数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 159-167

バーゼル問題とオイラー

The Basel-Problem and Leonhald Euler

(2007年8月23日)

杉本敏夫 (Sugimoto Toshio)

第1節 バーゼル問題とは

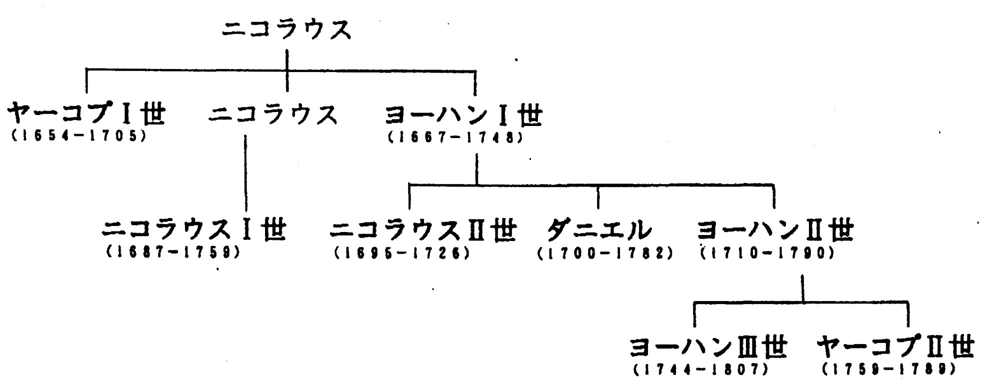
逆平方数の級数

(*1･1)　　$Q=1/1+1/4+1/9+1/16+1/25+1/36+\cdots$

の和はゼータ関数の最簡の例であり、レオンハルト・オイラー(1707-83)が創始者であることは周知である。

今回の報告は、Qの和の発見の経緯を主題とする。スイスのバーゼル在、ベルヌイ一族の長老であるヤーコプ・ベルヌイ(1654-1705)の努力にも拘わらず、この逆平方数の級数Qの和に限っては解けず、その解決を後世に託したため、「バーゼル問題」と呼ばれるようになった。優れた解説も多いなか、[1]ポリア、特にその第Ⅰ巻、および[2]ヴェイユ、[3]ダンハムの著書を参照した。

ベルヌイ一族（太字は数学者）



第2節 初等的な比較

ヤーコプ・ベルヌイは、[4]「無限級数ノ扱ヒ」の中で、逆数級数

(*2･1)　　$U=1/1+1/2+1/3+1/4+1/5+\cdots$

の和が発散することを厳密に証明した。その他、巧妙な技法を駆使して、多くの級数の和を求めた。ヤーコプは、やや迂遠な推論の後、逆平方数の級数

(*2･2)　　$Q=1/1+1/4+1/9+1/16+1/25+1/36+\cdots$

が「和ノ知ラレタル他ノ級数〔次のTの2倍〕ヨリモ小ナル事ガ得ラレタルニモ拘ラズ、其ノ和ヲ求ムル事ハ困難デアル。若シモ誰カガ、我々ノ努力カラ逃レタル事ヲ知ラセテ呉

レレバ、大イニ感謝シタイ」（原文がラテン語の時は、片仮名で表記する）と表明した。ヤーコプは何と謙虚なことであろうか。

現代では、望遠鏡の鏡筒の畳み込みに似て、長い級数の隣り合う項同士が互いに帳消しになる《望遠鏡級数》telescopic series

(＊2・3)　$T=1/2+1/6+1/12+1/20+1/30+\cdots$
$=(1-1/2)+(1/2-1/3)+(1/3-1/4)+(1/4-1/5)+(1/5-1/6)+\cdots$

が用いられる。その和は明らかに $=1$ である。$1+T$ と Q を項別に比較すれば、

$1/4<1/2,\quad 1/9<1/6,\quad 1/16<1/12,\quad 1/25<1/20,\quad 1/36<1/30,\ \cdots$

から、$Q<1+T=2$ が出る。

ヤーコプの甥のダニエル・ベルヌイ(1700-82)は $Q\sim 8/5$ を与え(1728)、同年クリスチアン・ゴルドバッハ(1690-1764)は $41/25<Q<5/3$ を与えたと言われる。

私はそれを確かめるため、Q を様々に変形してみた（各値は元のQ に等しい）。

$Q_1=(1+Q)-T$
$=1+(1-1/2)+(1/2)(1/2-1/3)+(1/3)(1/3-1/4)+\cdots$
$=1+1/1\cdot1\cdot2+1/2\cdot2\cdot3+1/3\cdot3\cdot4+1/4\cdot4\cdot5+\cdots$

