数理解析研究所講究録
第1585巻 2008年 1-11

Tsallisエントロピーを平均符号長の下限にもつ一般化符号木について

On the generalized code tree derived from the generalized Shannon additivity for Tsallis entropy

須鎗弘樹 (Hiroki Suyari)*
千葉大学 大学院融合科学研究科
〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町1-33
Graduate School of Advanced Integration Science, Chiba University
Chiba 263-8522, Japan

はじめに Tsallis統計力学は，1957年のJaynesのエントロピー最大化原理[1]によるBoltzmann-Gibbs統計力学の再構成の方法に基づいている．このJaynesのエントロピー最大化原理は，1948年のShannonの情報理論の論文の発表の後，この情報理論を大きな拠り所にして，Shannonエントロピーを出発点にした再構成の方法である．Tsallisエントロピーは，1988年のTsallisの論文の1ページ目にその導出過程もなく物理的な背景から直観的に与えられ，それをエントロピー最大化原理に適用しBoltzmann-Gibbs統計力学の拡張を得ている．しかし，この方法では，明らかに2つの欠点が存在する．一つは，Shannonエントロピーの一般化は無限に存在するので，統計力学の要諦を満たす必要はあるものの，無数の統計力学が存在し得るであろう．もう一つは，JaynesのエントロピーZ最大化原理の大きな背景であったShannonの情報理論に対応して，Tsallisエントロピーを基本的な情報量とする情報理論が未だ存在しないことである．そこで，本論文では，前者については，Boltzmannの状態の数の数えるという考え方にしたがい，非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx}=y^q$ からTsallisエントロピーを一意に導く．後者については，Shannonの情報理論のもっとも基本的な情報源符号化定理に対応して，Tsallisエントロピーを平均符号長の下限にもつ一般化符号木を導く．

キーワード Tsallisエントロピー, 一般化Shannon加法性, 一般化 D 元符号木, 平均符号長

1 非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx}=y^q$ からTsallisエントロピーへ

指数関数の特徴付けとして最も有名な定式化は，線形微分方程式 $\frac{dy}{dx}=y$ であろう．ここでは，その一般化として次の非線形微分方程式：

$$\frac{dy}{dx}=y^q \quad (q>0) \tag{1}$$

を出発点にする．この非線形微分方程式を解くと，

$$\frac{y}{\exp_q(C)}=\exp_q\left(\frac{x}{\left(\exp_q(C)\right)^{1-q}}\right) \tag{2}$$

*e-mail: suyari@ieee.org, suyari@faculty.chiba-u.jp

[1] E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics, Phys.Rev.106, 620-630, 1957; E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics II, Phys.Rev.108, 171-190, 1957.

を得る [1]．ここで，C は，$1+(1-q)C>0$ を満たす任意定数で，$\exp_q$ は q-指数関数と言われる一般化指数関数である [2][3]．

定義 1 （**q-指数関数，q-対数関数**）$q\in\mathbb{R}^+$ を任意に固定する．$\mathbb{R}$ 上の関数

$$\exp_q x := [1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{3}$$

を q-指数関数といい，$\mathbb{R}^+$ 上の関数

$$\ln_q x := \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \tag{4}$$

を q-対数関数という．

ここで，

$$[z]_+ := \max\{0,z\}. \tag{5}$$

q-指数関数に対して

$$\exp_q(x)\otimes_q\exp_q(y)=\exp_q(x+y), \tag{6}$$

あるいは q-対数関数に対して

$$\ln_q(x\otimes_q y)=\ln_q(x)+\ln_q(y) \tag{7}$$

を満たすように，新しい積 $\otimes_q$ を定める．この $\otimes_q$ を q-積という [4][5]．

定義 2 （**q-積**）$x,y>0$ に対して，

$$x\otimes_q y := \left[x^{1-q}+y^{1-q}-1\right]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{8}$$

を x と y の q-積という．

q-積 $\otimes_q$ を用いて，q-積の階乗である q-階乗 $n!_q$ を定義する [6]．

定義 3 （**q-階乗**）自然数 $n\in\mathbb{N}$ と $q\in\mathbb{R}^+$ に対して，

$$n!_q := 1\otimes_q\cdots\otimes_q n. \tag{9}$$

を q-階乗という．

q-階乗 $n!_q$ に対して，次の q-スターリングの公式が成り立つ [6]．

定理 4 （**q-スターリングの公式**）十分大きな自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して，次の近似が成り立つ．

$$\ln_q(n!_q)\simeq\begin{cases}\dfrac{n}{2-q}\ln_q n-\dfrac{n}{2-q}+O(\ln_q n) & \textit{if}\quad q\neq 2,\\ n-\ln n+O(1) & \textit{if}\quad q=2.\end{cases} \tag{10}$$

q-積 $\otimes_q$ と同様にして，q-比 $\oslash_q$ は次の等式から定義される [4][5]．

$$\exp_q(x)\oslash_q\exp_q(y)=\exp_q(x-y), \tag{11}$$

$$\ln_q(x\oslash_q y)=\ln_q(x)+\ln_q(y). \tag{12}$$

定義 5 （**q-比**）$x,y>0$ に対して，

$$x\oslash_q y := \left[x^{1-q}-y^{1-q}+1\right]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{13}$$

