数理解析研究所講究録
第1584巻 2008年 48-58

特異摂動系に対するモデル予測制御
Model predictive control for singular perturbation systems

名古屋大学 木村 元宣[1], 田地 宏一[2], 理化学研究所 細江 繁幸[3]
M. Kimura, K. Taji (Nagoya University) and S. Hosoe (BMC Riken)

1 はじめに

モデル予測制御 (Model Predictive Control) [4, 5] は，リシーディングホライズン制御（Receding Horizon control, 後退ホライズン制御）とも呼ばれる制御手法の一つであり，各時刻において有限区間の最適制御問題を解きながら制御入力を決定していく方法である．制御入力は，各時刻での状態によって決まるため，最適制御でありながら状態フィードバックの性質もあわせ持つ．

モデル予測制御は,

- 考え方は直感的でわかりやすい
- さまざまな制約条件を取り扱える
- チューニングが容易で，操業条件の変化などに対応しやすい

など，実際の現場で受け入れられやすい特徴を持っている．その一方，制御入力を決定するためには，各時刻で制約付き非線形最適化問題を解かねばならない．そのため，モデル予測制御は，その誕生以来，主として産業界とくに石油化学などの化学プラントに適用され，他の制御手法に比べ，より制約の限界に近いところでの操業を可能にしてきた．これらのシステムでは，サンプリング時間が比較的長いため，オンラインで制御入力を計算するのに十分な時間をとることが可能である．

近年，計算機の発達と低価格化により高性能の計算機が身近になってきたこと，また，こちらの影響が大きいと思われるが，最適化アルゴリズムの発展とそれに伴う商用ソフトウェアの充実と普及により，化学プラントだけではなく，ロボットや自動車などサンプリング時間の短いシステムへもモデル予測制御の適用が期待されている．そのため，実時間で制御入力を計算するための計算手法が研究され，注目を集めている [6, 7].

[1]トヨタ自動車勤務
[2]名古屋大学 大学院工学研究科機械理工学専攻
〒486-8603 名古屋市千種区不老町 taji@nuem.nagoya-u.ac.jp
[3]理化学研究所バイオミメティックコントロールセンター

本稿では，まず，次節でモデル予測制御問題を紹介したあと，特異摂動系とよばれる早いダイナミクスと遅いダイナミクスが混在したシステムに対し，二段階法に基づいた高速な解法を提案する．

2 モデル予測制御問題

本節では，モデル予測制御問題について簡単にまとめる．n 次元の状態 $x(t)$ および m 次元の制御入力 $u(t)$ に対し，次の状態方程式で表現される一般的な非線形システムを考える．

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1}$$

制御目的は，時刻 t における状態 $x(t)$ が与えられたときに，評価区間 (予測区間)$[t, t+T]$ において以下の評価関数を最小化することとする．

$$J = \varphi(x(T,t),t) + \int_0^T L(x(\tau,t),u(\tau,t),t)d\tau \tag{2}$$

ここで，$x(\tau,t)$ は $x(0,t)=x(t)$ を初期値とする時刻 $t+\tau$ における状態であり，$u(\tau,t)$ は時刻 $t+\tau$ における制御入力である．また，$L(x(\tau,t),(\tau,t),t)$ は非負の評価関数であり，$\varphi(x(T,t),t)$ は終端時刻 $t+T$ における状態 $x(T,t)$ に対する評価関数である．レギュレータや軌道追従などのよく取り扱われる問題では，関数 L や φ は二次関数が選ばれることが多い．例えばレギュレータ問題では，適当な半正定値対称行列 Q と正定値対称行列 R を用いて，

$$L := \frac{1}{2}x^TQx + \frac{1}{2}u^TRu$$

のようにする．

モデル予測制御では，目的関数として評価関数 (2)，制約条件として状態方程式 (1)，および状態 $x(t)$ と入力 $u(t)$ に対する制約を持つ次の最適制御問題を解く．