$Q_2=(1+Q)-T$
$=2+(1/2)(1/2-1)+(1/3)(1/3-1/2)+(1/4)(1/4-1/3)+\cdots$
$=2-1/1\cdot2\cdot2-1/2\cdot3\cdot3-1/3\cdot4\cdot4-1/4\cdot5\cdot5-\cdots$

$Q_3=(1/2)(Q_1+Q_2)$
$=(1/2)[(3+1/1^2\cdot2^2+1/2^2\cdot3^2+1/3^2\cdot4^2+1/4^2\cdot5^2\cdots]$

$Q_4=(1/3)(Q_2+2Q_3)$
$=(1/3)[5-(1/2^2)(1-1^2)-(1/3^2)(1/2-1/2^2)-(1/4^2)(1/3-1/3^2)$
$-(1/5^2)(1/4-1/4^2)-\cdots]$
$=5/3-0-(1/3^2)\cdot(1/2^2)-(1/4^2)\cdot(2/3^2)$
$-(1/5^2)\cdot(3/4^2)-(1/6^2)\cdot(4/5^2)-\cdots$

$Q_5=(1/5)\cdot(2Q_3+3Q_4)=(1/5)\cdot(Q_1+2Q_2+2Q_3)$
$=(1/5)[8+(2-2+1)/1^2\cdot2^2+(3-4+1)/2^2\cdot3^2+(4-6+1)/3^2\cdot4^2$
$+(5-8+1)/4^2\cdot5^2+(6-10+1)/5^2\cdot6^2\cdots]$
$=8/5+1/5\cdot1^2\cdot2^2+0/5\cdot2^2\cdot3^2-1/5\cdot3^2\cdot4^2-2/5\cdot4^2\cdot5^2-3/5\cdot5^2\cdot6^2-\cdots$

収束の速さを比較するため、各級数の初めの5項までの和を比較してみよう。

$Q_1=1.623611\cdots,\qquad Q_2=1.663611\cdots,\qquad Q_3=1.643611\cdots,$
$Q_4=1.6175,\qquad Q_5=1.647611\cdots.$

Q_3 と Q_5 の値は Q に比較的近く、しかも、

$Q_4<Q_1<Q_3<Q<Q_5<Q_2$

の関係にある。Q_5 の初項はダニエルの、Q_4 の初項はゴルドバハの右辺の根拠であり、ゴルドバハの左辺はもう少し複雑な Q の変形に依る。

第3節　競争相手

オイラーと同時代人も、バーゼル問題に取り組んだ。スターリング(1692-1770)は[5]『差分法、又ハ総和ト補間ノ論考』(1730)[この著書の表題を微分法と訳すのは不適切である、内容に即して差分法と訳すのがよい]の命題IIで、

$$(*3\cdot1)\qquad A/(x(x+1))+B/(x(x+1)(x+2))+C/(x(x+1)(x+2)(x+3))+\cdots$$
$$=A/x+B/(2x(x+1))+C/(3x(x+1)(x+2))+\cdots$$

を証明した。この命題に続く例題IVでは、逆平方数の級数Qを求めるため、級数を巧妙に変形する。即ちQの級数を途中まで、まともに計算する。或る項 $1/u^2$ から後の項の和を P(u) と置く。これを求めるため、補助変数 $a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots$ を

$$(*3\cdot2)\qquad a=1/u,\quad b=a/(u+1),\quad c=2b/(u+2),\quad d=3c/(u+3),\ \cdots$$

の関係式で定めれば、後の項の和 P(u) として、加速式

$$(*3\cdot3)\qquad \mathrm{P}(u)=a+b/2+c/3+d/4+\cdots$$

を得ることを証明した。前節の Q の様々なる変形に似た、巧妙な技巧に依る。

数値例として、Q(12)＝1＋1/4＋1/9＋…＋1/144＝1.5946976638 までは普通に計算する。これに、後の項の和

$$\mathrm{P}(13)=1/169+((1/169)/14)/2+(2((1/169)/14)/15)/3+\cdots=0.079957427$$

を加えて、Q＝1.64493406$\underline{5}$ を示した。結果の先取りではあるが、Qは 1.64493406$\underline{7}$ だから、スターリングが計算したのは非常に良い値であった。