を x と y の q-比という．

q-積 $\otimes_q$ と q-比 $\oslash_q$ を用いて，q-多項係数が次のように定義される [6].

定義 6 （**q-多項係数**）$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ と $n_i \in \mathbb{N}\ (i = 1, \cdots, k)$ に対して，

$$\left[\begin{array}{ccc} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{array}\right]_q := (n!_q) \oslash_q [(n_1!_q) \otimes_q \cdots \otimes_q (n_k!_q)] \tag{14}$$

を q-多項係数という.

q-対数関数，q-多項係数，q-スターリングの公式を用いると，Boltzmann の関係式が次のように拡張され，Tsallis エントロピーが一意に導かれる [6].

定理 7 （***Boltzmann* の関係式の拡張**）n が十分に大きいとき，q-多項係数 *(14)* の q-対数から，*Tsallis* エントロピーが導かれる.

$$\ln_q \left[\begin{array}{ccc} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{array}\right]_q \simeq \begin{cases} \dfrac{n^{2-q}}{2-q} \cdot S_{2-q}\left(\dfrac{n_1}{n}, \cdots, \dfrac{n_k}{n}\right), & q \neq 2 \text{ のとき}, \\ -S_1(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} S_1(n_i), & q = 2 \text{ のとき}. \end{cases} \tag{15}$$

ここで，S_q は *Tsallis* エントロピー：

$$S_q(p_1, \cdots, p_k) := \frac{1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i^q}{q-1}, \tag{16}$$

$S_1(n)$ は，

$$S_1(n) := \ln n. \tag{17}$$

(15) において，$q \neq 2$ のときは，Tsallis 統計力学における加法的双対性 (additive duality) $q \leftrightarrow 2-q$ を表している．上の Boltzmann の関係式の拡張は，最近になって，もう少し拡張できることがわかった．その拡張によって，従来別々で議論されていた乗法的双対性 (multiplicative duality) $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$，$q$-triplet, multifractal-triplet を含んだ 4 つの数理構造が，一つの定式化で統一できることがわかった [7].

以上，数学的な導出だけで非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ から Tsallis エントロピーを導いた．ここで強調したいことは，Tsallis エントロピーが統計物理に初めて導入された 1988 年の Tsallis の論文では，その冒頭に導出過程もなく与えられていたが [8]，実際には，非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ の解である q-指数関数から定まる q-積の数理から，Boltzmann の考えにしたがい，一意に Tsallis エントロピーが導かれるという点である [1]．Tsallis エントロピーのこのような数学的な背景は最近になってわかったものであるが，q-多項係数の意味などは未だ不明であり，今後の課題である．なお，この章では，いくつかの新しくかつ基本的な概念を示してきたが，これらは，他の定式化にも重要な役割を演じている．特に，q-積は，重要な概念であり，誤差法則の拡張や Tsallis エントロピー最大化分布の導出に有効である [9][10].

次章では，この情報論的な意味を探るために，Tsallis エントロピーを平均符号長の下限にもつ一般化符号木が，Tsallis エントロピーの公理系をなす一般化 Shannon 加法性から導かれることを示す [11].

2 Tsallis エントロピーを平均符号長の下限にもつ符号木のクラス

前章で導かれた Tsallis エントロピーに対して，情報理論の立場から，次のような疑問をもつのは自然であろう.