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & J = \varphi(x(T,t),t) + \int_0^T L(x(\tau,t),u(\tau,t),t)d\tau \\ \text{制約} & [\text{状態方程式}]\ \dfrac{dx}{d\tau} = f(x(\tau,t),u(\tau,t)) \\ & [\text{初期条件}]\ x(0,t) = x(t) \\ & \text{状態 } x(\tau,t) \text{ と入力 } u(\tau,t) \text{ に対する制約 } (0 \le \tau \le T) \end{array} \tag{3}$$

そして，得られた最適制御入力 $u^*(\tau,t)$ のうち，$u^*(0,t)$ のみを時刻 t における入力として用いる制御手法である．

最適化問題 (3) は，連続時間問題であり，解析的な解を求めるのはほぼ不可能である．そこで，問題 (3) を評価区間 $[t, t+T]$ を時間軸 τ に沿って，サンプリング時間 $\Delta\tau = T/N$ で N ステップに離散化した次の離散時間最適制御問題を考える．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & J = \varphi(x_N(t), t) + \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} L(x_i(t), u_i(t), t)\Delta\tau \\
\text{制約} & [\text{状態方程式}]\ x_{i+1}(t) = x_i(t) + f(x_i(t), u_i(t))\Delta\tau \\
& [\text{初期条件}]\ x_0(t) = x(t) \\
& \text{状態}\ x_i(t)\ \text{と入力}\ u_i(t)\ \text{に対する制約}\ (i = 0, 1, \ldots, N-1)
\end{array}
\tag{4}
$$

ここで，$x_i(t), u_i(t)$ はそれぞれ，$x_i(t) = x(t + i\Delta\tau)$, $u_i(t) = u(t + i\Delta\tau)$ を表す．実際には，時間軸 t についてもサンプリング時間 $\Delta\tau$ で離散化することが多いが，必ずしも t と τ のサンプリング時間を同一にする必要もないため，ここではそのまま t と記した．問題 (4) は普通の非線形最適化問題であり，非線型最適化の解法を用いて解くことができる．モデル予測制御では，(4) を解いて得られた最適制御入力列 $\{u_i^*(t)\}_{i=0}^{N-1}$ のうち，$u_0^*(t)$ のみを（場合によっては，最初の数ステップを）時刻 t における制御入力として用い，次のステップへ進む．

問題 (4) は時系列最適化問題 [1] ともよばれ，化学プラントのような大規模な問題では，時系列構造を利用した並列計算の手法なども提案されている [8]．一方，ロボットの制御などに適用するような場合，数十ミリ秒間隔で適当なサイズの最適化問題 (4) を実際に繰り返し解きながら，制御入力を生成しなければならない．これは，モデル予測制御の特徴でもあるが，計算時間を短縮する工夫が必要であり，モデル予測制御問題の解法に対する研究の動機付けとなっている．

3 特異摂動系に対するモデル予測制御

本節では，特異摂動系に対するモデル予測制御について考える．特異摂動系とは，速いダイナミクスと遅いダイナミクスを併せ持つシステムであり，以下のように定式化される．

$$\dot{x} = f(x, z, u) \tag{5}$$

$$\varepsilon\dot{z} = g(x, z, u) \tag{6}$$

$\varepsilon > 0$ は微小なパラメータであり，$z \in R^{n_f}$ は速いダイナミクスの状態変数を，$x \in R^{n_s}$ は遅いダイナミクスの状態変数をそれぞれ表現している．特異摂動系にモデル予測制御を適用すると，各時刻に解く有限時間の最適制御問題の評価区間は遅いダイナミクスの動きを評価するために長く，また，最適制御問題を離散化する際のサンプリング時間は速いダイナミクスにあわせ短くする必要がある．そのため，最適制御問題の次元が非常に大きくなる．

ところで，特異摂動系は，速いダイナミクスが遅いダイナミクスに比べ，短い時間で定常状態に収束するといった特性を持っている．この特性を利用し，Kokotovic [3] は特異摂動法を提案した．特異摂動法は，システムを速いダイナミクスに注目した退化システムと，遅いダイナミクスに注目した境界層システムとに分け，それぞれのシステムに対する入力を組み合わせることで，システム全体の制御を実現する制御手法である．ここでは，特異摂動法に基づいたモデル予測制御の方法を紹介する [2].

