無限級数が単に求積問題に対する技法として活用される段階から離れることが不可欠だったとしている．スターリングやド・モアブルたちの手で新たな次元に入っていったとする主張は一定の説得力がある．ただその際，このベルヌーイ論文をより重要視する必要があると考えられる（フェッラーロはベルヌーイ論文を無視しているわけではない）．また解析学の「厳密性」に関する著名な Grabiner の議論（[Grabiner 1981]）は，18世紀の数学者の態度と19世紀のそれが一線を画することを強調する．特にコーシーによる転換を重んじる．その断絶が起きたことを前提に，背景の分析を試みている．それは一つの見識であると考えられる．だが，そもそも数学における厳密性とは何か．十分にコンセンサスが得られているとは考えにくい．議論に整合性を備えるために必要な基礎を置くことならば，ベルヌーイ論文とてその資格はある．今回われわれが分析の対象とした5連作論文を見てわかることは，あまり過剰に19世紀に生じた変化を強調すること，その不連続性を重んじることは適当ではないということである．オイラー以前に成果を整理し，その中で必要最小限の前提をを立て，自給自足の議論を構築することが行われていたのである．これはこれで「厳密性」に対する自覚の所在を明らかにする．数学の進展における断続性（「革命」という言葉で象徴されることもある）を否定はしない．ただ Grabiner は18世紀の数学に対してやや冷淡なように見える．断続性と連続性の問題についてわれわれは安易な即断を行うべきでないだろう．

さらにイギリス側と大陸側の成果の方法論的統一についても一定の示唆を与えてくれる．先取権論争とのかかわりで，とかく両者の対立，相違が過去の数学史研究では強調されてきた．しかし1730年頃までに両者は互いの成果を実質的に吸収し合っていた．例えば，ベルヌーイは17世紀中のウォリスやニュートンの手法を有効に利用していた．また18世紀前半，スターリングやド・モアブルはベルヌーイの計算法を彼の名ともに言及している．たとえ根源的な基礎（流率法，無限小解析）の違いや記号表現の違いがあったにせよ，「使える技法」は積極的に身につける態度も彼らはあわせ持っていた．当時の数学者の姿を適切に理解するための視点をどう確立していくか．数学史研究者が試される部分であろう．

4　ヤーコプ・ベルヌーイ5連作論文概要

以下において本論でテーマとしたヤーコプ・ベルヌーイの5論文の内容を列挙していく．主要な部分に限定し，適宜必要な補足ををつける．

4.1　第1論文（1689年）

Ⅰ-序文：ライプニッツ1682年論文，1683年論文への言及．

Ⅰ-公理または公準1–2：量のより小さな部分への分割可能性，あらゆる有限量よりも大きなもの

を受け入れること.

I-命題1： 任意に与えられた量よりも小さいものは，非量（non-quantum），あるいは0.

I-命題2： 任意に与えられた量よりも大きいものは，無限.

I-命題5： 増加する幾何数列は，任意に与えられた量よりも大きくなる.

I-命題6： 減少する幾何数列は，任意に与えられた量よりも小さくなる.

I-命題8: 任意の幾何数列A，B，C，D，Eの和S（ユークリッド『原論』第5巻の比例論による)；

$$S = \frac{A|A-E|}{|A-B|} + E$$

I-命題8系： 減少する幾何数列 $= \dfrac{A^2}{A-B}$

I-命題14：与えられた無限級数を収束する無限級数の和に帰着させる手法；

$$G = \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} + \cdots = \frac{cd}{b(d-1)^3} \qquad (2)$$

(2) $\rightarrow G = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \cdots \rightarrow$（分子一定の無限級数に分解）

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} + \cdots = \frac{cd}{bd-b} \\
S_2 &= \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bd^3} + \cdots = \frac{2c}{bd-b} \\
S_3 &= \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} + \cdots = \frac{3c}{bdd-bd} \\
S_4 &= \frac{4c}{bd^3} + \cdots = \frac{4c}{bd^3-bdd}
\end{aligned}$$