"Tsallis エントロピーを平均符号長の下限にもつ符号木のクラスは存在するか？"

この答えは Yes であり，本章以降で，その導出をする．結論から述べると，Tsallis エントロピーは，一般化 D 元符号木における平均符号長の下限になっており，次のように表される．

$$\frac{S_q(p_1,\cdots,p_N)}{\ln_q D} \le \sum_{i=1}^{N} p_i \ell_i \tag{18}$$

ここで，N は葉の数，ℓ_i は一般化符号木における各葉の深さ（ルートから各葉までの辺の数）を表す．ある根付き木の各内節点の子の数 D_j が次の不等式を満たすとき，その木を一般化 D 元符号木という．

$$\hat{p}_j^{q-1} \ln_q D_j \le \ln_q D \tag{19}$$

ここで，$\hat{p}_j$ は，内節点"j"に付随する確率を表し，内節点"j"の各子に割り当てられている確率の総和で与えられる．$q \to 1$ のとき，明らかに $D_j \le D$ であり，これは，通常の D 元符号木の定義である．よって，(18) は，$q \to 1$ のとき，Shannon エントロピーが D 元符号木における平均符号長の下限になっていることを表している．この章では，上の不等式 (18) が，Tsallis エントロピーの公理系の一つである，一般化 Shannon 加法性から導かれることを示す[2]．

以下，議論をわかりやすくするために，まずは，$q=1$ のときの (18) が，Shannon 加法性から導かれることを示す．その一般化として，上の不等式 (18) を示す．

2.1 Shannon 加法性から導かれる平均符号長の下限

この節では，Shannon 加法性を用いて D 元符号木における平均符号長の下限を導出する．つまり，(18) の $q=1$ の場合を示す．

Δ_n を n-次元単体とする．

$$\Delta_n := \left\{ (p_1,\ldots,p_n) \,\middle|\, p_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\} \tag{20}$$

Shannon-Khinchin の公理系 [13, 14] は，次の一意性定理の [SK1]~[SK4] で与えられる．

定理 8 *$S_1(p_1,\cdots,p_n)$ を任意の確率分布 $(p_1,\cdots,p_n) \in \Delta_n$ に対して定義される関数とする．次の [SK1]~[SK4] を満たす S_1 は，一意に次の関数に定まる．*

$$S_1(p_1,\cdots,p_n) = -k \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i, \tag{21}$$

ここで，k は正の定数である．

[SK1] 連続性: $S_1(p_1,\cdots,p_n)$ は $(p_1,\cdots,p_n) \in \Delta_n$ について連続である．

[SK2] 最大性: $S_1(p_1,\cdots,p_n)$ は $p_i = \frac{1}{n}$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ において，最大値をとる．

$$S_1(p_1,\cdots,p_n) \le S_1\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right) \tag{22}$$

*[SK3] **Shannon** 加法性:*

$$p_{ij} \ge 0,\ \ p_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}\ \ \forall i = 1,\cdots,n, \forall j = 1,\cdots,m_i, \tag{23}$$

[2] Rényi エントロピーは，Shannon エントロピーを 1 パラメータ拡張したエントロピーとして古くから知られている． Rényi エントロピー $S_q^{\mathrm{Rényi}}$ は，Tsallis エントロピー S_q^{Tsallis} を用いて，一意に $S_q^{\mathrm{Rényi}} = \frac{1}{1-q} \ln(1+(1-q)\,S_q^{\mathrm{Tsallis}})$ として表される．Rényi エントロピーについては，本論文と同じような結果が約 40 年ぐらい前に Campbell が発表している [12]．ただ，そこでは，平均符号長として，$L_0 := \Sigma_{i=1}^{N} p_i \ell_i$ ではなく，$L_t := \frac{1}{t} \ln(\Sigma_{i=1}^{N} p_i 2^{t\ell_i})$ を用いて，$S_q^{\mathrm{Rényi}} \le L_t < S_q^{\mathrm{Rényi}} + 1$ が示されている．しかし，(18) にあるように，Tsallis エントロピーの場合は，通常の平均符号長の定義を用いればよい．

に対して，次の等式が成り立つ．

$$S_1(p_{11},\dots,p_{nm_n}) = S_1(p_1,\dots,p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i S_1\left(\frac{p_{i1}}{p_i},\dots,\frac{p_{im_i}}{p_i}\right) \tag{24}$$

[SK4] 展開性:

$$S_1(p_1,\dots,p_n,0) = S_1(p_1,\dots,p_n). \tag{25}$$

定理 8 の証明は [13] を参照．．

(24) を本論文では Shannon 加法性と呼ぶことにする．この Shannon 加法性を用いて情報源符号化定理を導出する．その準備として，いくつかの用語を定義する．

定義 9 閉路を持たない連結グラフを木という．木において，任意の節を *1* つ選んでその節を根としたとき，その木を根付き木という．根付き木において，子を持つ節を内節点，子を持たない節を葉という．任意の内節点の子の数が高々D である根付き木を D 元木という．

定理 10 n 個の内節点 $j=1,\cdots,n$ と N 個の葉 $i=1,\cdots,N$ を持つ根付き木に対して，確率 $p_i\ (i=1,\cdots,N)$ を各葉に割り当てる．d_j 個の子をもつ内節点 "j" に対して，"j" に割り当てる確率 $\hat{p}_j$ を

$$\hat{p}_j := p_{j_1} + \cdots + p_{j_{d_j}} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{26}$$