3.1 特異摂動法

まず，基礎となる特異摂動法 [3] について述べる．特異摂動系 (5), (6) に対し，初期状態を $x(t) = x_t, z(t) = z_t$ とし，次の評価関数を最小化する有限時間の最適制御問題を考える．

$$J = \varphi(x(T,t), z(T,t), t) + \int_0^T L(x(\tau,t), z(\tau,t), u(\tau,t), t)d\tau \tag{7}$$

特異摂動系は，速いダイナミクスの状態 z が比較的短い時間で定常状態に収束するのに対し，遅いダイナミクスの状態 x は長時間過渡状態であり続けた後，定常状態に収束するといった特性を持っている．そこで，ε が微小のとき，状態 z はほぼ定常状態にあるとみなし $\varepsilon \downarrow 0$ と近似する．このようにして得られたシステムをシステムを 退化システム と呼ぶ．式 (6) 式の左辺を 0 とおいて z について解いた解を $\hat{z}$ とおくと，

$$\hat{z} := h(\hat{x}, \hat{u}) \tag{8}$$

となる．記号 ^ は退化システムの状態変数であることを意味する．式 (8) を式 (5) 式に代入すると，退化システムは

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{u}) := f(\hat{x}, h(\hat{x}, \hat{u})) \tag{9}$$

となる．式 (8) を式 (7) に代入し，最小化する評価関数を $\hat{x}, \hat{u}$ の関数として再定義する．

$$\hat{J} = \hat{\varphi}(\hat{x}(T,t), t) + \int_0^T \hat{L}(\hat{x}(\tau,t), \hat{u}(\tau,t), t)d\tau \tag{10}$$

初期状態を $\hat{x}(t) = x_t$ とおいて，最適制御問題を解くと退化システム (9) に対する最適制御入力 $\hat{u}^*(t+\tau)$, $(0 \le \tau \le T)$ が得られる．なお，退化システムにおける速いシステムの状態 $\hat{z}(t)$ は遅いシステムの状態 $\hat{x}(t)$, 入力 $\hat{u}(t)$ から (8) 式によって決定される．

退化システムを考える際，速いダイナミクスの動きは定常状態にあるものと見なし，その過渡応答は無視している．しかし，ε が小さくてもその近似誤差は存在し，

ε が大きくなると誤差も大きくなってくる．そこで，退化誤差の影響を補正するために，元のシステムと退化システムとの間の誤差システムである境界層システムを考える．

退化システムの状態 $\hat{x}$ は元のシステムを良く近似していると仮定し，

$$x - \hat{x} = O(\varepsilon)$$

が成立しているものとする．このとき，$\hat{z}$ と z，$\hat{u}$ と u との近似誤差を，

$$\eta := z - \hat{z}, \quad \nu := u - \hat{u} \tag{11}$$

とおいて，式 (5), (6) に代入すると，

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, \eta + h(\hat{x}, \nu + \hat{u})), \nu + \hat{u}) && (12) \\ \varepsilon\dot{\eta} &= g(\hat{x}, \eta + h(\hat{x}, \nu + \hat{u})), \nu + \hat{u}) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial \hat{x}}\dot{\hat{x}} - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial \nu}\dot{\nu} && (13) \end{aligned}$$

となる．時間軸の変換 $\tau = \varepsilon\zeta$ を行い $\varepsilon \downarrow 0$ とすると，式 (12), (13) は

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{d\zeta} &= 0 && (14) \\ \frac{d\eta}{d\zeta} &= g(\hat{x}(t), \eta(\zeta) + h(\hat{x}(t), \nu(\eta) + \hat{u}(t)), \nu(\eta) + \hat{u}(t)) && (15) \end{aligned}$$

となる．これが境界層システムであるが，ここではさらに (15) を $\hat{x}(t)$, $\hat{z}(t)$, $\hat{u}(t)$ の近傍で線形化し，次式を得る．

