数理解析研究所講究録
第 1584 巻 2008 年 84-89

直角ノルムを用いた多目的配置問題の準有効解について

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

$\mathbb{R}^n$ における直角ノルムを用いた多目的配置問題を考え、この問題のすべての準有効解の集合を求める手続きを示す。

1. はじめに $\mathbb{R}^n$ に需要点が与えられたとき、新たに単一の施設を配置しようとする問題は単一施設配置問題と呼ばれる。この問題は通常、施設と需要点の間の距離を含む単一の目的関数をもつ最小化問題として定式化される。$\boldsymbol{d}_i \equiv (d_i^1, d_i^2, \cdots, d_i^n)^T \in \mathbb{R}^n, i \in I \equiv \{1, 2, \cdots, m\}$ を需要点とし、$\|\cdot\|_1$ を $\mathbb{R}^n$ 上定義された直角ノルムとする。また、$\boldsymbol{x} \equiv (x^1, x^2, \cdots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n$ を施設の位置を表す変数とし、$J \equiv \{1, 2, \cdots, n\}$ および $D \equiv \{\boldsymbol{d}_i : i \in I\}$ とする。このとき、多目的配置問題は次のように定式化される。

$$\text{(P)} \qquad \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv (\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1\|_1, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2\|_1, \cdots, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_m\|_1)^T$$

点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ かつ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき $\boldsymbol{x}_0$ を (P) の**有効解**といい、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき $\boldsymbol{x}_0$ を (P) の**準有効解**という。また、(P) のすべての有効解および準有効解の集合をそれぞれ $E(D)$ および $QE(D)$ とする。これらの定義より $D \subset E(D) \subset QE(D)$ となる。(P) の他に (P) の有効解および準有効解の特徴づけを与える次の minisum 型配置問題を考える。

$$(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}}) \qquad \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|_1$$

ここで、各 $\lambda^i, i \in I$ は $\boldsymbol{d}_i$ に対する正あるいは非負の重みである。$\boldsymbol{\lambda} \equiv (\lambda^1, \lambda^2, \cdots, \lambda^m)^T$ とする。

$(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}})$ は、[2] において提案されているアルゴリズムを用いて解くことができる。$n = 2$ のとき、(P) のすべての有効解の集合は [1] において提案されているアルゴリズムで求めることができ、すべての準有効解の集合は [4] において提案されているアルゴリズムで求めることができる。$n = 3$ および $n > 3$ のとき、(P) のすべての有効解の集合はそれぞれ [5] および [6] において提案されているアルゴリズムで求めることができる。

本稿では、$\mathbb{R}^n$ における直角ノルムを用いた多目的配置問題 (P) を考え、(P) の準有効解のいくつかの性質を与え、(P) のすべての準有効解を求める手続きを示す。

2 節において、(P) の有効解, 準有効解および $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}})$ の最適解の間のいくつかの関係を与える。3 節において、(P) の準有効解のいくつかの性質を与え、(P) のすべての準有効解を求める手続きを示す。最後に、4 節において結論を述べる。

2. (P) の有効解, 準有効解と ($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) の最適解 本節では、(P) の有効解, 準有効解および ($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) の最適解の間のいくつかの関係を与える。

(P) の有効解と ($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) の最適解の間には次のような関係がある。

定理1 ([7] 参照) $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が (P) の有効解であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}_0$ がある $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ に対する ($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) の最適解になることである。

(P) の準有効解と ($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) の最適解の間には次のような関係がある。

定理2 ([8] 参照) $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が (P) の準有効解であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}_0$ がある $\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ に対する ($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) の最適解になることである。

(P) の有効解と準有効解の間には次のような関係がある。

系1 ([8] 参照) $\mathcal{D} \equiv \{D' \subset D : D' \neq \emptyset\}$ とし、各 $D' = \{\boldsymbol{d}_{i_1}, \boldsymbol{d}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{d}_{i_k}\} \in \mathcal{D}$ に対して多目的配置問題

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} (\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_{i_1}\|_1, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_{i_2}\|_1, \cdots, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_{i_k}\|_1)^T$$

のすべての有効解の集合を $E(D')$ とする。このとき

$$QE(D) = \bigcup_{D' \in \mathcal{D}} E(D')$$

となる。

3. 準有効解を求める手続き 本節では、(P) の準有効解のいくつかの性質を与え、(P) のすべての準有効解を求める手続きを示す。

($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) の目的関数 g は

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \sum_{j=1}^{n} |x^j - d_i^j| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda^i |x^j - d_i^j|$$