$\cdots \quad \rightarrow$（最右辺を加える際に，再度分子一定の無限級数に分解）

I-命題15：「ベルヌーイの方法」（←ド・モアブルの言及（1730年））；

$$\begin{aligned}
R &= \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} + \cdots \\
N &= \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \cdots \\
P &= N - \frac{a}{c} = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \cdots \\
Q &= N - P = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \cdots = \frac{a}{c} \\
R &= 2Q = \frac{2a}{c}
\end{aligned}$$

★「この方法を慎重さなしに用いることはない，ということに注意すべきである」；

$$\begin{aligned}
S &= \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \cdots \\
T &= \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \cdots (+\text{最終項}) \\
Q &= S - T = \frac{2a}{c}
\end{aligned}$$

← （先の $Q = \dfrac{a}{c}$ に矛盾.「T の最終項が0に向けて終わっていくのでなければ」成立しない.）

I-命題 16：無限調和級数の発散の証明；

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty$$

I-命題 17：ライプニッツ（1682 年）の和を求める;

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\cdots=\frac{3}{4},\ \text{等々}$$

4.2 第 2 論文（1692 年）

II-命題 24：「すべての分子が等しく，分母が自然数，またはその平方数，あるいは他の任意のベキである任意の無限級数において …」；

$$\begin{aligned}\zeta(m) &= \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots(=x)\\ \zeta_o(m) &= \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+\cdots(=y)\\ \zeta_e(m) &= \frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+\cdots\end{aligned}$$

$$\to\zeta_o(m):\zeta_e(m)=2^m-1:1$$

★全集（1744 年刊）編纂者クラメルの註:「x の項数は $2^m(x-y)$ の項数の 2 倍」→ $2^m(x-y):x=r:s$ として比 $r:s$ を示すべき．

II-命題 24 註：$\zeta(\frac{1}{2})=\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$（発散）について；$\zeta_o(\frac{1}{2}):\zeta_e(\frac{1}{2})=\sqrt{2}-1:1$

4.3 第 3 論文（1696 年）

III-序文：メルカトル，グレゴリー，ニュートン，ライプニッツ，ロピタルへの言及（→前者 3 人の貢献については「今なおわれわれは知らない」）

III-命題 36–40：メルカトル（1668 年）の手法による分数量の無限級数展開；

$$\frac{l}{m+n}=\frac{l}{m}+\frac{ln}{mm}+\frac{lnn}{m^3}-\frac{ln^3}{m^4}+\cdots\ (\text{命題 }37)$$

III-命題 37 系 2：$\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\cdots$ のパラドックス；

$$\to\text{命題 37 の左辺において } m=n \text{ より } \frac{l}{m+n}=\frac{l}{2m}$$

$$\to\text{右辺において}\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\cdots=(\text{「最終項が＋で終わるならば」})\frac{l}{m}$$

★パラドックスが生じる理由→「割り算の残余項が減少しない」(lで一定)
III-命題 42–43：双曲線下の領域の面積（→ウォリスの方法とライプニッツの方法とを比較）
III-命題 45–46：円錐曲線（円，楕円，ライプニッツの公式）にかかわる無限級数；
★図形から得られる量 $\dfrac{dx}{2\sqrt{2x-xx}}$（微小な円弧の長さ，命題 45）→変量変換 $\sqrt{2x-xx}=\dfrac{x}{t}$
★微小量間の関係式（微分方程式）→分数量の無限級数展開（命題 37）$\dfrac{dt}{1+tt}=dt-ttdt+t^4dt-t^6dt+\cdots$ →項別積分．
III-命題 45 系 2：$1-\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^5}{5}-\dfrac{t^7}{7}+\cdots$（→ライプニッツ（1691 年））

4.4 第 4 論文（1698 年）

IV-命題 49–52：超越曲線（カテナリー，対数曲線）の求長，放物線の求長．置換積分の技法；

$$ads=dy\sqrt{aa+4yy}\text{(放物線の求長，命題 51)}\to\text{変量変換}\sqrt{aa+4yy}=z-2y$$

$$\left(\leftarrow\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx\text{ に対して}\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x\ (a>0)\right)$$

$$\to ads=\frac{z^4+2aazz+a^4}{8z^3}dz=\frac{zdz}{8}+\frac{a^2dz}{4z}+\frac{a^4dz}{8z^3}\to\text{第 2 項に対して } z=a+t \text{ として命題 37 を利用}$$