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \left.\frac{\partial g}{\partial \eta}\right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ z = \hat{z}(t) \\ u = \hat{u}(t)}} \eta + \left.\frac{\partial g}{\partial \nu}\right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ z = \hat{z}(t) \\ u = \hat{u}(t)}} \nu \tag{16}$$

式 (11) を式 (7) に代入すると，η と ν に関する以下の評価関数を得る．

$$\bar{J} = \bar{\varphi}(\eta(T, t), t) + \int_0^T \bar{L}(\eta(\zeta, t), \nu(\zeta, t), t) d\zeta \tag{17}$$

これを最小化する最適制御問題を解くと，境界層システム (16) に対する最適制御入力 $\nu^*(\tau, t)$, $(0 \leq \tau \leq T)$ を得る．元のシステムに対する入力 $u^*(t)$ は

$$u^*(t + \tau) = \hat{u}^*(t + \tau) + \nu^*(t + \tau) \qquad (0 \leq \tau \leq T) \tag{18}$$

である．以上が，特異摂動法の概要である．適当な仮定の下で特異摂動法による解 (18) は，評価関数 (7) を最小化する元のシステム (5), (6) の最適制御問題の解に収束することが示されている [3]．

3.2 モデル予測制御

ここでは，上で紹介した特異摂動法の考え方をモデル予測制御に応用する．まず，退化システム (9) について考える．評価区間 $[t, t+T]$ は遅いダイナミクスを表現するのに十分な長さを持つとし，分割幅 $\Delta\tau_s = T/N_s$ で N_s ステップに離散時間化する．すると，退化システムに対する離散時間化された最適制御問題は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad \hat{J} = \hat{\varphi}(x_{N_s}(t), t) + \sum_{i=0}^{N_s-1} \hat{L}(\hat{x}_i(t), \hat{u}_i(t), t)\Delta\tau_s \\
&\text{制約} \quad \hat{x}_{i+1}(t) = \hat{x}_i(t) + \hat{f}(\hat{x}_i(t), \hat{u}_i(t))\Delta\tau_s \\
&\qquad\quad \hat{x}_0(t) = x(t), \quad (i = 0, 1, \ldots, N_s - 1)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

この最適制御問題 (19) を解き，退化システムに対する最適入力 $\{\hat{u}_i^*(t)\}_{i=0}^{N_s-1}$ および状態 $\{\hat{x}_i^*(t)\}_{i=1}^{N_s}$ を得る．

モデル予測制御では通常，最適制御問題を解いて得られた入力のうち最初の 1 ステップのみを制御入力として用いる．したがって，最適制御問題 (19) の解 $\hat{u}_0^*(t)$ のみが実際の制御入力となる．ところが，$\hat{u}_0^*(t)$ は速いダイナミクスを定常状態にあるものと見なして近似した問題の解であるため，近似誤差を含む．そこで，それを修正するために境界層システムを利用する．このとき，境界層システムは全評価区間 $[t, t+T]$ について考える必要はなく，退化システムの最適制御問題のはじめの 1 ステップ分 $[t, t+\Delta\tau_s]$ についてのみ考えればよい．

評価区間 $[t, t+\Delta\tau_s]$ を分割幅 $\Delta\tau_f = \Delta\tau_s/N_f$ で N_f ステップに分割し，離散時間化する．境界層システム (16) に対する最適制御問題は，

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad \bar{J} = \bar{\varphi}(\eta_{N_f}(t), t) + \sum_{i=0}^{N_f-1} \bar{L}(\eta_i(t), \nu_i(t), t)\Delta\tau_f \\
&\text{制約} \quad \eta_{i+1}(t) = \eta_i(t) + \frac{1}{\varepsilon}\left(A(t)\eta_i(t) + B(t)\nu_i(t)\right)\Delta\tau_f \\
&\qquad\quad \eta_0(t) = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, N_f - 1)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となる．ただし，

$$
A(t) = \left.\frac{\partial g}{\partial \eta}\right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ z = \hat{z}(t) \\ u = \hat{u}*(t)}}, \quad B(t) = \left.\frac{\partial g}{\partial \nu}\right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ z = \hat{z}(t) \\ u = \hat{u}(t)}}
$$

