数理解析研究所講究録
第1583巻 2008年 232-245

リュープセンの数学教科書に見られるガウスの影響

立教大学名誉教授　公田　藏　(Osamu Kota)
Professor Emeritus, Rikkyo University

1. Lübsen 編集の数学教科書

H. B. Lübsen（リュープセン，リューブゼン，1801 − 1864）は19世紀ドイツの数学教師で，教科書著作者である．Dunnington [3] によれば，彼ははじめ海軍の下士官であったが，Gauss の学生となり[1]，その後努力を重ね，Hamburg で教師として成功した人である．Lübsen の編集した数学の教科書は当時ドイツで広く用いられていたものの一つである．Lübsen の教科書には師 Gauss の影響が見られる箇所がある．本稿ではこのことについて考察する．なお，次の節で述べるように，Lübsen の教科書はわが国にとってまったく無縁のものではない．

Lübsen 編集の数学教科書には次のものがある．いずれも Leipzig で出版されている．「独学のための」，あるいは「実際生活の目的を考慮した」というサブタイトルがつけられているのが特徴である．

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens.（1835，15版1872，20版1880）

Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Ebene und körperliche Geometrie. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens.（1851，17版1872，25版1882）

Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens.（1851，9版1872）

Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höhern Geometrie zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste.（1841，9版1872）

Ausführliches Lehrbuch der Analysis, zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens.（1853，5版1871）

[1] Lübsen の "Arithmetik und Algebra" の中には "Unser sel. Lehrer Thibeault" という表現がある（第15版では p. 243 の脚注）ので，Lübsen は Göttingen で Gauss のほかに B. F. Tibeault（1775 − 1832）の数学の講義も聴いたと考える．

Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung (Differential- und Integral-Rechnung) zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. (1855，4版1869)

Einleitung in die Mechanik. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens. (1857，3版1869)

これらの書物の，このリストで下線をつけて示した版は国立国会図書館に所蔵されている．本稿を作成するに当たっては，これら国立国会図書館所蔵本を利用した．これら今回利用した版には初版の刊行年は明記されていないが，初版の序文がつけられているので，上記リストには，初版の序文に記された日付によって初版の刊行年を推定して記した．ただし "Elementar-Geometrie" については，この書物が引用されている Gauss 全集第8巻（[8]，VIII，p. 196）および Cajori（[1]）の記述によった．

なお，藤澤利喜太郎『算術条目及教授法』には「りゆぶせんノ計算書」という文言がある（[7]，p. 18）．「計算書」は Rechenbuch，すなわち初等算術書であるから，Lübsen の編纂した教科書には "Arithmetik und Algebra" の前段階の初等算術の書物もあったと考えるが，筆者は Lübsen の "Rechenbuch" は未見である．Lübsen の "Arithmetik und Algebra"（第15版）にも彼の "Rechenbuch" について言及している箇所はない．

Lübsen の編纂した数学の教科書の中で，特に "Arithmetik und Algebra" は多年にわたって版を重ね，多くの生徒に影響を及ぼしたという．"Arithmetik und Algebra" は，最初に算術（specielle Arithmetik）について簡単にひととおりのことが述べられているが，主たる内容は代数（allgemeine Arithmetik, Algebra）である．その初版には，Gauss の友人で，Altona（当時は Hamburg 郊外の村）の天文台で観測を行っていた Schumacher（Heinrich Christian Schumacher，1780 – 1850）による簡単な序文があり，その中に Lübsen がかつて Gauss のもとで学んだことが記されている．この序文が書かれたのは1835年3月6日である[2]．1845年刊行の第2版には Lübsen 自身による序文がつけ加えられ，そこには科学・技術の進歩・発展にともなう数学の重要性と，適切な数学教育の必要性が述べられている．この序文の末尾に "Altona, den 7. Januar 1845" と記されているので，当時 Lübsen は Altona に住んでいたことが知られる．Lübsen の他の書物でも，1840年代の版に添えられた序文には Altona と記されているので，当時 Lübsen は Altona に住み，Schumacher のいた Altona の天文台に関係していたと思われる．

Lübsen の教科書の，初版の序文に記されている日付から判断すると，"Arithmetik und Algebra" についで刊行されたのは "Höhere Geometrie" である．その内容は解析幾何学で，当時の「高等幾何学」あるいは「近代的幾何学（modern geometry）」であった射影幾何学的な内容は記されていない．"Analysis" は今日の意味の解析学ではなく，その内容は代数の続きで，初等代数と微分積分との中間の段階である．順列，組合せ，数列の続き（高次の等差数列，多角数など），複素数，方程式論，級数，連分数，補間法が扱われている．"Mechanik" は初等的な力学（流体力学を含む）で，微分積分を用いた高等力

[2]この序文の文言はいささか「儀礼的」なように思われる．Schumacher は，Lübsen に請われるままに，Lübsen の書物の原稿を丁寧には読まないで序文を書いたようにも思われる．

学ではない．普通ならば“Arithmetik und Algebra”の次に刊行されるのは“Elementar-Geometrie”であろうが，初版の序文の日付から判断すると，この刊行は比較的遅い．しかし，Lübsenは，“Arithmetik und Algebra”第2版（1845）の序文の中で，いろいろな人々から，“Arithmetik und Algebra”（第1版）ならびに私の“Elementar-Geometrie”，“Trigonometrie”，‘Höhere Geometrie”についての好意的な言葉が述べられ，数学の他の分野についても同じような書物を編纂してほしいという要望があったということを記しているので，Lübsenの数学教科書は，上に記した一連の書物のうちのいくつかに対しては，その「旧版」があったと考えられるが，それらの「旧版」について言及されたり引用されたりしているものは筆者は未見であり，さきに記した初等算術書（Rechenbuch）とともに，詳細はわからない．