4.5 第 5 論文（1704 年）

V-命題 53：ウォリス（1656 年）の補間法
V-命題 54：(ニュートン（1669 年，1676 年）の）一般 2 項展開
V-命題 55：ライプニッツ（1693 年）の未定係数法（「仮想級数（series ficta)」）
V-命題 56：弾性曲線（curva elastica）の座標間の関係式を無限級数表示（ウォリスの補間法と一般 2 項展開の利用による）；

$$dy=\frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}\text{(←ヤーコプ自身の既刊論文への言及)}$$

与えられた関係式に対して以下を利用して無限級数化→

$$\sqrt{\frac{l}{m-n}}=\sqrt{\frac{l}{m}}\times\left(1+\frac{1n}{2m}+\frac{1\cdot3nn}{2\cdot4mm}+\frac{1\cdot3\cdot5n^3}{2\cdot4\cdot6m^3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7n^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8m^4}+\cdots\right)\text{(ウォリスの補間法による結果)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}}=1-\frac{1}{2}n+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}nn-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}n^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}n^4-\cdots\text{(一般 2 項展開による結果)}$$

$$\to\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}}=\frac{xx}{aa}+\frac{1x^6}{2a^6}+\frac{1\cdot3x^{10}}{2\cdot4a^{10}}+\frac{1\cdot3\cdot5x^{14}}{2\cdot4\cdot6a^{14}}+\cdots$$

$$（項別積分により）\to y=\frac{x^3}{3aa}+\frac{1x^7}{2\cdot 7a^6}+\frac{1\cdot 3x^{11}}{2\cdot 4\cdot 11a^{10}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^{15}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15a^{14}}+\cdots$$

V-命題 57：弾性曲線の求長

V-命題 58：弾性曲線の長さを数値計算（←スターリング（1730 年）の言及）

V-命題 59：与えられた対数の真数の値を無限級数で表す（未定係数法と一般 2 項展開を利用）；

$$（与えられた関係式\to）\pm dy:dx=y:t \iff y=\pm\frac{tdy}{dx}$$

$\to y=1+bx+cxx+ex^3+fx^4+\cdots$ とおく→（この式の両辺を x で微分して）$\dfrac{dy}{dx}=b+2cx+3exx+4fx^3+\cdots$

$$1+bx+cxx+ex^3+fx^4+\cdots=\pm bt\pm 2ctx\pm 3etxx\pm 4ftx^3\pm 5gtx^4\pm\cdots$$

→次数の等しい項の係数を比較

$$b=\pm\frac{1}{t},\ c=\pm\frac{b}{2t}=\frac{1}{1\cdot 2tt},\ e=\pm\frac{c}{3t}=\pm\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3t^3},\ f=\pm\frac{e}{4t}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4t^4},\cdots$$

$$y=1\pm\frac{x}{t}+\frac{xx}{1\cdot 2tt}\pm\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3t^3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4t^4}\pm\cdots$$

V-命題 60：弾性曲線の生成曲線によって囲まれた部分の面積；

$$dy:dx=xx:\sqrt{a^4-x^4}=\frac{1}{2}dx:\frac{dx\sqrt{a^4-x^4}}{2xx}$$

$$微小な領域=\frac{xdx\sqrt{a^4-x^4}}{4xx}=\frac{(a^4x-x^5)dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}=\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}-\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$$

$$求める領域=\int\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}-\int\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}=\frac{aa}{8}\times(\frac{s}{a}-\frac{ss}{2aa}+\frac{s^3}{3a^3}-\frac{s^4}{4a^4}+\cdots)-\frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$$

$$=\frac{aa}{8}\times(\frac{u}{a}+\frac{uu}{2aa}+\frac{u^3}{3a^3}+\frac{u^4}{4a^4}+\cdots)-\frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$$

←第 1 項で $\sqrt{a^4-x^4}=\dfrac{txx}{a}-aa$ の変量変換，さらに $t=a+s,\ u=\dfrac{as}{a+s}$ と変換