で定義する．ここで，$p_{j_1},\cdots,p_{j_{d_j}}$ は内節点 "j" の d_j 個の子に割り当てられた確率である．本論文では，"^" は内節点を表す．このとき，各内節点に対して，確率分布

$$\frac{p_{j_1}}{\hat{p}_j},\cdots,\frac{p_{j_{d_j}}}{\hat{p}_j} \quad (j=1,\cdots,n). \tag{27}$$

が定まる．この確率分布 *(27)* に対して，*Shannon* エントロピー $S_1^{(j)}$ は，次で与えられる．

$$S_1^{(j)} := S_1\left(\frac{p_{j_1}}{\hat{p}_j},\cdots,\frac{p_{j_{d_j}}}{\hat{p}_j}\right) \quad (j=1,\cdots,n). \tag{28}$$

このとき，次が成り立つ．

$$S_1(p_1,\cdots,p_N) = \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j S_1^{(j)}. \tag{29}$$

証明の前に，この定理の意味を，具体例を通して明らかにしておく．

例 11 葉 $N=7$ と内節点 $n=3$ をもつ，次の根付き木について考える．確率 $p_i\ (i=1,\cdots,7)$ と確率 $\hat{p}_j$ $(j=1,\cdots,3)$ を，それぞれ次の根付き木の葉と内節点に割り当てる．

上の定理 *10* は，次の等式の成立を主張する．

$$S_1(p_1,\cdots,p_7) = \hat{p}_1 S_1^{(1)} + \hat{p}_2 S_1^{(2)} + \hat{p}_3 S_1^{(3)} \tag{30}$$

ここで，

$$S_1^{(1)} := S_1\left(\frac{p_1}{\hat{p}_1},\frac{\hat{p}_3}{\hat{p}_1}\right) \qquad \hat{p}_1 := p_1 + \hat{p}_3, \tag{31}$$

$$S_1^{(2)} := S_1\left(\frac{p_2}{\hat{p}_2},\frac{p_3}{\hat{p}_2},\frac{p_4}{\hat{p}_2},\frac{p_5}{\hat{p}_2}\right) \qquad \hat{p}_2 := p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \tag{32}$$

$$S_1^{(3)} := S_1\left(\frac{\hat{p}_2}{\hat{p}_3},\frac{p_6}{\hat{p}_3},\frac{p_7}{\hat{p}_3}\right) \qquad \hat{p}_3 := \hat{p}_2 + p_6 + p_7. \tag{33}$$

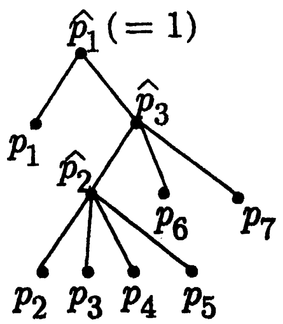

図 1: 7 個の葉と 3 個の内節点をもつ根付き木

定理 10 の証明をする.

証明. 内節点の数"n"に対する帰納法を用いる. $n=1$ のときは, 根と N 個の葉のみからなる木なので, (29) は明らか. $n=1$ のとき, (29) が成り立つと仮定する.

$$S_1(p_1,\cdots,p_N)=\sum_{j=1}^{k}\hat{p}_j S_1^{(j)}. \tag{34}$$

帰納法の仮定 (34) のもと, (29) における $n=k+1$ の場合を証明する. N 個の葉から, 割り当てられた確率が 0 でない葉"v"を選ぶ. その確率を $p_v\ (\neq 0)$ と表す. その"v"の子として, 新しい ℓ 個の葉を加える. (26) より, 確率 p_v とその ℓ 個の子の葉に割り当てられる確率 $p_{v_1},\cdots,p_{v_\ell}$ の関係は,

$$p_v=p_{v_1}+\cdots+p_{v_\ell}. \tag{35}$$

である. "v"は ℓ 個の子を持つので, もはや葉ではなく, 新しい内節点である. そこで, これを $(k+1)$ 番目の内節点とし, その確率 p_v を改めて $\hat{p}_{k+1}$ で表すと,

$$\hat{p}_{k+1}=p_v=p_{v_1}+\cdots+p_{v_\ell} \tag{36}$$

と書ける. このとき, Shannon 加法性 (24) を用いると, $(N-1)+\ell$ 個の葉に対する Shannon エントロピー $S_1(p_1,\cdots,p_{v-1},p_{v_1},\cdots,p_{v_\ell},p_{v+1},\cdots,p_N)$ は次のように展開できる.