Lübsenの一連の教科書は，全体としては19世紀中頃のギムナジウムの数学の教育課程に近い内容であるが，程度はギムナジウムの数学よりはやさしいと考える[3]．Lübsenは教科書の編纂に当たって，初学者には難しい内容や，本文の補足や注意などは，＊印をつけたり，巻末の「付録（Anhang）」にまわすなどの，学習者のためのいろいろな工夫をしているが，この書物だけで数学を独学で学ぶのは，そうやさしくはなかったと思われる．Lübsenは独学で数学を勉強した人であるから，あるいは他の人も同様にできると思ったのかもしれない．

2．Lübsenの教科書と日本

わが国では，明治5年（1872）8月に「学制」が制定・公布（頒布）され，ついで関連した諸法令が制定，公布された．学制公布後間もなく，明治5年8月に制定された「外国教師ニテ教授スル中学教則」は，わが国で最初の中学の教育課程に関する法令であるが，そこには，科目ごとに英，仏，独に分けて教科書名が例示され，各級ごとに，その教科書の章の表題名などを記して，その級では教科書のどの部分，あるいはどのような内容を教えるかが記されている．学制によれば中学の教育課程は下等中学，上等中学各3年であるが，この教則では中学の課程の前に，外国語で教授される予科1年が加えられている．また，教則では予科を初級，上級の二つの級に分け，下等中学，上等中学ともそれぞれ第六級から第一級までの六つの級に分けて記している．各級は6箇月で，第六級が最初で，第一級が最上級である．この教則は明治5年10月と翌6年1月に改正されている[4]．10月の改正は文言の整備であるが，このとき，「教則中書名ヲ掲クルハ順序ノ大旨ヲ示スモノナリ必シモ拘泥スヘカラス」という一条もつけ加えられた[5]．

[3]たとえば，当時のギムナジウム用の問題集の一つに，E. Heis, *Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, in systematischer Folge bearbeitet für Gymnasien, Realschulen, höhere Bürgerschulen und Gewerbschulen*（第29版, Köln,1872）がある．これは多年にわたって版を重ねた代数の問題集で，平易な問題も数多く収録されているが，Lübsenの“Arithmetik und Algebra”や“Analysis”で取り扱われている内容・程度よりは程度が高く，難しいものも収録されている．

[4]明治5年11月，太陰太陽暦を廃して太陽暦を採用するとの詔書が出され，明治5年12月3日（太陰太陽暦）を明治6（1873）年1月1日（太陽暦）と定めたので，実質的には隔月の改正である．なお，本稿での年月日の記述は，当時行われていた暦によった．従って，明治5年12月3日より前の日付は，太陰太陽暦によっている．

[5]明治6年1月の改正は，学科課程の一部変更である．主たる部分は，凡例の最後に「此中学ノ教則ニ於テハ修身学ノ一課ハ教授スヘカラス」という一則の追加である．それに伴って，修身に配当していた授

この教則の，ドイツ語で教授する場合の数学の書名の中に,「リユブセン氏算術書」,「リユブセン氏数理書」,「リユブセン氏代数書」がある．いずれも「アリトメチツクウントアルゲブラ」と振り仮名がつけられている．これはLübsenの“Arithmetik und Algebra”である．

遠藤利貞の『大日本数学史』の明治五年の項には，学制公布当時の状況と，この教則の概略，教則に記された数学書が次のように記されている．原文は縦書きで，括弧内は原文では割り注のような形式で記されている．

> 五年大中小学ニ課スル所ノ数学ハ一ニ西算ノミヲ用ヰシム、[6]
> ……五月師範学校ヲ置ク、七月学制ヲ頒布ス[7]、……数学ハ通シテ唯洋算ノミヲ用フル者トス、小学校漸ク各地ニに建ツ、別チテ上等下等トシ、数学ハ平算全体ヲ以テ之ニ充テ、一切珠盤ヲ廃ス、乃チ西洋ノ算術書ニ就キ、僅ニ翻訳且ツ纂集シテ之ニ課スルニ過キス、大抵先ツ「アラビヤ」数字即１２３４５６７８９10等ヲ筆記セシメ、而後、命位、加減、乗除、ヨリ、諸等数（度量衡貨ノ類）分数、小数、諸比例、開平、開立法、等ヲ課スルモノトス、数学啓蒙ハ参考書中最モ大ナル者ノ如シ、又中学校ヲ分チテ上等下等トス、各六級ヨリ成ル者トシ、最上級ヲ第一級トシ最下級ヲ第六級トス、其下等中学ニ於ケル、第六級ハ算術（最大等数、最少公倍数、分数変化、分数四術等）第五級算術（小数四術、同還原法、比例性質、正比例、転比例、按分逓折比例、合率比例、連比例、及雑問等）第四級算術（開平、開立法、求積術等）第三級算術（商業算、利息算）幾何及代数、第二級算術、（前ノ続キ）幾何、代数（前ノ続キ）第一級算術（対数用法、前課温習）幾何、代数（各前ノ続キ）但シ代数英仏独ノ三学トス、（其用書ハ英ダービス氏幾何学書同氏代数学書、仏レジヤンドル氏幾何学書ソンネ氏代数学書、独ウイーガンド氏幾何学書リユプセン氏数学書）等毎級連用セリ、其上等中学ニ於テハ、第六級五級四級三級皆幾何代数二科トシ、（皆前書ヲ続用ス）第二級第一級ニ至リテハ之ニ測量大意、重学大意ヲ加ヘタリ、故ニ幾何学ノ最終ハ立体或ハ平面三角法ニ及ヒ、代数学ニ在テハ比例或ハ級数ニ及ベリ、然レトモ当時学生ノ進歩未タ此ニ至ラズ、