第4節　問題の本質

バーゼル問題には二つの側面がある。

（1）Qを数値として出来る限り精密な値を求める。

（2）Qの素性を尋ねる。周知のようにQ は $\pi^2/6$ に等しいのであるが、これは後知恵であり、当時は全く未知数であった。

ヤーコプ・ベルヌイが欲したのはQの精密な数値だけではない。Qそれ自身の素性であった。当時、π を因数として含む積分値は、幾つも知られていた。しかし、数値としての 1.644934… がπの平方を因数として含むなどとは、数値 1.644934… をどう弄っても出てこない。彼のみならず、当時の誰もが、Qの素性を予想もしなかったのは当然である。私が知恵を絞っても考えつくのは、$\pi/2=1.57$ と $\pi/3=1.05$ の積が 1.6485 となる事くらいである。オイラー自身も後掲の第三論文で、「全ク思ヒガケズ、…円積問題ニ関係スル」と感嘆の言葉を述べた。彼の発見が注目されたのも当然である。スターリングは確かにQの精密な値を得たが、慎ましく著書の中の一つの例題として計算したので、余り知られなかった。

第5節　オイラーの執心

以下に述べるように、オイラーは本質的に異なる四つの解答を与えた。彼はヤーコプの弟ヨーハン・ベルヌイ(1667-1748)の生徒であり、甥ダニエル・ベルヌイの友人である。

オイラーがバーゼル問題に執心なのは必然性がある。以下オイラーの論文は、Ｅで始まるエネストレーム番号で引用する。これは、モーツァルト作品に付されたケッヒェル番号に相当する。年号は前の（　）内が発表年、後の（　）無しが印刷年である。彼が青年時代からこの問題に取り組んでいたことは、確かである。

逆平方数級数Ｑの和は、まともに足したのでは収束が甚だ緩慢である。例えば10項までの和 1.54976…, 100項までの和 1.63498…, 1000項までの和 1.64393…, 10000項までの和でさえも 1.64<u>83</u>… しか得られない。目標は Ｑ＝1.64<u>93</u>… である。既にヤーコブは多様な加速法を示した。恐らくオイラーも新たな加速法を模索したに違いない。

論文としての発表は<u>二番目</u>になるが、所謂オイラー・マクローリンの級数を見よう。

[6]　E25 「増加スル項ヲ総和スル一般的方法」(1732/3), 1738. の内容と殆ど同じ内容が、オイラーとは独立に、マクローリン(1698-1746)の

[7]　『流率法ノ論考』1742

に示された。オイラーは、整数 n を変数とする関数 $f(n)$ の和を $F(n)$ とし、

(*5·1)　$F(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

と置くとき、実数 x に対するテーラー展開が<u>整数 n の時</u>にも成立すると見做して（このようにオイラーの進め方は乱暴であるが）、

(*5·2)　$f(n)=F(n)-F(n-1)=dF/dn-(1/1\cdot2)d^2F/dn^2+(1/1\cdot2\cdot3)d^3F/dn^3-+\cdots$

と置いた。これを未定係数法で解くため、

(*5·3)　$F(n)=\alpha\int f(n)dn+\beta f(n)+\gamma df/dn+\delta d^2f/dn^2+\varepsilon df^3/dn^3\cdots$

と置いた。（未定係数法の使用は、当時、有力な手段であった。）式(*5·2)と併せて次々に係数 α, β, γ, δ, ε, … を定めて行けばよい。

(*5·4)　$\alpha=1,\ \beta=1/2,\ \gamma=1/12,\ \delta=0,\ \varepsilon=-1/720,\ \zeta=0,\ \eta=1/30240,$
$\theta=0,\ \iota=-1/1209600,\ \cdots$

（δ 以降の項は一つ置きに ＝0 となる）が 次々に定まり、結局

(*5·5)　$F(n)=\int f(n)dn+(1/2)f(n)+(1/12)df/dn+0-(1/720)df^3/dn^3+\cdots$

が得られる。オイラーはまだこの段階で、係数が $1/(e^u-1)$ の展開係数と関係することに気付いていない。（それは後にＥ130, (1740), 1750 で示された。）