と書けるので、($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) は n 個の独立な一次元の問題になる。すなわち、$\boldsymbol{x}^* \equiv (x^{1*}, x^{2*}, \cdots, x^{n*})^T \in \mathbb{R}^n$ が ($P_{\boldsymbol{\lambda}}$) の最適解であるための必要十分条件は各 x^{j*}, $j \in J$ が一次元の問題

$$(P_j) \qquad \min_{x\in\mathbb{R}} g_j(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda^i |x - d_i^j|$$

の最適解になることである。これら一次元の問題は、[2] において提案されているアルゴリズムを用いて解くことができる。次の補題は、(P_j) の最適解の性質を示している。

補題1 ([6] 参照) $j \in J$ とする。任意に固定された $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ に対して、(P_j) の任意の最適解 x^* は $\min\{d_i^j : i \in I\} \leq x^* \leq \max\{d_i^j : i \in I\}$ となる。

次の定理は、(P) の準有効解の性質を示している。

定理3

$$B \equiv \{(x^1, x^2, \cdots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n : \min\{d_i^j : i \in I\} \leq x^j \leq \max\{d_i^j : i \in I\}, j \in J\}$$

とする。このとき、(P) の任意の準有効解は B に属する。すなわち、$QE(D) \subset B$ となる。

$n=1$ のとき、有効解および準有効解の定義より $E(D)=QE(D)=B$ となることが容易にわかる。また、$n=2$ のときは $QE(D)=B$ となることが知られている（[4] 参照)。しかし、$n \geq 3$ のときは必ずしも $QE(D)=B$ になるとは限らない。次に、$B \not\subset QE(D)$ となる例を与える。

例（$B \not\subset QE(D)$ となる例） $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ において、$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{e}_i, i \in J$ とする。ここで、$\{\boldsymbol{e}_i\colon i \in J\}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底である。すなわち、各 $\boldsymbol{e}_i, i \in J$ の第 i 成分のみが 1 で残りの成分はすべて 0 のベクトルである。このとき、$B=[0,1]^n$ となる。ここで、$[0,1] \equiv \{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leq x \leq 1\}$ である。$\boldsymbol{x}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})^T \in B$ とする。定理2より $\boldsymbol{x}_0 \in QE(D)$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$ となるある $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \lambda^2, \cdots, \lambda^n)^T$ に対して $\boldsymbol{x}_0$ が $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}})$ の最適解となることである。そのための必要十分条件は $\boldsymbol{\lambda}$ が次をみたすことである。

(1)
$$-\lambda^j + \sum_{i \neq j} \lambda^i = 0, \qquad j \in J$$

(2)
$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$$

(1) より

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i = 0$$

を得る。これと (2) の $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}$ より $\lambda^i = 0, i \in J$ を得る。よって (1), (2) を同時にみたす $\boldsymbol{\lambda}$ は存在しない。したがって、$\boldsymbol{x}_0 \notin QE(D)$ となる。

定理4 $m \geq n+1$ のとき

$$QE(D) = \bigcup_{\{i_1, i_2, \cdots, i_{n+1}\} \subset I} QE(\{\boldsymbol{d}_{i_k} : k \in J_1\})$$

となる。ここで、$J_1 \equiv \{1, 2, \cdots, n+1\}$ である。

$m \leq n+1$ のとき、$QE(D)$ は系1を用いて求めることができる。ここで、系1における $E(D')$ は [5] または [6] において提案されているアルゴリズムを用いて求めることができる。$m > n+1$ のときは、定理4より、$n+1$ 個の要素をもつ $D' \subset D$ に対する $QE(D')$ を求めることが本質的になる。$m \geq n+1$ のときに対する $QE(D)$ を求める手続きを pseudoalgorithm の形に表すと次のようになる。

Input: $\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n, i \in I$: 需要点

Output: $QE(D)$

Steps:

1. $\forall i_1, i_2, \cdots, i_{n+1} \in I$ に対して $QE(\{\boldsymbol{d}_{i_k} : k \in J_1\})$ を求める。
2. $QE(D) = \bigcup_{\{i_1, i_2, \cdots, i_{n+1}\} \subset I} QE(\{\boldsymbol{d}_{i_k} : k \in J_1\})$ を求める。

3. 終了。

ここで、n が固定されているとして上記手続きに必要な計算時間について考える。各 $i_1, i_2, \cdots, i_{n+1} \in I$ に対して、系 1 における $E(D')$ を [5] または [6] において提案されているアルゴリズムを用いて求め、$QE(\{\boldsymbol{d}_{i_k} : k \in J_1\})$ を系 1 を用いて求めることは $O(1)$ 計算時間必要である。よって、上記の手続きを用いて $QE(D)$ を求めることは $O(m^{n+1})$ 計算時間必要である。

数値例 $\boldsymbol{d}_1 = (3,0,4,1)^T, \boldsymbol{d}_2 = (4,2,0,2)^T, \boldsymbol{d}_3 = (2,1,3,3)^T, \boldsymbol{d}_4 = (0,4,5,4)^T, \boldsymbol{d}_5 = (1,5,2,5)^T$ とし、次の多目的配置問題 (P) を考える。