小倉金之助『数学教育史』には，明治5年，学制頒布後間もなくの中学校の数学の内容が記されている．同書pp. 307 – 308に記されている「数学の要目」は，その内容から,「外国教師ニテ教授スル中学教則」の英語の場合の教則によっていることがわかる．

業時間を他の学科目にまわし，いくつかの科目の授業時間数が改められている．これは，外国人教師，もしくは欧米の書物による「修身」は，西洋の，キリスト教に基づく倫理や道徳であり，わが国の国情に合わないと考えられたためであると考える．なお，明治23（1890）年の教育勅語発布以前は，中学校の修身では論語などが教科書として用いられた場合が多かった．明治6年1月の改正では，数学に関しては変更はない．

[6]『増修日本数学史』では，この後に「わが算家無事なり。みな筆を投じたる歟。」という文言（表記は昭和36年版による）がつけ加えられている．

[7]遠藤利貞は学制頒布を「七月」と記しているが，正しくは「八月」である．

「外国教師ニテ教授スル中学教則」の上等中学第五級の代数には,「独　函数及式」と記されている．これはLübsenの“Arithmetik und Algebra”の第13巻（Buch）の表題“Von den Functionen und Formeln”を邦訳して記したものであるが，これはわが国の教育課程・教育内容に関する法令・規則等に「函数」という用語が記された最初のものである．Functionを「函数」と訳したのはAlexander Wylieと李善蘭で，この訳語を用いた『代微積拾級』は幕末に日本にもたらされていた．教則はこの訳語によって「函数」と記したのである．しかし，Lübsenの“Arithmetik und Algebra”の第13巻での函数の取り扱いは不十分かつ不完全である．変数の概念は示されず，函数の定義は不明確である．しかしながら，教則は定められても，遠藤利貞も述べているように，当時この教則の通りに実施することは困難であった．ことに，ドイツ語による教授は，実際には行われることは極めて少なかったのである．したがって，(「幸いにして」といってもよいであろう）Lübsenの“Arithmetik und Algebra”の不明確な函数の定義がわが国でひろく知られることはなかったのである．

Lübsenが“Arithmetik und Algebra”についで編集・刊行した“Höhere Geometrie”は，さきに述べたように，内容は解析幾何であるが，第9版で42ページにわたる「序論(Einleitung)」には函数，グラフ，座標，方程式の表す図形についての説明もあり，そこでは変数の概念が述べられ，変数の間の関係として函数が定義されているが，実質的には「函数＝式」である．“Arithmetik und Algebra”も版を改めるときに函数の定義をきちんとしたものに書き改めてもよさそうなものであるが，Lübsenはそれはしていない．

国立国会図書館所蔵のLübsenの教科書（前節のリストで下線をつけた版）は，装幀と貼り付けられたベルリンの古書店のラベルとから，1873年か74年頃に一括してドイツから輸入されたものであり，蔵書印から，最初は文部省蔵書であり，国立国会図書館の前身である東京図書館の蔵書となったのは明治8年（1875）である．このうち，“Höhere Geometrie”の前見返しには，“T. Shibata aus Japan. Berlin, den 10ten März, 1873.”, “Analysis”には“T. Shibata aus Japan. Berlin, den 2ten April, 1873.”というペン書きの署名がある．どちらも同じ筆跡である．また，“Analysis”には同じ筆跡で本文の欄外に書き込み（本文の誤りの訂正，ペン書き）があり，“Höhere Geometrie”には所々に鉛筆で下線が引かれている[8]．ベルリンには1871年から74年まで柴田承桂が留学していたが[9]，「しょうけい」ならば“S. Shibata”であって“T. Shibata”ではない.「しょうけい」でなく別の読み方，あるいは別名なのか，それとも別人なのか，目下のところ不明であるが，当時ベルリンに．“Shibata”という姓の，理科系の勉強をしていた日本人が複数滞在していたということは考えにくいので，筆者は柴田承桂の別の呼び方であろうと推測している．

わが国の数学史・数学教育関係の文献でLübsenに言及しているものは遠藤利貞『大日本数学史』，藤澤利喜太郎『算術条目及教授法』のほかには小倉金之助『数学教育史』，近藤洋逸『幾何学思想史』があるくらいである．小倉はCajoriの“A History of Elementary Mathematics”の邦訳に際してLübsenを知り，近藤は幾何学思想史の研究において，Gauss全集の第8巻でLübsenを知ったと考える．なお，近藤はLübsenのüのウムラウトを取っ

[8]この下線が，“T. Shibata”によるものかどうかは不明である．
[9]柴田承桂（しばた　しょうけい．1850 − 1910）．有機化学，薬学者．

て Lubsen と記し,「ループセン」と記している.