（マクローリンもほぼこれと同じ展開を辿ったと思われる。）

各係数が明らかになったので、もう少し一般化し、k から $m=k+n-1$ までの区間の和を考えると、次を得る。

(*5·6)　$F(m)-F(k)=f(k+1)+f(k+2)+\cdots+f(m)$
$=\int_k^m f(n)dn+(1/2)[f(m)-f(k)]+(1/12)[df(m)-df(k)]/dn$
$-(1/720)[df(m)^3-df(k)^3]/dn+\cdots$

オイラーは恐らくこの公式を用いて逆平方数級数Ｑの和を求めたと思われるが、論文には記載がないので、私が代わりに計算してみた。最初の９項の和は正直に求めると、

$F(9)=1+1/4+1/9+1/16+1/25+\cdots+1/81=1.539767731166541$

を得る。残りは式(*5·6)を用いて $f(n)$ の和を 10 から ∞ まで求めると、

$$F(10)=1/10+(1/2)\cdot(1/10^2)+(1/6)\cdot(1/10^3)-(1/30)\cdot(1/10^5)$$
$$+(1/40)\cdot(1/10^7)-(1/30)\cdot(1/10^9)\cdots=0.105166335680953.$$

両者の和 Q＝1.644934066847494 は、 $\pi^2/6=1.644934066848226$ と比べて、小数 11 位まで一致する。（オイラーの確信の根拠である。第８節を参照。）

第６節　双曲線対数を用いる方法

オイラーの最初の論文は、双曲線対数 log.hyp. の級数展開を用いる。オイラーは常に関数記号として l を用いるが、紛らわしいので本稿では ℓ を用いることにする。

［８］　E20「無限ニ増加スル項ノ和」(1730/1), 1738.

は、論文の前半で導いた漸化式

(*6·1)　$\int x^{n-1}dx\,\ell x=(x^n/n)\,\ell x-x^n/n^2$

から出発し、$y=1-x$, $dy=-dx$ を用いて、級数

(*6·2)　$\int -y^{-1}dy\,\ell\,(1-y)=\int(1-x)^{-1}dx\,\ell x=\int dx(1+x+x^2+x^3+\cdots)\,\ell x$
$=\int dx(\,\ell x+x\,\ell x+x^2\,\ell x+x^3\,\ell x+\cdots)$

を導く。式(*6·2) の左辺はオイラー時代の記法。現代なら $\int(-y^{-1})\log(1-y)dy$ と書くのが普通である。これを $x=a$ から $x=u$ まで積分すると、

(*6·3)　$=u\,\ell u+(u^2/2)\,\ell u+(u^3/3)\,\ell u+\cdots\quad -u-u^2/4-u^3/9-\cdots$
$-a\,\ell a-(a^2/2)\,\ell a-(a^3/3)\,\ell a-\cdots\quad +a+a^2/4+a^3/9+\cdots$

一方、元の式(*6·2) のまま変形すると、

(*6·4)　$\int -y^{-1}dy\,\ell\,(1-y)=\int y^{-1}dy(y+y^2/2+y^3/3+\cdots)$
$=\int dy(1+y/2+y^2/3+\cdots)=y+y^2/4+y^3/9+\cdots$

を得る。先の式(*6·3) の第一部分 $(u+u^2/2+u^3/3+\cdots)\,\ell u=-\,\ell\,(1-u)\,\ell u$ に注目し、式(*6·4) と併せると、

(*6·5)　$Q=1/1+1/4+1/9+1/16+1/25+\cdots$
$=(y+u)/1+(y^2+u^2)/4+(y^3+u^3)/9+\cdots\quad +\ell y\cdot\ell u$

ここまで $y+u=1$ と仮定して来たが、さらに $y=u$ と仮定すれば $y=1/2=u$ となり、

(*6·6)　$Q=1/1+1/4+1/9+1/16+1/25+\cdots$
$=1/1\cdot1+1/2\cdot4+1/4\cdot9+1/8\cdot16+1/16\cdot25+\cdots\quad +(\ell\,(1/2))^2$

という有効な式を得る。中辺の級数は分母が平方数だけなのに対して、右辺の級数は分母が平方数と２の乗冪との積となっているので、右辺のほうが収束が早い。

オイラーは右辺の級数の和 1.164481 に $(\ell\,(1/2))^2=(\ell\,2)^2=0.63147^2=0.480453$ を加えて、Q＝1.644934 を得た。項数さえ増やせば幾らでも精密な値を求めることができる。第４節で述べたように、これは（１）の立場であって、Qの素性に迫ったわけではない。スターリングの著書(1730)の中の記述と同じ時期であるとは言え、オイラーが初めて独立の論文の形でQの値を求める方法を確立したのである。勿論、現代的な観点から見れば、$(\ell 1)(\ell 0)$ を平気で ＝0 と置いたこととか、無断で項別積分を行なったことなど、欠陥はあるが、それらは当時普通に行なわれたのだから、彼だけの責任ではない。（［３］