である．境界層システムに対する最適制御問題 (20) を解き，最適解 $\{\nu_i^*(t)\}_{i=0}^{N_f-1}$ を得る．時刻 t における元の問題に対するリシーディングホライズン制御入力は，

$$
u^*(t) = \hat{u}_0^*(t) + \nu_0^*(t)
$$

である．まとめると，以下のようになる．

特異摂動系に対するモデル予測制御アルゴリズム

Step 1 時刻 t の状態を用いて退化システムに対する最適制御問題 (19) を解き，入力 $\{\hat{u}_i^*(t)\}_{i=0}^{N_s-1}$ および状態 $\{\hat{x}_i^*(t)\}_{i=1}^{N_s}$ を求める．

Step 2 境界層システムに対する最適制御問題 (20) を解き，最適入力 $\{\nu_i^*(t)\}_{i=0}^{N_f-1}$ を求める．

Step 3 $u^*(t) = \hat{u}_0^*(t) + \nu_0^*(t)$ を入力．

Step 4 $t = t + \Delta\tau_f$ とし Step 1 に戻る．

上のアルゴリズムにおいて，退化システム (9) を評価する評価区間 T は十分長くする必要があるが，特異摂動系の特性を利用すれば，分割幅 $\Delta\tau_s$ を大きくとることができる．一方，境界層システムを評価する分割幅 $\Delta\tau_f$ は十分に短くする必要があり，またこれは，元のシステムにモデル予測制御をそのまま適用する場合の分割幅と同じであるが，評価区間は $[t, t+\Delta\tau_s]$ と短くなる．したがって，退化システム，境界層システムの双方の最適制御問題のサイズを小さくすることができ，計算時間の低減が期待できる．

3.3 計算実験

提案した手法の適用例として，二次元の簡単な特異摂動システムに適用した場合の結果を示す．システムおよび評価関数 J は以下で与えられる．

$$a\dot{x}_1 = 3\frac{x_2}{x_1} - 5x_1 + 3u_1 \tag{21}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = -3x_2 - 0.8x_1x_2 + u_2 \tag{22}$$

$$J = (x^*-x(T))^T S_f (x^*-x(T)) + \int_0^T ((x^*-x)^T Q (x^*-x) + (u^*-u) R (u^*-u)) dt \tag{23}$$

初期状態を $x_0 = (0, 0)$ とし，$x^* = [18.28, 11.35]^T, u^* = [30, 200]^T$ を目標状態として $a = 100, \varepsilon = 40$ の場合についてシミュレーションを行った．評価関数 (23) で用いられる行列は

$$S_f = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 6.7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおいた．退化システムの予測区間は $T = 20$ 秒とし，これを分割幅 $\Delta\tau_s = 1$ 秒で $N_s = 20$ ステップに分割した．一方，境界層システムの方は，$\Delta\tau_s = 1$ 秒を $N_f = 100$ 分割した．したがって，$\Delta\tau_f = 0.01$ 秒である．実験は，Pentium4 2.6GHz，1GB，Windows XP の計算機上で，Microsoft Visual C++を用いて行った．

図 1〜4 に例題に関する計算結果を示す．図 1 は状態 x_1 の軌道，図 2 は状態 x_2，図 3 は入力 u_1，図 4 は入力 u_2 の軌道である．グラフ内の conventional は元問題を $T = 20, N = 2000$ 解いた場合の軌道，proposal は提案法を用いて求めた軌道である．また，degenerate は境界層システムについては考えず，退化入力のみを実入力として用いた場合の軌道である．図 2 に見られるように，ε がある程度大きい場合，退化誤差は無視することができず，境界層システムについて考えていない場合の解軌道 degenerate の速いダイナミクスの状態 x_2 は，従来法を用いて求めた解軌道 conventional から大きく外れている．一方，提案法を用いた場合の解軌道 proposal は conventional とほぼ一致している．

さらに，退化誤差の影響を受けやすい速いダイナミクスの状態変数 x_2 について，詳しく見る．各時刻における conventional 軌道からの偏差の絶対値を図 5 に示す．図は，degenerate と conventional の gap を $0s$〜$10s$ の間，表示したものである．図 5 に示すように，提案法は境界層システムについて考えるため，退化誤差の影響が 1/10 程度に下がっている．