3. Lübsen の教科書と Gauss — 特に代数に関して

Lübsen の教科書には Gauss の影響を受けている箇所が数多くある. それらは, Gauss の直接の影響, すなわち, Lübsen が直接 Gauss から教わったことがらと, 間接の影響, すなわち, Gauss の著作あるいは Gauss 以外の人の著作や言葉などからによるものの二つに分けられる. このうち, 前者, すなわち, Lübsen が直接 Gauss から教わった, 話を聞いたと記している箇所は, 教師としての Gauss の一つの側面を見せている点で, 数学史的興味がある.

Lübsen が, Gauss から教わった, あるいは Gauss から話を聞いたと記していることがらの中には, Gauss の業績もあるが, Gauss 以外の人によるものも含まれている. たとえば, Lübsen は "Infinitesimal-Rechnung" の中で, 条件付き極値の問題について, Gauss から学んだとして Lagrange の未定乗数法を記しているが, そこには Lagrange の名前は記されていない. 他方, Gauss の業績であっても, Gauss の名前が記されていないものもある. たとえば, "Analysis" の方程式論には代数学の基本定理の内容は述べられているが, Gauss の名前も「代数学の基本定理」という名称も記されていない. 補間法では「Gauss の補間公式」は名前だけが記され, 内容についての説明はないが, 脚注に文献が示されている. また, Gauss の名前は記されていないが, Gauss から学んだと思われる箇所もある.

こうしたことから考えると, Gauss は, 自分の得た結果を含め, この定理は何某によるものであるということを, 学生にはあまり話さなかったのではないかとも思われる.

(1)　Lübsen の教科書の複素数に関する部分は, 大体は直接 Gauss から学んだことによっていると考える.

Lübsen は "Arithmetik und Algebra" 第 15 版 (1872) の本文では簡単に負の数の平方根と複素数について記しているだけであるが, 巻末の付録には複素数の四則計算が記されている. 本文では, 方程式 $x^n = a$ は n 個の根をもつが, 初等数学ではもっぱら実根のみを扱うとしているし, 本文で扱われている方程式は大体は実根のみをもつものである. 当時は虚数はもとより, 負の数さえも「数 (Zahl)」としての認知度は低かった時代であり, Lübsen の "Arithmetik und Algebra" でも本文では負の数 (Lübsen は「負の量 (negative Grösse)」という表現を用いている) に関する計算は簡単に扱い, 付録でやや詳しく取り扱っている. Lübsen は付録で虚数について,「想像上の量 (imaginäre Grösse) や不可能量 (unmögliche Grösse) ではなく, Gauss の選んだ名称である側方量 (laterale Grösse) [10] のほうが適切である」と記し, 詳しくは "Analysis" の付録を参照するように記している.

"Analysis" の本文では複素数とその幾何学的表示 (Gauss 平面) や二項方程式に関してかなり丁寧な説明がなされ, 付録の「虚数の理論 (Theorie der imaginären Grössen)」には, Gauss が, 彼の 1831 年の論文

[10]「側方量 (laterale Grösse)」は純虚数を指す用語である.

Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda

([8], II, pp. 93 – 148 に収録）の「内容紹介」として 1831 年 4 月 15 日に行った，論文と同じ表題の講演の記録（Göttingische gelehrte Anzeigen, 1831 April 23 に掲載されたもの．[8]，II，pp. 169 – 178 に収録）の，複素数に関する部分が掲載されている．ラテン語で記された Gauss の論文の主たる内容は表題「四次剰余」の示すように整数論であるが，その際に複素整数（いわゆる Gauss の整数）が用いられるので，複素数についても記されている．講演のほうは，最初に簡単に四次剰余について述べ，関連して複素整数について述べた後に，複素数一般について，特に複素数が想像上の（imaginär）ものや不可能な（unmöglich）ものではないことを述べ，複素数の幾何学的な意味づけ（複素数の幾何的表示）について述べられている．従って，講演のほうは主たる内容は複素数である．Lübsen は，"Analysis" の付録でこの Gauss の講演記録の後半の複素数に関する部分を転載し，ここに述べられていることがらは，その前年（1830 年）に Gauss の口から聞いたと記している．

(2)　"Arithmetik und Algebra" の巻末の付録には，12 進法や 2 進法などに関する記述があり，それらについて，当時のふつうの初等数学の教科書よりは詳しく説明されている．そこには Gauss の名前は記されていないが，この部分は Gauss の影響をうけており，加えて Lübsen 自身の興味・関心もあったと考える．

(3)　"Analysis" の方程式論では，一つの文字に関する多項式は，複素数まで考えると一次因数に分解されることが述べられ，実係数の場合についてその証明が記されている（これは第 2 版以降であるという）が，さきに記したように，「代数学の基本定理」という名称も，Gauss の名前も記されていない．

(4)　"Infinitesimal-Rechnung" では，微分法を用いて，二つの問題

与えられた面積をもつ長方形の中で，周の長さの最小なものを求めること．
与えられた周の長さをもつ長方形の中で，面積の最大なものを求めること．

の解を示した後に，Lübsen は，この二つの問題の解はいずれも正方形で，底辺の長さと高さとの比は同一であるが，このことについて，Gauss は，ここには精緻な形而上学がある[11] と注意したと記している．