ダンハムは、現代的な立場からの合理化することは容易である、と言う。）それよりも、オイラーがバーゼル問題に精密な数値を与えるという、最初の楔を打ち込んだ功績を認めたい。

第7節　或る無限積

オイラーの有名な第三論文を紹介する前に、彼に潜在意識として作用した、と思われる[9] ウォリスの研究(1656)を見ておこう。ジョン・ウォリス(1616-1703)は、

(*7·1)　　$\square = \int dx(1-xx)^{1/2}$　($x=0$ から $x=1$ まで積分)

の値を求めようとして、当時、積分 ($x=0$ から $x=1$ まで) が可能であった

(*7·2)　　$\int dx(1-x^{m/2})^{k/2}$　〔m と k は整数、特に偶数〕

の値を多様に求め、それらの値を補間する事によって式 (*7·1) の値を求めようとした。〔例えば、階乗 $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$ は n が整数ならば容易だが、非整数の場合の値を求めるのは容易でない。式(*7·2) を求めるのは、階乗の $(1/2)!$ の値を求めようとするときの、或る種の補間の方法に匹敵する。なお、青年オイラーが階乗 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots$ に異常な興味を抱いたことは、所謂《オイラー積分》の研究（私の[10]を参照）にある。〕

ウォリスはその結果、中間的に

(*7·3)　　$(3/2)\square > (2/3)/(3/4)\square > (3/4)(15/8)\square > \cdots$

を得た。これにより、$1/\square$ は

(*7·4)　　$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot\cdots\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot12\cdot14}\sqrt{1\frac{1}{13}} > \frac{1}{\square} > \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot\cdots\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot12\cdot14}\sqrt{1\frac{1}{14}}$$

なる二つの不等式に挟まれることを示した。明らかに $1/\square = 4/\pi$ である。

オイラーは、恐らくウォリスの無限積を弄っている内に、

(*7·5)
$$\begin{aligned} 2/\pi &= (3/4)\cdot(15/16)\cdot(35/36)\cdot\cdots \\ &= (1-1/4)\cdot(1-1/16)\cdot(1-1/36)\cdot\cdots \\ &= (1-1/2)\cdot(1+1/2)\cdot(1-1/4)\cdot(1+1/4)\cdot(1-1/6)\cdot(1+1/6)\cdot\cdots \end{aligned}$$

なる変形に気付いたかも知れない。 これは私の《発見学的な heuristic》空想であり、オイラーの雑記帳（ガウスにおける《ライステ》に相当するもの）が開示されなければ、確かめることは不可能であろう。

無限積は、形としては綺麗であるが、収束が甚だ遅くて、計算には適さない。例えば式(*7·4) に示した $n=14$ 項までの積×平方根 では

1.27498… > 1.27323… > 1.27172…

しか求まらない。目標の 1.27323… に比べて、両側の数値はかなり遠い。

第8節　正弦関数の因数分解

第三論文の内容は、あらゆる機会に引用されて来たので、詳述するまでもない、と思われる。ここでは、[1]ポリア、[3]ダンハムを参照して、簡単に紹介するに止める。

[11]　E 41「逆数ノ級数ノ和ニ就イテ」(1734/5), 1740.

では、次のように推理を進める。

代数学の教える所、根 0 を持たない所の

(*8·1)　n 次の方程式 $P(x)=0$ が n 個の根 $a, b, c, \cdots \mu, \nu$ を持つならば、

(*8·2)　$P(x)=(1-x/a)(1-x/b)(1-x/c)\cdots(1-x/\mu)(1-x/\nu)$

と因数分解される。右辺を級数に展開すれば、

(*8·3)　$P(x)=1-(1/a+1/b+1/c+\cdots+1/\mu+1/\nu)x$
$+(1/ab+1/ac+\cdots+1/bc+\cdots+1/\mu\nu)x^2+\cdots$

ここで x の係数が $-(1/a+1/b+1/c+\cdots+1/\mu+1/\nu)$ なることに注目する。

オイラーは、この有限次数の方程式の場合に成立する根と係数の関係が，飛躍して<u>無限次数の方程式</u>にも成立すると考えた(大胆な一般化！)。周知のように、級数展開