$$\begin{aligned}
&S_1(p_1,\cdots,p_{v-1},p_{v_1},\cdots,p_{v_\ell},p_{v+1},\cdots,p_N)\\
&=S_1(p_1,\cdots,p_v,\cdots,p_N)+p_vS_1\left(\frac{p_{v_1}}{p_v},\cdots,\frac{p_{v_\ell}}{p_v}\right)\quad(\because \text{Shannon 加法性 (24)}) && (37)\\
&=S_1(p_1,\cdots,p_N)+\hat{p}_{k+1}S_1\left(\frac{p_{v_1}}{\hat{p}_{k+1}},\cdots,\frac{p_{v_\ell}}{\hat{p}_{k+1}}\right)\quad(\because \hat{p}_{k+1}=p_v\ (36)) && (38)\\
&=\sum_{j=1}^{k}\hat{p}_jS_1^{(j)}+\hat{p}_{k+1}S_1^{(k+1)}\quad(\because \text{仮定 (34) と定義 (28)}) && (39)\\
&=\sum_{j=1}^{k+1}\hat{p}_jS_1^{(j)} && (40)
\end{aligned}$$

仮定 (34) のもと, (29) における $n=k+1$ の場合もまた成り立つことがわかる. よって, 帰納法により, (29) が成り立つ. □

定理 12 N 個の葉をもつ根付き D 元木に対して, 確率分布 $p_1,\cdots,p_N$ を N 個の葉に割り当てる. このとき,

$$\frac{S_1(p_1,\cdots,p_N)}{\ln D}\leq\sum_{i=1}^{N}p_i\ell_i \tag{41}$$

が成り立つ．ここで，$\ell_i\ (i=1,\cdots,N)$ は，各葉の深さである．

証明． 根付き D 元木において，その定義より，全ての内節点は高々 D 個の子をもつ（定義 9）．(22) より，各内節点"j"に付随する Shannon エントロピー $S_1^{(j)}$ (28) は，$\ln D$ よりも小さい．

$$S_1^{(j)} \le \ln D \quad (j=1,\cdots,n) \tag{42}$$

ここで，n は内節点の数を表す．定理 10 を用いると，N 個の葉に割り当てられた確率分布 $p_1,\cdots,p_N$ に対して，Shannon エントロピー $S_1(p_1,\cdots,p_N)$ は，

$$S_1(p_1,\cdots,p_N) = \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j S_1^{(j)} \le \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j \ln D. \tag{43}$$

を満たす．これより，

$$\frac{S_1(p_1,\cdots,p_N)}{\ln D} \le \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j. \tag{44}$$

各 $\hat{p}_j$ が，その子に割り当てられた確率の和であることから，

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j = \sum_{i=1}^{N} p_i \ell_i \tag{45}$$

である．(例 11 において，$\sum_{j=1}^{3} \hat{p}_j = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 3 + p_3 \cdot 3 + p_4 \cdot 3 + p_5 \cdot 3 + p_6 \cdot 2 + p_7 \cdot 2 = \sum_{i=1}^{7} p_i \ell_i$.) ゆえに，定理が証明された．□

(43) の等号条件より，最適分布 $p_i = \prod_{k=1}^{\ell_i} D^{-1} = D^{-\ell_i}\ (i=1,\cdots,N)$ すなわち，最適な符号長 $\ell_i = -\log_D p_i$ が導かれる．これら最適分布・最適な符号長は，情報理論では良く知られた結果である [15].

この節で述べた 2 つの証明は，[16] の 2.3 節で記載されている証明を少しアレンジした証明である．これらの結果を，(18) の証明のために，次の節で一般化する．

2.2 一般化 Shannon 加法性から導かれる平均符号長の下限

Tsallis エントロピーを特別な場合として含む非加法的エンントロピーに対する一般化 Shannon-Khinchin の公理系と一意性定理は，次のように与えられる [17].