(5)　Lübsen の一連の教科書では，数値計算に関する内容が比較的多いのが特徴であるが，これはサブタイトルにあるように「実際生活の目的を考慮」したためとも考えられるが，Gauss の影響であると考える．

たとえば，"Arithmetik und Algebra" では，常用対数 log 5 の値，すなわち方程式 $10^x = 5$ の根の，近似値を次のようにして求めている．Lübsen は「区間」という用語や区間の記号は用いていないが，ここでは区間という用語と記号を用いて説明する．

[11] これがどのようなことを指すのかは，それ以上の説明がつけられていないので不明である．

まず $10^0 < 5 < 10^1$ である．そこで区間 [0, 1] の中点 1/2 における 10^x の値を調べると，$10^{1/2} = \sqrt{10} = 3.1622776601\ldots\ldots$ であるから，$10^{1/2} < 5$，よって $10^{1/2} < 5 < 10^1$ である．次に区間 [1/2, 1] の中点 3/4 における 10^x の値を調べると，

$$10^{3/4} = \sqrt{10^{3/2}} = \sqrt{10 \cdot 3.1622\ldots\ldots} = 5.6234132\ldots\ldots$$

以下次々に区間を半分に縮小して，挟み合いにより方程式 $10^x = 5$ の根の近似値を求める．Lübsen は，この操作を 22 回ほど繰り返すことにより，

$$10^{2931693/4194304} = 5.00000086\ldots\ldots$$

が得られ，従って $\log 5$ の近似値として

$$\log 5 = \frac{2931693}{4194304} = 0.6989700\ldots\ldots$$

が得られるが，この近似値は小数第 7 位まで正しいと記している．区間縮小法によって $\log 5$ の近似値を求めることは Euler がすでに "Introductio in Analysin Infinitorum" の第 1 巻で行っているが（[5]，106 節，邦訳 [6] の pp. 87 – 89），Euler が対数のままで扱っているのに対し，ここでは指数を用いている．指数を利用するほうが区間縮小法の操作がわかりやすく，計算も次々に平方根を求めていくだけであるので，これは Gauss によるものであろうと考える．

数値計算では，特に平面図形の面積に関連するものが多い．"Elementar-Geometrie" の最後の巻「代数の幾何への応用」には，Gauss によるとして多角形の面積を各頂点の座標を用いて表す式が，例によって示されている．これは各頂点を通り x 軸に垂直な直線を引いて多角形を台形や三角形に分割して面積を求めるものであり，三角形の面積を，三頂点の座標を用いて表す公式のはるかな一般化である．Lübsen は，この式の「最初の段階のもの」は，Gauss がすでに 1790 年には得ていたと記している．

"Höhere Geometrie" では，放物線（の弧）$y = \sqrt{ax}$ と x 軸，および x 軸に垂直な直線とで囲まれる部分の面積を無限等比級数を利用して求め，ついでこれを利用して Simpson の公式を導いているが，そこには Simpson の名前は記されていない．Simpson の公式は普通は積分法（二次函数の積分）を用いて導くのであるが，ここでは積分法を用いずに導いている．応用上重要な公式であるので，積分法という「高等数学」を用いないこの導き方は Gauss から教わったと思われる．

4．Lübsen の "Elementar-Geometrie"

Lübsen の教科書の中で特徴のあるのは "Elementar-Geometrie" である．"Elementar-Geometrie" は実用的色彩が強く，特に陸地測量に関連した内容がいろいろと扱われている．これは，書物のサブタイトルの「実際生活の目的を考慮して」によるものと思うが，Lübsen が Gauss のもとで学んでいた時期およびその前後は Gauss が測地学，陸地測量に従事していた時期であり，Gauss や Schumacher の影響が大きいと考える．

"Elementar-Geometrie" では，直線を

直線とは，その線上の二点を固定して，回転させても不変な線である

と定義している．Lübsenは，脚注に，この直線の定義は望遠鏡についての説明を受けたときにGaussから聞いたものであって[12]，理論的にも実用上も重要であることを記している．Stäckelは，Gaussは若いときから直線の定義についてこの考えをもっており，1796年にWolfgang Bolyaiにこの考えを述べたと記している（[16]，p. 43）．

Heathは，彼のユークリッドの『原論』の英訳の註の中で，この直線の定義はLeibnizやSaccheri，Krafft，Gaussが独自に見出したもの（original discovery）ではなく，少なくとも西暦紀元のはじめ頃まで遡ることのできるものであること，Schottenは，この定義には直線の概念と，直線は二点によって決定されるという直線の性質が無意識に仮定されており，論理的には循環していると主張したということを記している（[10]，I, p. 168）．

Lübsenの教科書では，直線が二点で決定されることを述べた後に，

点の列があって，この点列のどの三点も一直線上にあるならば，この点列のすべての点は一直線上にある．

という命題が述べられてその証明が記され，ついで

二本の標尺を立てたとき，その間にもう一本の標尺を立てて，これら三本の標尺を立てた地点が一直線上にあるようにすること．

二つの地点の間に二本の標尺を立てて，標尺を立てた地点とはじめの二点の，合わせて四点が一直線上にあるようにすること．

など，上の命題の測量への応用が扱われ，そこでは実際の作業によっても確かめるように記されている．ここにはGaussの名前は記されていないが，最初の命題は通常の幾何の書物ではあまり見かけないものであるが，幾何学の命題としておもしろい上に，実際の測量の作業の際の理論的な根拠の一つとなるものであるから，これはGaussによるものであり，Gaussはそれを根拠として，Lübsenの本にあるような方法で，測量技術を説明したと考える．また，作業は実際に陸地測量で行われていたことの実習である．巻末の付録「実用幾何（practische Geometrie）」には陸地測量の技術に関する内容が記されている．