計算時間は，元の問題に，予測区間 $T = 20$ 秒，ステップサイズ $\Delta\tau = 0.01$ 秒でモデル予測制御を適用した場合，1 ステップの入力を計算するのに最大 0.06 秒かかった．一方，提案手法を用いた場合，最大計算時間は 0.01 秒であり，実時間制御が可能である．

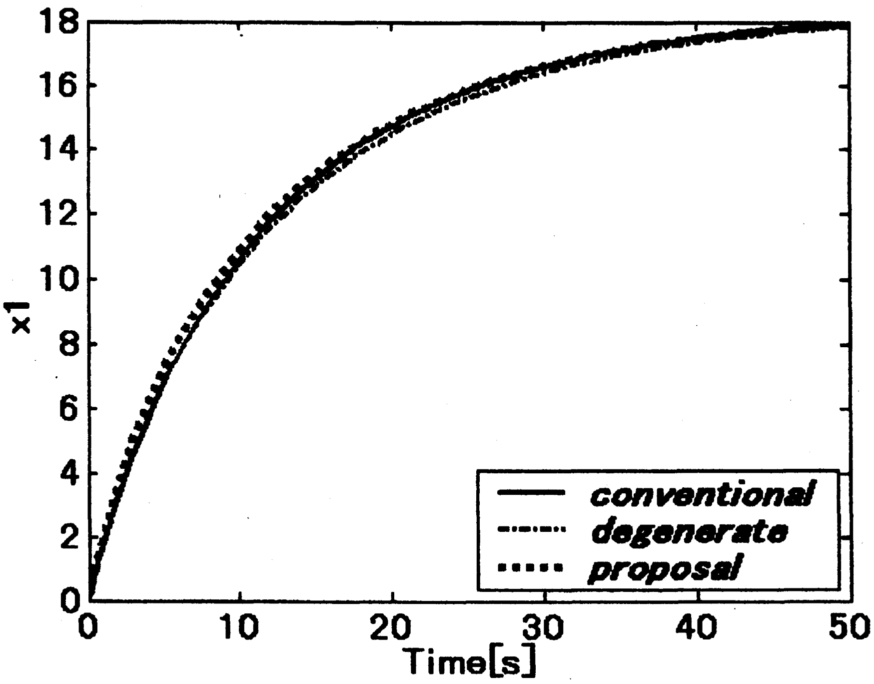

図 1: 状態 x_1

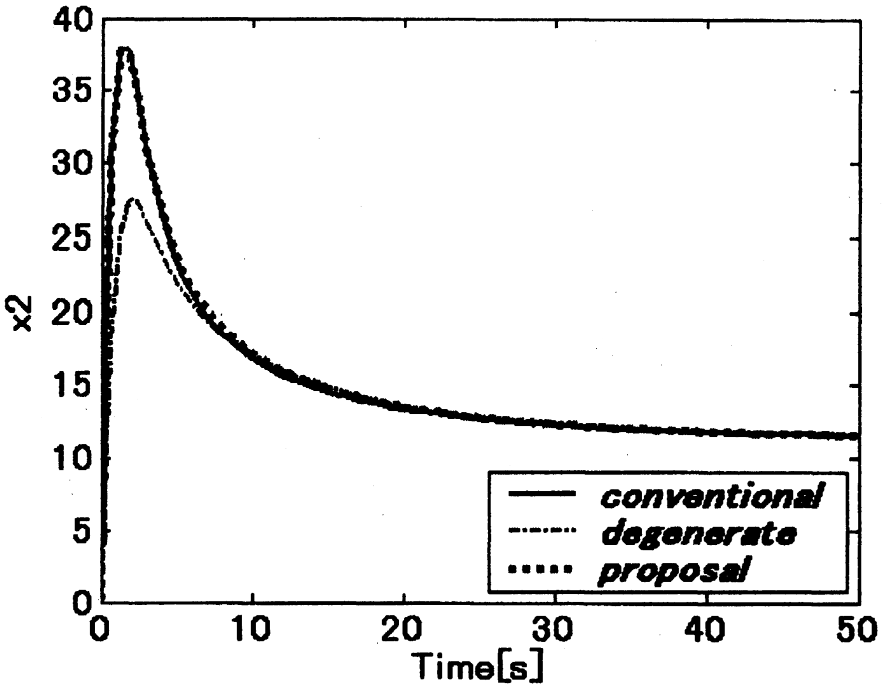

図 2: 状態 x_2

謝辞

本研究は，一部（独）日本学術振興会科学研究費補助金（C）18560429の援助を受けている．

参考文献

[1] 江本，福島：プロセス産業における時系列最適化のための逐次２次計画分解法，システム制御情報学会論文誌，**15** (2002) 34-40.

[2] 木村，細江，田地：特異摂動系に対するリシーディングホライズン制御，第49回自動制御連合講演会（神戸大学工学部）CD-ROM (2006).

[3] P.V. Kokotovic: *Singular Perturbation Methods in Control:Anarysis and Design*, (Academic Press, 1986).