(*8·4)　$P(x)=\sin x/x=1-x^2/1\cdot2\cdot3+x^4/1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5-+\cdots$

の諸根（無限個ある）は $\pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\ \cdots$ である。この場合にも《因数分解》

(*8·5)　$P(x)=\sin x/x$
$=(1-x/\pi)(1+x/\pi)(1-x/2\pi)(1+x/2\pi)(1-x/3\pi)(1+x/3\pi)$
$\cdots$
$=(1-x^2/\pi^2)(1-x^2/4\pi^2)(1-x^2/9\pi^2)\cdots$

が成立するものと考える。<u>根と係数の関係によって</u>（それは有限次数のとき成立するのであるが、無限次数のときにも成立すると飛躍して考える）、

(*8·6)　$-1/1\cdot2\cdot3=-(1/\pi^2+1/4\pi^2+1/9\pi^2+\cdots)$

または、両辺に $-\pi^2$ を掛けて

(*8·7)　$\pi^2/1\cdot2\cdot3=\pi^2/6=1/1+1/4+1/9+\cdots$

を得る。

このオイラーが得た結果は、印刷される(1740)よりも前(1734～5)に手紙によって欧州を駆け巡った、と言われる。ヨーハン・ベルヌイは、「若シ私ノ兄が生キテ居タナラ！」と記した、と言う。

やがて異論も現れた(第1節の系図を参照)。ヤーコプの甥ダニエル・ベルヌイは、

「$0,\ \pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\ \cdots$ が方程式(*8·5) の<u>凡ての根</u>であることを証明していない。」

と批判した。またヤーコプのもう一人の甥ニコラウス・ベルヌイ(1687-1759)も、

「方程式(*8·5) の根 $\pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\ \cdots$ 以外に実根がないことは示したが、その他に<u>虚根</u>が有り得ないことを証明していない。」

と批判した。

しかし、オイラーは、先に求めた 1.644934066847494 なる値が $\pi^2/6$ と小数 11 桁も<u>一致する</u>こと（一致は $1/10^{11}$ の確率でしか生じないほど稀有のこと）から、絶対の確信は揺らがなかった。

第９節　円積分の漸化式

オイラーはずっと後になって、フランス語の<u>第四論文</u>(1743)

[12]　E 63「次の級数 $1+1/4+1/9+1/16+1/25+1/36+\text{etc.}$ の和の証明」1743.

を書いた。<u>円積分</u> s とその微分 ds を

(*9·1)　$s=\int dx/\sqrt{(1-xx)}$,　$ds=dx/\sqrt{(1-xx)}$

で定義した。s を $x=0$ から $x=1$ まで積分すれば、$=\pi/2$ となることは明らかである。以下の記述を簡明にするため、〔オイラーが用いなかった記号を導入して〕

(*9·2)　$S(n)=\int x^n dx/\sqrt{(1-xx)}$,　$dS(n)=x^n dx/\sqrt{(1-xx)}$

と定義する。オイラーは s と ds の積を作り、級数展開する。

(*9·3)　$s\cdot ds=S(1)+(1/2\cdot3)S(3)+(1\cdot3/2\cdot4\cdot5)S(5)+(1\cdot3\cdot5/2\cdot4\cdot6\cdot7)S(7)+\cdots$

ここに周知の部分積分の公式

(*9·4)　$S(n+2)=((n+1)/(n+2))S(n)\ -\ x^{n-1}\sqrt{(1-xx)}/(n+2)$

を代入して、$x=0$ から $x=1$ まで積分すれば、後項は $=0$ となるので、

(*9·5)　$S(1)=1$,　$S(3)=(2/3)S(1)=2/3$,　$S(5)=(4/5)S(3)=2\cdot4/3\cdot5$,
$S(7)=(6/7)S(5)=2\cdot4\cdot6/3\cdot5\cdot7$,　$\cdots$

これを式(*9·3)に代入して $x=0$ から $x=1$ まで積分すれば、

(*9·6)　$\int s\cdot ds=(1/2)ss=\pi^2/8=S(1)+S(3)+S(5)+\cdots$
$=1/1+1/3\cdot3+1/5\cdot5+\cdots$