Lübsenは，“Höhere Geometrie”の「まえがき（Vorrede）」の中で,「私の敬愛する先生は，理論は，ちょうど磁石が鉄を引きつけるように，応用を引きつけるといわれた（Die Theorie, sagte mein allverehrter Lehrer, zieht die Praxis nach sich, wie der Magent das Eisen,）」と，師Gaussの言葉を記している．上に引用した命題はそのような，理論が応用を引きつける一つの例であると考えられる．

“Elementar-Geometrie”の内容の大部分は普通のユークリッド幾何学であるが，ユークリッドの『原論』そのものに従ったものでも，当時の新しい幾何の教科書であったLegendreの“Éléments de Géométrie”（初版1794）に従ったものでもない．最後に正多面体につ

[12] Stäckelはこれを1830年のこととしている（[8]，VIII，p. 199）．

いての簡単な記述があるが[13]，どういうわけか，そこには図が記されていない．簡単に記述したので図を省略したのであろうが，初学者にはいささか不親切である．

Lübsen の "Trigonometrie" は平面・球面三角法を簡潔にまとめたものである．Lübsen は序文で，この本は著者の25年の経験に基づいて，平易かつ速やかに三角法を学ぶことができるように編纂されたものであると記している．三角形の解法では対数を用いての数値計算が扱われており，それは測量に利用されるが，Lübsen に限らず，どの三角法の書物でも扱っている内容であり，Lübsen の "Trigonometrie" は特に測量への応用に重点をおいた書物ではない．球面三角法では，「この公式は Gauss によるものである」と，Gauss についての簡単な言及がある箇所がある．

5．Lübsen の "Elementar-Geometrie" に対する Cajori の批判に関連して

Cajori は，"A History of Elementary Mathematics" の中で，平行線の取り扱いに関連して Lübsen の "Elementar-Geometrie"（第14版，1870）を酷評し，非難している（[1], pp. 279 – 280）．これに対して，小倉金之助は『数学教育史』において，Cajori などの数学史家は教育史的考察が欠如しているとしてこれに批判を加えている．小倉は Lübsen の "Elementar-Geometrie"（第25版，1882によっている）について次のようにいう（[15], pp. 208 – 210）：

> それは直観的考察と実験実測とを，極めて色濃く表現した所の，「実際生活を考慮して」書かれた著述であった．それは全然ユークリッド流ではなかった．公理などは判然と書かれて居ない．
>
> リューブゼンの此書は，従来の数学史家から酷評を浴びせられた．マックス・シモンは之を「基礎のない書物」と呼んだ．カジョリに至っては，ドイツでは
>
> 「十九世紀の中頃に最も流行した教科書，及び十九世紀末の人気ある教科書でさへ，科学的見地から見れば，不満足極まるものである．かくてガウスを生んだドイツの地で，而もロバチェフスキー，ボリアイの不朽の作が顕はれてから夫々41年，37年も経た後に，1870年ライプチヒ出版のリューブゼンの初等幾何学第14版の中には，平行線公準の証明を見出すのである！　また吾々が，幾何学は連続量を取扱ひ，そして連続量としては通約し得べき量が寧ろ格段の場合に過ぎないことを顧みるならば，リューブゼンが通約すべからざる量について，一言も述べなかったことに，驚かざるを得ないと思ふ」
>
> と評してゐるが，私はシモンやカジョリが，教育史的考察の欠如せるに，驚かざるを得ないものである．私はペスタロッチ的なリューブゼンこそ，寧ろ現代的であったと考へる．

Cajori は Lübsen の "Elementar-Geometrie" 第14版（1870）によっているが，国立国会図書館所蔵の第17版（1872）には "Siebenzehnte unveränderte Auflage" とあり，序

[13]正多面体はユークリッド『原論』第13巻の内容であるが，この巻は普通の教科書用のユークリッド『原論』では省略されていた．

文も第3版（1857）より新しいものはつけられていないので，第17版の内容は第14版と変わりがないと思われる．小倉『数学教育史』の記述は，Lübsen の “Arithmetik und Algebra” は第20版（1880），“Elementar-Geometrie” は第25版（1882）によっており，同書には Lübsen の “Elementar-Geometrie” の中の連続した2ページの写真版が掲載されているが，それは第17版（1872）とは割り付けが異なり，文言も異なっている．Lübsen は1864年に亡くなっているので，第17版から第25版の間に，いつ誰が手を入れたかは不明である．