[4] J.M. Maciejowski（足立，菅野 訳）：モデル予測制御－制約のもとでの最適制御，(東京電機大学出版局，東京，2005)．

[5] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao and P.O.M. Scokaert: Constrained model predictive control: stability and optimality, *Automatica*, **36** (2000) 789-814.

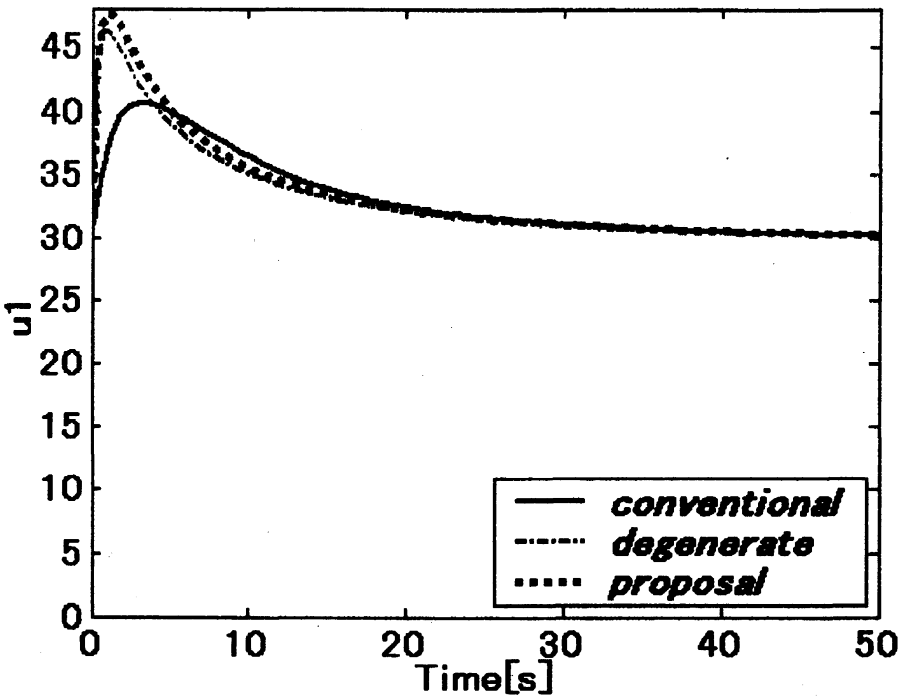

図 3: 入力 u_1

[6] T. Ohtsuka: A continuation/GMRES method for fast computation of nonlinear receding horizon control, *Automatica*, **40** (2004) 563-574.

[7] 齋藤, 井村：入力拘束システムのモデル予測制御に対するM-行列を用いた高速解法, 計測自動制御学会論文集, **40** (2004) 906-914.

[8] 山川, 江本：複数装置から成るプラントの多期間生産計画問題に対する並列型主双対内点法, システム制御情報学会論文誌, **16** (2003) 356-365.