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4} (\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1\|_1, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2\|_1, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_3\|_1, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_4\|_1, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_5\|_1)^T$$

このとき、(P) のすべての準有効解の集合 $QE(D)$ は次のようになる。

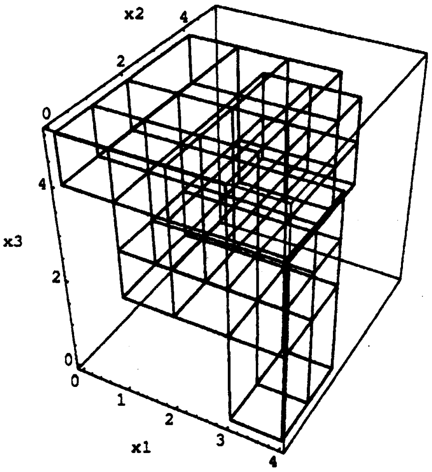

図 1　$QE(D)$　$(x^4 = 1)$

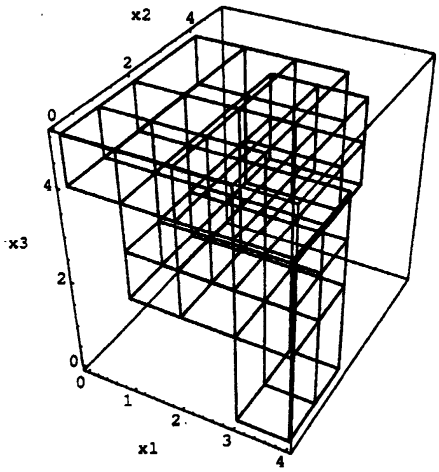

図 2　$QE(D)$　$(1 < x^4 < 2)$

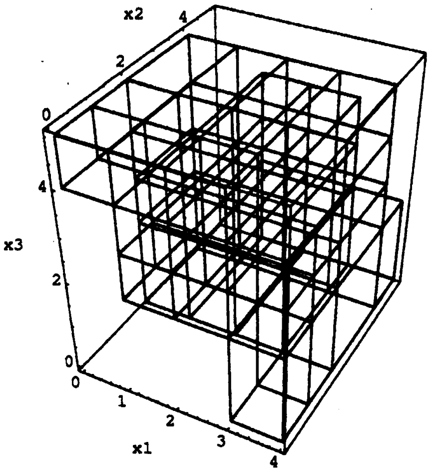

図 3　$QE(D)$　$(x^4 = 2)$

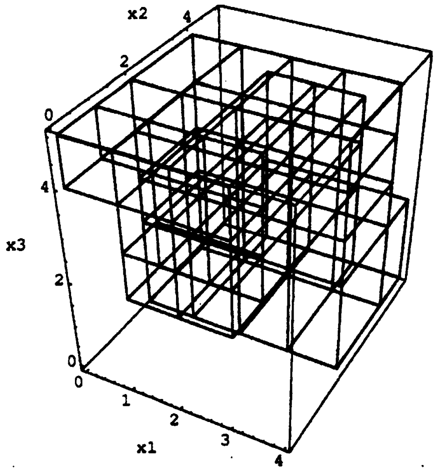

図 4　$QE(D)$　$(2 < x^4 < 3)$

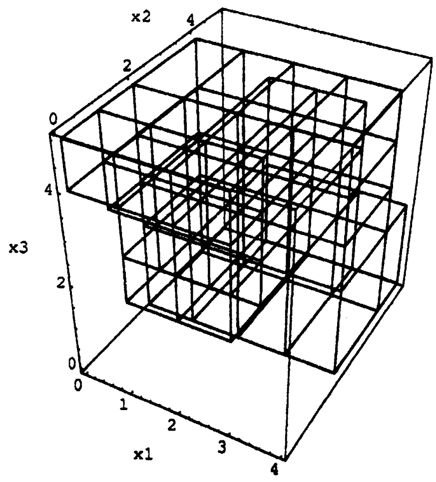

図5 $QE(D)$ $(x^4 = 3)$

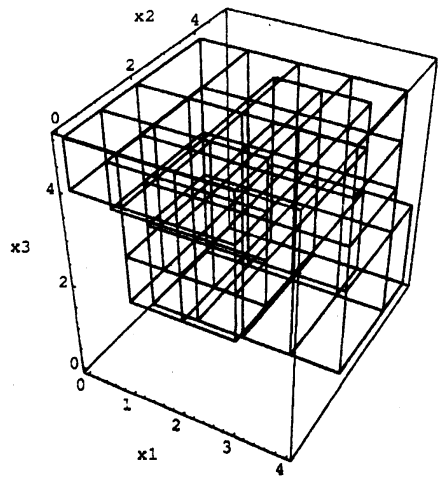

図6 $QE(D)$ $(3 < x^4 < 4)$

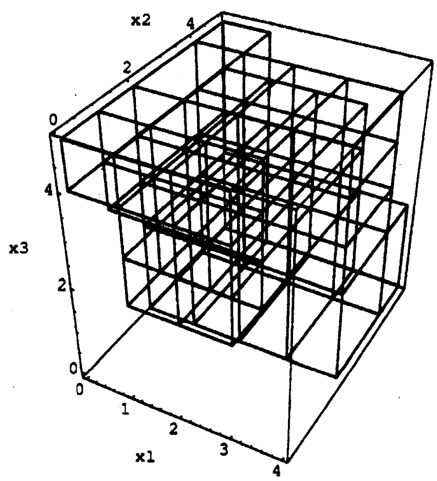

図7 $QE(D)$ $(x^4 = 4)$

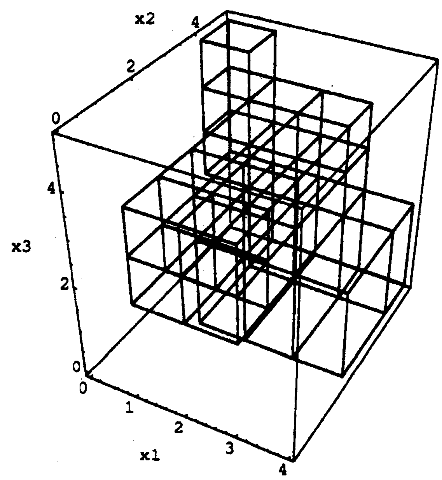

図8 $QE(D)$ $(4 < x^4 < 5)$

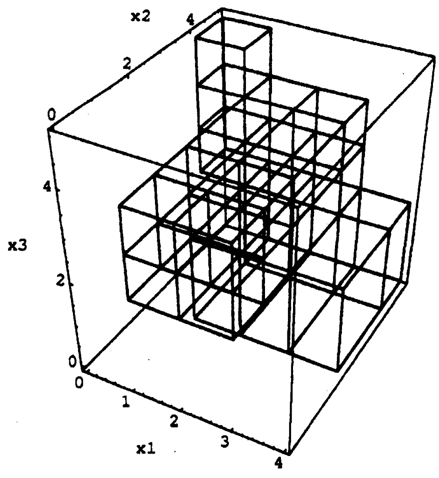

図9 $QE(D)$ $(x^4 = 5)$

4. 結論 本稿では、$\mathbb{R}^n$ における直角ノルムを用いた多目的配置問題 (P) と minisum 型配置問題 (P_λ) を考え、主な目的は (P) のすべての準有効解の集合 $QE(D)$ を求めることであった。まず、定理３として (P_λ) の最適解を用いて (P) の準有効解を特徴づけた。次に、定理４として (P) の準有効解の性質を与え、定理４を基にした (P) のすべての準有効解を求める手続きを示した。

参考文献

[1] L. G. Chalmet, R. L. Francis and A. Kolen, *Finding efficient solutions for rectilinear distance location problems efficiently*, Eur. J. Oper. Res., **6** (1981), 117-124.