Cajori は平行線の取り扱いに関して Lübsen を非難しているが，小倉が記しているように，公理などははっきりと記されているわけではないので，「第五公準を証明した」といっても，何を前提としていたかによって批判の仕方が変わる．公理がはっきりしていないのであるから，批判するにしても論点は曖昧にならざるを得ないと考える．Gauss は早くから非ユークリッド幾何学の考えに到達していたけれども，平行線の問題に関しては自分の考えをごく一部の友人にしか伝えなかったし，Schumacher や Olbers，Bessel なども，Gauss の考えを口外することはしなかったと考える．Gauss も講義などでは平行線の問題についてはなるべく立ち入らないようにしていたと思われる．Lobachevskii と Bolyai によって非ユークリッド幾何学が見出されたのは1820年代の後半から1830年代へかけてであるけれども，非ユークリッド幾何学が数学界にひろく知られるようになるのは19世紀後半，特に Gauss の没後のことであり，Lübsen は，Schumacher とは関わりがあったけれども，平行線の問題に関する Gauss の考えも，非ユークリッド幾何学も知らなかったと考える．

しかし，Lübsen は，当時の多くの数学者と同様に，若い頃から平行線の問題には関心をもっていたようである．1835年12月31日付の Schumacher から Gauss への書簡には Lübsen の平行線論について記されている．Schumacher は

> Lübsen は彼の平行線論で私を悩ませています. ... ... ここに彼の証明を同封いたします. Lübsen は平行線についての幾何学的な証明ができると確信しています. 彼は頭がよく，控え目な男ですから，[先生から] 彼に一言か二言言葉をかけて，彼を思い違いから救うようにしていただきたいのです. 私は彼の間違いを明確に示すことができませんので ... ...

と記している[14]．それに対する Gauss から Schumacher への返信（1836年1月2日付）には，Lübsen の所論のここが誤りであるということが記されている．Gauss 全集には Lübsen の平行線論に関してのこの Schumacher と Gauss の往復書簡が収録されているが（[8]，VIII，pp. 230 – 231），一部分だけの抄録であるので，Lübsen がどのような「証明」をしたかについて詳しくはわからないが，双曲線のような無限に延びた分枝をもつ曲線を考えて「証明」したと思われる．

筆者は，Lübsen の一連の教科書の中で，数学的内容の順序から考えて，普通ならば早く出版されてよい初等幾何学がかなり遅く出版されたこと（あるいは，初等幾何学の「旧

[14] Schumacher が Lübsen の “Arithmetik und Algebra” の初版に寄せた序文と，この Schumacher から Gauss への書簡は，1835年頃の Schumacher と Lübsen の間のかかわりの様子を，ある程度見せている．

版」の改稿版の編纂が遅れたこと）は，代数や解析幾何よりも初等幾何の教科書を編纂するほうが骨が折れることにもよるが，それに加えて，1840年代には，Lübsen が Altona の天文台に関係していて多忙であったのではないか，さらには，Lübsen の平行線論とそれに対する Gauss の誤謬の指摘が関係しているのではないかとと推測する．しかし，それを裏付けする史料はない．

Lübsen の "Elementar-Geometrie" には，角の三等分の作図，π の無理数性とも，「未解決」であると記されているが，π が無理数であることは1772年に Lambert によって証明され，任意の角の三等分が作図不能であることは1837年に Wantzel によって証明されている．後者については，当時の新しい結果であるから，Lübsen はまだ知らなかったということがあるかもしれない．前者については知っていてもよさそうに思われるが，これは，Gauss がこうした問題については講義などでふれることがなかったか，Lübsen がこうした情報が伝わりにくい環境におかれていたかであろうと考える．Lübsen と Schumacher との間には関わりがあり，Lübsen は Schumacher を頼りにし，Schumacher を通して数学の新しい知識を得ていたと考えられるので，あるいは Schumacher 自身，π の無理数性や角の三等分が作図不能であることが証明されたことを知らなかった（そういう問題には関心がなかった）のではないかとも思われる．

Cajori が批判している，Lübsen が "Elementar-Geometrie" で通約不能量に関することを扱わなかったことについては，Lübsen は幾何でも比例に関しては代数を利用すればよく，「実際生活」に配慮した幾何の入門書では通約不能量に関することがらは不要であると考えたからと思われる[15]．"Arithmetik und Algebra" でも無理数に関する取り扱いは比較的簡単である．実用上の数値計算では，有理数・無理数にはあまりこだわる必要がないので，Gauss は天文学や測地学に関する講義や，それに関連しての幾何学では，そのようなことがらにはふれず，それが Lübsen が「実際生活」に配慮した幾何の入門書 "Elementar-Geometrie" で通約不能量を扱わなかった一つの理由であると考える．

Gauss は算術（Arithmetik）[16] は純粋に先天的（a priori）なものであるとするが，幾何学は算術と同列にはおかず，力学と同様な位置づけをしている（1817年の Gauss から Olbers への書簡（[8]，VIII，p. 177）など）．Lübsen の "Elementar-Geometrie" はこのような Gauss の数学観・幾何学観の影響を受けていると考える．小倉は Lübsen の "Elementar-Geometrie" を「ペスタロッチ的」として評価しているが，Lübsen 編集の "Elementar-Geometrie" 以外の数学教科書には「ペスタロッチ的」なものがほとんど見られないことから，Lübsen の "Elementar-Geometrie" は，Gauss の幾何学観の上に立って編纂された，実用を重視した幾何学書と見るほうが妥当であると考える．

6.「無限」に関連して

Lübsen は，「ユークリッド幾何学においては，平行性に関しての完全で強固な証明は不

[15] 初等幾何における通約不能量の扱いについては，Cajori 自身は伝統的・保守的な立場であったと考える．

[16] ここでは便宜的に "Arithmetik" の訳語として「算術」を用いるが，"höhere Arithmetik" は整数論，"allgemeine Arithmetik" は代数であるから，「算術・代数」あるいは「整数論や代数」，もしくは「整数論」というほうがより適切かもしれない．