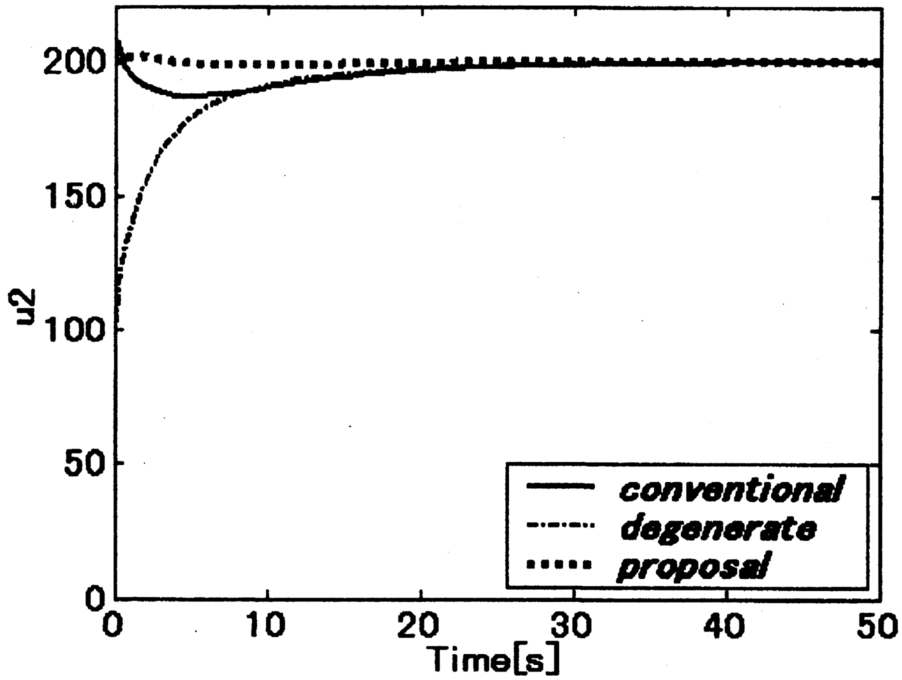

図 4: 入力 u_2

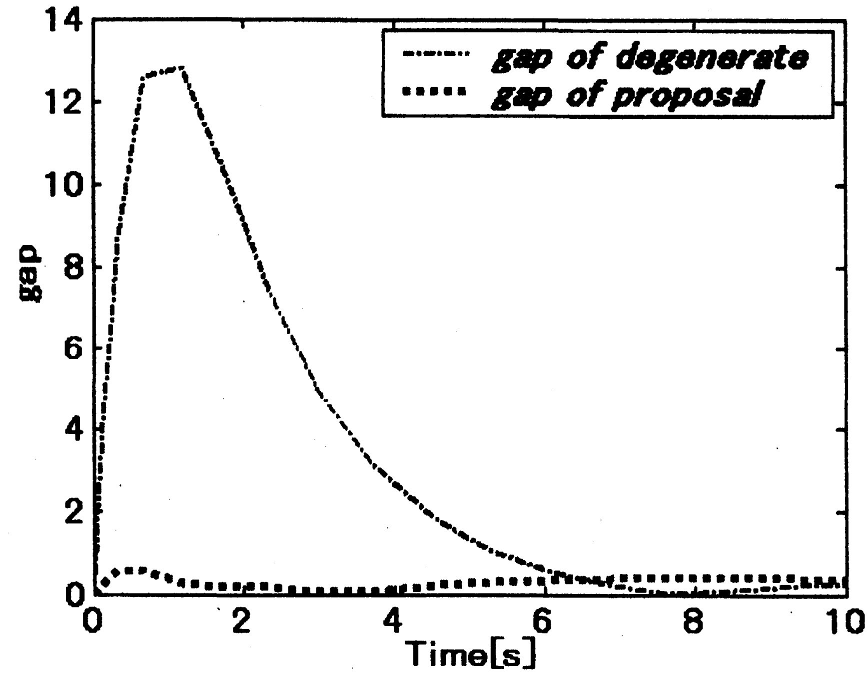

図 5: 状態 x_2 の差