V-命題 60 系 1：弾性曲線とその生成曲線によって囲まれた部分の面積

4.6　17 世紀から 18 世紀にかけて級数論の流れ（代表的著作・論文一覧）

	イギリス	著作・論文	大陸側	著作・論文
～1650s	Wallis	*Arithmetica infinitorum* 1656	Gregoire de St. Vincent	*Opus geometricum* 1647
			Mengoli	*Novae quadraturae arithmeticae* 1650
			Pascal	*Lettre de Dettonville* 1659
1660s～1670s	J. Gregory	*Vera circuli et hyperbolae quadratura* 1667	Pascal	*Traité du triangle arithmétique* 1665
	Brouncker	"The Squaring of the Hyperbola, by an Infinite Series of Rational Numbers" 1668		
	Newton	"De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" (1669) 1711	Mercator	*Logarithmotechnia* 1668
1670s～1730s	Newton	"Epistola prior" (1676) 1712	Leibniz	*Quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (～1676) 1993
	Newton	"De quadratura curvarum"(1704)	Leibniz	"De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa" 1682

			Leibniz	"Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum" 1691
			Leibniz	"Supplementum geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope novae methodi genaralissimae per series infinitas" 1693
	Taylor	*Methodus incrementorum directa et inversa* 1715		
	De Moivre	*The Doctrine of Chances* 1718(1st ed.)	Monmort	*Essay d'analyse sur les jeux de hazard* 1708(1st éd.)
	De Moivre	*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis* 1730	Jakob Bernoulli	*Ars conjectandi, opus posthumus. Accedit Tractatus de seriebus infinitis* 1713
	Stirling	*Methodus differentiarum: sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum* 1730		
1730s～	Maclaurin	*A Treatise of Fluxions* 1742	Euler	"De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequent" 1731

5 参考文献

1次文献

[Bernoulli JCO] *Jacobi Bernoulli, Basileensis Opera*(1744_1), (Bruxelles: Culture et Civilisation, 1967)(rep.).

[Bernoulli WJK] *Die Werke von Jakob Bernoulli*, herausgegeben von Der Naturforschenden Geselschaft in Basel(Basel, Boston, New York: Birkhäuser Verlag, 1969–).

2次文献

[Ferraro 2000] Ferraro, Giovanni, "True and Fictitious Quantities in Leibniz's Theory of Series," *Studia Leibnitiana*, **32**(2000), pp. 43–67.

[Ferraro 2000] Ferraro, Giovanni, "The Value of an Infinite Sum: Some Observations on the Eulerian Theory of Series," *Sciences et techniques en perspective*, **4**(2000), pp. 73–113.

[Ferraro 2002] Ferraro, Giovanni, "Convergence and Formal Manipulation of Series from the Origins of Calculus to About 1730," *Annals of Science*, **59**(2002), pp. 179–199.

[Ferraro 2007] Ferraro, Giovanni, "Convergence and Formal Manipulation of in the Theory of Series from 1730 to 1815," *Historia Mathematica*, **34**(2007), pp. 62–88.

[Grabiner 1981] Grabiner, Judith V., *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*(1981_1)(New York: Dover Publications, Inc., 2005)(rep.).

[Hofmann DSB] Hofmann, Jeseph E., "Bernoulli, Jakob (Jacques) Ⅰ." in *Dictionary of Scientific Biography*, Ⅱ (New York: Scribner's Son, 1970–90), pp. 46–51.

[Weil 1993] Weil, André, "Introduction générale," in [Bernoulli WJK], Band 4, pp. 3–31.

[斎藤 2006] 斎藤憲『よみがえる天才アルキメデス：無限との闘い』(岩波書店，2006年).

[林 2003] 林 知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』(東京大学出版会，2003年).

[林 2005] 林 知宏「ヤーコプ・ベルヌーイの無限級数論：1689年論文における演繹的構造の分析」,『学習院高等科紀要』3 (2005年), 71–92頁.

[林 2006] 林 知宏「ヤーコプ・ベルヌーイの無限級数論2：第2論文 (1692年) から第5論文までの分析」,『学習院高等科紀要』4 (2006年), 87–112頁.