定理 13 Δ_n を *(20)* で定義される n 次元単体とする．公理系 *[GSK1]~[GSK4]* を満たす関数 $S_q : \Delta_n \to \mathbb{R}^+$ は，一意に次の関数に定まる．

$$S_q(p_1,\ldots,p_n) = \frac{1-\sum_{i=1}^{n} p_i^q}{\phi(q)}, \tag{46}$$

ここで，$q>0$ と $\phi(q)$ は，*(i)* ~ *(iv)* を満たす．

(i) $\phi(q)$ は $\mathbb{R}^+$ において連続な関数で，$q-1$ と同じ符号である，すなわち，$\phi(q)(q-1)>0\ (q\neq 1)$，

(ii) $\lim_{q\to 1} \phi(q) = \phi(1) = 0, \quad \phi(q) \neq 0\ (q \neq 1)$，

(iii) 区間 $(a,1)\cup(1,b)\ (a<1, b>1)$ において，$\phi(q)$ は微分可能，

(iv) $\lim_{q\to 1} \dfrac{d\phi(q)}{dq} = \dfrac{1}{k}$ を満たす $k>0$ が存在する．

[GSK1] 連続性: S_q は，Δ_n と $q>0$ において連続である，

[GSK2] 最大性: S_q は $p_i = \frac{1}{n}\ (i=1,\ \ldots,\ n)$ において，最大値をとる．

$$S_q(p_1,\cdots,p_n) \le S_q\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right), \tag{47}$$

[GSK3] **一般化** *Shannon* **加法性**: 条件 *(23)* のもと，次が成り立つ．

$$S_q(p_{11},\ldots,p_{nm_n}) = S_q(p_1,\ldots,p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i^q S_q\left(\frac{p_{i1}}{p_i},\ldots,\frac{p_{im_i}}{p_i}\right) \tag{48}$$

[GSK4] 展開性:

$$S_q(p_1,\ldots,p_n,0) = S_q(p_1,\ldots,p_n). \tag{49}$$

定理 13 の証明は [17] で与えられている．$\phi(q) = q - 1$ のときが最も簡単な非加法的エントロピーであり，そのとき，(46) は Tsallis エントロピー (16) に一致する．

Shannon 加法性 (24) に対応して，(48) を一般化 Shannon 加法性と呼ぶことにする．この一般化 Shannon 加法性を用いて，前節と同様の方法で (18) を証明する．なお，一般化 Shannon 加法性 (48) は，q-多項係数 (14) や q-微分の Leibnitz ルールなどからも導かれる [1].

非加法的エントロピー (46) に対して，定理 10 と同様な結果を導くことができる．

定理 14 定理 *10* と同じ条件 *(26)* と *(27)* のもと，確率分布 *(27)* に対する非加法的エントロピー $S_q^{(j)}$

$$S_q^{(j)} := S_q\left(\frac{p_{j_1}}{\hat{p}_j},\cdots,\frac{p_{j_{d_j}}}{\hat{p}_j}\right) \quad (j = 1,\cdots,n). \tag{50}$$

に対して，

$$S_q(p_1,\cdots,p_N) = \sum_{j=1}^{n} (\hat{p}_j)^q S_q^{(j)}. \tag{51}$$

が成り立つ．

定理 10 と同様に証明できるので，証明は省略する．

定理 14 は，$\phi(q)$ を具体的に定めていないという点において，一般的な結果である．一般化 D 元符号木を導入するために，$\phi(q)$ の最も簡単な形として，$\phi(q) = q - 1$ をとる．すなわち，Tsallis エントロピー (16) の場合を考える．(以下，$k := 1$ とする．)

D 元符号木の定義（定義 9）より，任意の内節点の子の数 D_j は，

$$\ln D_j \le \ln D \quad (j = 1,\cdots,n). \tag{52}$$

を満たす．これに対して，一般化 D 元符号木を次のように定義する．

定義 15 根付き木において，n と D_j $(j = 1,\cdots,n)$ をそれぞれ内節点の数と内節点 "j" の子の数とする．根付き木のすべての葉に割り当てられている確率に対して，各内節点 "j" をその子に割り当てられた確率の和で定義する *((26)* 参照*)*．全ての内節点に対して，

$$(\hat{p}_j)^{q-1} \ln_q D_j \le \ln_q D \quad (j = 1,\cdots,n), \tag{53}$$

が成り立つとき，その根付き木を**一般化** D **元符号木**という．

明らかに，$q \to 1$ のとき，一般化 D 元符号木は通常の D 元符号木に一致する．次の定理の証明のあとに，一般化 D 元符号木の例を与える．

定理 16 N 個の葉をもつ一般化 D 元符号木に対して，確率分布 $p_1,\cdots,p_N$ が N 個の葉に割り当てられている．このとき，

$$\frac{S_q(p_1,\cdots,p_N)}{\ln_q D} \le \sum_{i=1}^{N} p_i \ell_i \tag{54}$$

が成り立つ．ここで，ℓ_i $(i = 1,\cdots,N)$ は，各葉の深さである．

証明. (47) より，各 $S_q^{(j)}$ は $\ln_q D_j$ よりも小さい．

$$S_q^{(j)} \leq \ln_q D_j \quad (j=1,\cdots,n) \tag{55}$$

ここで，n は内節点の数である．定理 14 より，N 個の葉に割り当てられた確率分布 $p_1,\cdots,p_N$ に対して，Tsallis エントロピー $S_q(p_1,\cdots,p_N)$ は次を満たす．