を得る。所が　$Q-(1/4)Q=(3/4)Q=1+1/9+1/25+\cdots$　だから、

(*9·7)　$Q=1+1/4+1/9+1/16+1/25+\cdots=(4/3)\cdot\pi^2/8=\pi^2/6$

なる目標に到達する。（オイラーは記号 $S(n)$ を用いず、一々積分式で書いた。）

[3] ダンハムは、この証明は洗練されていて、現代の規準にも合致すると言う。

この論文の後半には $1+1/2^4+1/3^4+1/4^4+1/5^4+\cdots=\pi^4/90$ 等、分母の冪指数が一般化された場合も述べてある。

第１０節　ゼータ関数への進化

オイラーの主著

[13]　『無限解析序説』（高瀬正仁氏の翻訳によって近づき易くなった。）

では、$Q=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+\cdots$ や $1+1/2^4+1/3^4+1/4^4+1/5^4+\cdots$ 等の扱い方も洗練されていて、現代のゼータ関数 $\zeta(x)$ の源泉となった。

しかしながら、今回私が発表するのはあくまでも<u>歴史的な形成を跡付ける立場</u>であり、逆平方数の級数が如何にしてオイラーによって突き止められたか、また如何にして円周率の平方という、全く予想を超えた数値と結びつくに到ったかを辿ることであった。

私は第７節で述べ、また[10]数学シンポジウムで述べたように、オイラーからガウスへの影響を調べることが本来の目標である。その準備を進めるうちに、ヤーコプ・ベルヌイからオイラーへの影響も調べてみた。その一部を報告した次第である。

文献

文献参照の便宜を賜った長岡一昭（津田塾大）、高瀬正仁（九州大）両氏に感謝する。

[1] G. Polya : Mahematical and plausible reasoning, vol. I & vol. II, Princeton U. P. 1954, 2nd ed. 1968.　ポリア著、柴垣和三郎訳、数学における発見はいかになされるか、1、帰納と類比、2、発見的類比、丸善、1959.（特に1巻、II章が、オイラーの発見を詳述する。）

[2] A. Weil : An approach through history, …, Birkhäuser, 1983.　ヴェイユ著、足立恒雄・三宅克也訳、数論－歴史からのアプローチ、日本評論社、1987.

[3] W. Dunham : Euler : The master of us all, Springer, 1999.　ダンハム著、黒川信重・若山正人・百々谷哲也訳、オイラー入門、シュプリンガー東京、2004.

[4] Jakob Bernoulli : Positionum de seriebus infinitis, in Die Werke von Jakob Bernoulli, Birkhäuser, 1993.（ヤーコプ・ベルヌイ、無限級数ノ扱ヒ、全5編。この内、第I編で逆数の級数等を扱い、逆平方数の級数についての告白がある。）ドイツ語訳、Übersetzt von G. Kowarewski : Über unendliche Reihen, Ostwald's Klassiker Nr. 171, Leipzig, 1909.

[5] James Stirling : Methodus Differentialis : sive Tractus de summatione et interpolatione serierum infinitorum, London, 1730.（世にスターリングの公式のみ有名だが、本書には無限級数の総和と補間に関して、詳細な記述がある。）英訳、Ian Tweddle : James Stirling's Methodus Differentialis : An annotated translation of Stirling's text, Springer, 2003.

[6] E25, Leonhard Euler : Methodus generalis summandi progressiones, Com. acad. scient. Petropol., 6, (1732/3), 1738.

[7] Colin Maclaurin : Treatise of fluxions, Edinburgh, 1742.

[8] E20, Leonhard Euler : De summmatione innumerabilium progressionum, Com. acad. scient. Petropol., 5, (1730/1), 1738.

[9] John Wallis : Arithmemetica infinitorum, Cambridge, 1656.

[10] 杉本敏夫：オイラー積分とガウス、2006. 10, 津田塾大学、数学シンポジウム〔翌年印刷された〕。さらに、オイラー積分とガウス（続）を 2007. 10 に報告。

[11] E41, Leonhard Euler : De summis serierum reciprocarum, Com. acad. scient. Petropl., 6, (1734/5), 1740.

[12] E63, Leonhard Euler : Démonstration de la somme de cette suite 1+1/4+1/9+1/16+1/25+1/36+etc., J. litter. d'Allemagne, de Suiss et du Nord (La Haye) 2 : 1, 1743.

[13] E101, Leonhard Euler : Introductio in analysin infinitorum, Tomus prinum, (1745), 1748.　オイラー著、高瀬正仁訳：オイラーの無限解析、海鳴社、2001.