可能である」という Gauss の言葉を，“Infinitesimal-Rechnung” で曲線の漸近線を説明した箇所で，無限に延びた曲線（の分枝）と関連させて，「無限」ということと結びつけて引用しているが，これは彼が Gauss のこの言葉の真意（平行線公理の証明の不可能性，ユークリッド幾何学の体系における「平行線公理」の位置づけ，そしてそれゆえに，幾何学を算術と同列におかず，力学と同様な位置づけをすることになること）を理解できなかったことを示していると考える．Gauss は平行線の問題に関して学生に語らず，それが Lübsen の “Elementar-Geometrie” の平行線の取り扱い方につながり，Cajori の非難の一因になったと考える．なお，“Infinitesimal-Rechnung” における漸近線についての記述は，Lübsen の平行線論の誤りとも関連していると思われるが，詳細はわからない．

“Höhere Geometrie” では，双曲線の漸近線が扱われているが，そこに「この直線は双曲線と無限遠で出会う（tritt diese Linie mit den Hyperbeln erst im Unendlichen zusammen)」という文言がある．

“Arithmetik und Algebra” では，無限等比級数の和を取り扱う際に，「無限大」を形式的・機械的に，無造作に扱っている．“Analysis” では無限級数の収束・発散について多少ふれているが，やはり無限大・無限小の扱いは形式的・機械的である．“Infinitesimal-Rechnung”（4版，1869）では，「無限（無限量）を完全なもの（Vollendeten）として取り扱うことは，数学では決して許されていない．無限というのは，[ある変数が限りなく大きくなるときの] ある比がいくらでも近づいていく極限について述べるときのいい方で，言葉の綾に過ぎない」という，Gauss の言葉（Gauss から Schumacher への書簡，1831 年 7 月 12 日付（[8]，VIII，pp. 215 – 218，引用箇所は p. 216））を引用しているが，これは Lübsen は “Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher”（全 6 巻，1860 – 1869）によって知ったと考える．なお，ここに引用された Gauss の言葉は，平行線の問題に関連して述べられたものであって，その内容はともかく，前後の文脈からいえば，極限一般について述べられたものではない．Lübsen は，“Infinitesimal-Rechnung” においては，Cauchy の方法は初学者には難しいといって，主として Lagrange の方法によって記述している．しかし，Lübsen は，“Analysis” および “Infinitesimal-Rechnung” において，数学を手段ではなく目的として学ぶ際には，Cauchy の方法が重要であると述べている．“Infinitesimal-Rechnung”（初版，1855）は，Gauss の亡くなった年の出版である．初版につけられた Lübsen の序文には 1855 年 7 月と記されている．Gauss が亡くなったのは同年 2 月であるから，この書物に対する Gauss の「直接の影響」は少ないと見てよいであろう[17]．

以上述べたことから，Lübsen の数学教科書の中で，Gauss の影響を大きく受けているものは “Elementar-Geometrie” と “Analysis” であることがわかる．後者については，複素数に関する部分である．測量などの実用を意識した幾何学と複素数とはいずれも Lübsen が Gauss から直接学んだことがらである．

[17]Lübsen の “Infinitesimal-Rechnung” は Gauss の没後に編集されたとも考えられるが，旧師 Gauss に対する追憶のような表現は見いだせない．

参考文献

[1] Cajori, F., *A History of Elementary Mathematics*, 2nd ed., New York, 1916; Reprinted, Dover Publ., 2004.

[2] フロリアン・カジョリ著，小倉金之助補訳『初等数学史』上，下，小山書店[18]，1955 – 1956.

[3] Dunnington, G. W., *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, with additional materials by Jeremy Gray and Fritz-Egbert Dohse, MAA, 2004.

[4] 遠藤利貞『大日本数学史』，1896.

[5] Euler, L., *Introductio in Analysin Infinitorum*, I, Lausanne, 1748.

[6] レオンハルト・オイラー著，高瀬正仁訳『オイラーの無限解析』，海鳴社，2001.

[7] 藤澤利喜太郎『算術条目及教授法』，1895；復刻版，教育出版センター，1986.

[8] *Carl Friedrich Gauss: Werke*, I – XII, Göttingen, 1863 – 1933.

[9] Gray, J., *Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, Springer-Verlag London, 2007.

[10] Heath, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements: Translated from the Text of Heiberg, with Introduction and Commentary*, 3 vols., 2nd ed., Cambridge, 1925; Reprinted, Dover Publ., 1956.

[11] 近藤洋逸『幾何学思想史』，伊藤書店，1946.

[12] 近藤洋逸『新幾何学思想史』，三一書房，1966.

[13] 近藤洋逸著作集第１巻『幾何学思想史』，日本評論社，1994 [19].

[14] 公田　藏「明治５年「外国教師ニテ教授スル中学教則」の数学，特に代数の教科書について」，『数学教育史研究』7（2007），29 – 38.

[15] 小倉金之助『数学教育史』，岩波書店，1932.

[16] Stäckel, P., “Gauss als Geometer”, 1917（Carl Friedrich Gauss: Werke X2 に収録されている）.

[18] これは小倉自身が手を入れた最後の版である．
[19] これは近藤の前二著を対照してみられるように編輯されている．