$$\begin{aligned} S_q(p_1,\cdots,p_N) &= \sum_{j=1}^{n} (\hat{p}_j)^q S_q^{(j)} \quad (\because \text{定理}\ 14) & (56)\\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (\hat{p}_j)^q \ln_q D_j \quad (\because (55)) & (57)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j \cdot (\hat{p}_j)^{q-1} \ln_q D_j & (58)\\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j \ln_q D \quad (\because (53)) & (59)\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\frac{S_q(p_1,\cdots,p_N)}{\ln_q D} \leq \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j. \tag{60}$$

定理 12 の最後で述べたように，$\sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j = \sum_{i=1}^{N} p_i \ell_i$．よって，定理は証明された．□

(57) と (59) の等号条件より，最適な分布は $p_i = \prod_{k=1}^{\ell_i} \left(D_{(k)}\right)^{-1}$ $(i=1,\cdots,N)$ で，各 $D_{(k)}$ は，漸化式 $D_{(k+1)} := \left\lfloor \exp_q\left(\left(D_{(k)}\right)^{q-1} \ln_q D_{(k)}\right)\right\rfloor$, $D_{(1)} := D$ で定まる．$\lfloor\cdot\rfloor$ は床関数である．

ここで，一般化 D 元符号木の情報論的な意味を考察しておく．D 元符号木の D は，アルファベットの数を意味する．(2 元符号 $\{0,1\}$ の場合，D 元符号木は二分木を表す.) D 元符号木の定義より，その内節点は高々D 個の子をもつ．つまり，任意の内節点について，$D_j \leq D$ である．

一方，一般化 D 元符号木では，定義 15 より，D_j が $\hat{p}_j$ に依存することにより，$D_j > D$ となる場合がある．具体的には，$q>1$ のとき，$D_j > D$ となる場合がある．一方，$0<q\leq 1$ のとき，$0<\hat{p}_j\leq 1, \ln_q D_j > 0$, 定義 15,$q$-対数関数 $\ln_q x$ の単調増加性より，$D_j \leq D$ を容易に証明できる．したがって，$0<q\leq 1$ のときは，$D_j \leq D$ であるから，一般化 D 元符号木においても Shannon エントロピー S_1 が下限を与える．実際，$0<q\leq 1$ のとき，$S_1 \leq S_q$, $\dfrac{S_1}{\ln D} \leq \dfrac{S_q}{\ln_q D}$ である．しかし，$q>1$ のときは，$D_j > D$ となる場合があり，Tsallis エントロピーが一般化 D 元符号木における平均符号長の下限を与える．より具体的な例を図 1 を用いて与える．

例 17 $N=7$, $D=2$, $q=1.5$ の場合を考える．確率分布：

$$(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7) = \left(\frac{17}{32},\frac{1}{32},\frac{2}{32},\frac{3}{32},\frac{4}{32},\frac{2}{32},\frac{3}{32}\right) \tag{61}$$

に対して，二進符号を考えたとき，その平均符号長の下限は *Shannon* エントロピーで与えられ，次のように計算できる．

$$\frac{S_1(p_1,\cdots,p_7)}{\ln 2} = 2.16. \tag{62}$$

一方，上の確率 $p_1,\cdots,p_7$ を図 *1* の *7* つの葉に割り当てる．このとき，*(31)*〜*(33)* より，

$$\hat{p}_1 = 1, \quad \hat{p}_2 = \frac{5}{16}, \quad \hat{p}_3 = \frac{15}{32}. \tag{63}$$

である．図 *1* より，$D_1=2$, $D_2=4, D_3=3$ であり，各 $\hat{p}_j$ $(j=1,2,3)$ は，一般化 D 元符号木の定義 *(53)* を満たすことは容易に確認できる．

$$(\hat{p}_j)^{q-1} \ln_q D_j \leq \ln_q D = \ln_q 2 \tag{64}$$

よって，上の確率分布を割り当てられた根付き符号木（図 1）は，一般化 D 元符号木であることがわかる．
定理 16 より，一般化 D 元符号木の平均符号長の下限は，