[2] Z. Drezner and G. O. Wesolowsky, *The asymmetric distance location problem*, Trans. Sci., **23** (1989), 201-207.

[3] J. -B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[4] M. Kon, *Efficient solutions for multicriteria location problems under the block norm*, Math. Japon., **47** (1998), 295-303.

[5] M. Kon, *Efficient solutions of multicriteria location problems with rectilinear norm in $\boldsymbol{R}^3$*, Sci. Math. Jpn., **54** (2001), 289-299.

[6] M. Kon, *Efficient solutions of multicriteria location problems with rectilinear norm in $\mathbb{R}^n$*, Bull. Fac. Sci. Tech. Hirosaki Univ., **7** (2004), 21-30.

[7] M. Kon and S. Kushimoto, *On efficient solutions of multicriteria location problems with the block norm*, Sci. Math., **2** (1999), 245-254.

[8] T. J. Lowe, J. -F. Thisse, J. E. Ward and R. E. Wendell, *On efficient solutions to multiple objective mathematical programs*, Manage. Sci., **30** (1984), 1346-1349.

[9] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.

[10] A. M. Rodríguez-Chía and J. Puerto, *Geometrical description of the weakly efficient solution set for multicriteria location problems*, Ann. Oper. Res., **111** (2002), 181-196.

[11] R. E. Wendell, A. P. Hurter, Jr. and T. J. Lowe, *Efficient points in location problems*, AIIE Trans., **9** (1977), 238-246.