$$\frac{S_q(p_1,\cdots,p_7)}{\ln_q 2}=1.62. \tag{65}$$

で与えられる．

情報理論において，符号化に用いるアルファベットの数 D は，与えられる確率分布にかかわらず，予め固定するのが通常である．一方，一般化 D 元符号木における内節点の子の数 D_j は，その定義より，内節点に付随する確率 $\hat{p}_j$ に依存しているため，予め固定できない．このことは，工学的に明らかに不都合である．しかし，木をグラフの特別な場合と見直すと，D_j+1 は，各ノード (内節点) のリンク（辺）の数を表している（根のみ，リンク数は D_j）．現在まで，スケールフリーネットワークを生成するアルゴリズムが数多く提案されているが，そのほとんどが，ノード (内節点) に付随する確率 $\hat{p}_j$ とリンク（辺）の数 D_j+1 に依存したアルゴリズムである．このことから，本論文で導入した一般化 D 元符号木の平均符号長の下限は，木の拡張としてのネットワークの何らかの下限を与えている可能性があり，今後の課題である．

3 おわりに

本論文では，まず，基本的な非線形微分方程式の解から，q-積，q-スターリングの公式，q-多項係数，Boltzmann の関係式などの基本的な定式化を通して，Tsallis エントロピーが自然に導かれることを示した．その上で，Tsallis エントロピーの情報論的な意味を明らかにするために，Tsallis エントロピーを平均符号長の下限とする符号木のクラスである一般化符号木を導入し，実際，その平均符号長の下限になることを証明した．特に，通常の方法とは異なり，エントロピーが与えられた上で，それを下限とする符号木を導出する方法をとった．より具体的には，エントロピーの公理系の一つである Shannon 加法性を出発点にした．この方法は，他の一般化エントロピーに応用できるとは限らない．今後，本論文で導入した一般化符号木の意味，特に，ネットワークとの関係を明らかにすることが重要になってくると考えられる．

参考文献

[1] H. Suyari and T. Wada, Scaling property and Tsallis entropy derived from a fundamental nonlinear differential equation, Proc. of the 2006 Inter. Sym. on Inform. Theory and its Appli. (ISITA2006), pp.75-80, 2006. [LANL e-print cond-mat/0608007]

[2] C. Tsallis et al., Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, edited by S. Abe and Y. Okamoto (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001).

[3] C. Tsallis et al., Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications, edited by M. Gell-Mann and C. Tsallis (Oxford Univ. Press, New York, 2004).

[4] L. Nivanen, A. Le Mehaute, Q.A. Wang, Generalized algebra within a nonextensive statistics, Rep. Math. Phys. 52, 437-434, 2003.

[5] E.P. Borges, A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics, Physica A 340, 95–101, 2004.

[6] H. Suyari, M. Tsukada and Y. Uesaka, Mathematical structures derived from the q-product uniquely determined by Tsallis entropy, Proc. of the 2005 IEEE Inter. Sym. on Inform. Theory (2005IEEE-ISIT), pp.2364-2368, 2005.; H. Suyari, Mathematical structure derived from the q-multinomial coefficient in Tsallis statistics, Physica A, vol.368, pp.63-82, 2006.

[7] H. Suyari and T. Wada, Multiplicative duality, q-triplet and (μ, ν, q)-relation derived from the one-to-one correspondence between the (μ, ν)-multinomial coefficient and Tsallis entropy S_q, Physica A, vol. 387, 71-83, 2008.

[8] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, J. Stat. Phys. vol.52, pp.479-487, 1988.

[9] H. Suyari and M. Tsukada, Law of error in Tsallis statistics, IEEE Trans. Inform. Theory, vol.51, pp.753-757, 2005.

[10] H. Suyari, The unique non self-referential q-canonical distribution and the physical temperature derived from the maximum entropy principle in Tsallis statistics, Prog. Theor. Phys. Suppl., vol.162, pp.79-86, 2006.

[11] H. Suyari, Tsallis entropy as a lower bound of average description length for the q-generalized code tree, Proceedings of 2007 IEEE International Symposium on Information Theory (2007IEEE-ISIT), pp.901-905, 2007.

[12] L. L. Campbell, Coding theorem and Rényi's entropy, Information and Control, vol. 8, pp. 423-429, 1965.

[13] A.I. Khinchin, Mathematical Foundations of Information Theory, Dover, New York, 1957.

[14] C.E. Shannon and W. Weaver, The Mathematical Theory of Communication, University of Illinois Press, Urbana, 1963.

[15] T.M. Cover and J.A. Thomas, Elements of information theory, Wiley, New York, 1991, (2nd edition, 2006)

[16] 堀部安一，情報エントロピー論，森北出版, 1997.

[17] H. Suyari, Generalization of Shannon-Khinchin axioms to nonextensive systems and the uniqueness theorem for the nonextensive entropy, IEEE Trans. Inform. Theory, vol.50, pp.1783-1787, 2004.