数理解析研究所講究録
第1585巻 2008年 150-153

量子論における確率解釈について

五十嵐 彰

1. 量子論的形式から確率つき命題論理式が導かれ逆も成り立つ。従って、量子論的形式の解釈は対応する確率つき命題論理式に従って解釈すべきである。

確率つき命題論理式から、事象、全事象などの概念およびそれらの確率による確率論的記述が得られ、逆も成り立つ。

このことから、量子論的形式において果たしている事象、全事象などの概念およびそれらの確率の役割が明らかになる。

これを最も簡単な猫の場合について述べる。

1) 猫が生まれてから t 時間後、確率 $P_{猫生}(t)$ で生きているという命題を $\Psi_{猫生}(t)$、確率 $P_{猫死}(t)$ で死んでいるという命題を $\Psi_{猫死}(t)$ とし確率 $P_{猫生死}(t)$ で生きておりかつ死んでいるという命題を $\psi_{猫生死}(t)$ とする。

2) 確率つき命題論理式

$$(\Psi_{猫}(t), P_{\Psi_{猫}}(t))) = (\Psi_{猫生}(t), P_{\Psi_{猫生き}}(t))) + (\Psi_{猫生死}(t), P_{\Psi_{猫死}}(t)))$$

を考える。

$$\Psi_{猫}(t) = \Psi_{猫生}(t) + \Psi_{猫死}(t)$$

におで + は論理和 or の意味である。

3) 命題論理によれば

$$\Psi_{猫}(t) \text{ が真} \Longleftrightarrow \Psi_{猫生}(t)、\Psi_{猫死}(t) \text{ の少なくとも一つが真}$$

である。

4) $P_{\Psi_{猫}}(t) = 1$ であるから $\Psi_{猫}(t)$ は真な命題である。

5) 内積 $(,)$ をもつ2次元の Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ を考え、$\{\varepsilon_i(t)|i=1,2\}$ をノルム1の $\mathscr{H}$ の基底とし

$$\Psi_{猫}(t) = \Psi_{猫生}(t) + \Psi_{猫死}(t)$$

を $\mathscr{H}$ において

$$\varphi_{猫生}(t) = \alpha(t)\varphi_{猫生}(t) + \beta(t)\varphi_{猫死}(t)$$

と表現する。

ここで $\varphi_{猫生}(t)$、$\varphi_{猫死}(t)$ を

$$\varphi_{猫生}(t) = \varepsilon_1(t), \quad \varphi_{猫死}(t) = \varepsilon_2(t),$$

によって定義し、$\{\varepsilon_i(t)|i=1,2\}$、$\alpha(t)$、$\beta(t)$ を

$$|\alpha(t)|^2 \quad = P_{\Psi_{猫生}}(t), \quad |\beta(t)|^2 = P_{\Psi_{猫死}}(t),$$

$$\alpha(t)\overline{\beta(t)}(\varphi\text{ 猫生 }(t)), \varphi_{\text{猫死}}(t)) + \overline{\alpha(t)}\beta(t)(\varphi_{\text{猫死}}(t), \varphi_{\text{猫生}}(t)) = P_{\Psi_{\text{猫生死}}}(t)$$

を満足するするように決める。

6) $\varphi_{\text{猫生}}(t)$ を確率 $|\alpha(t)|^2$ をもつ状態、$\varphi_{\text{猫死}}(t)$ を確率 $|\beta(t)|^2$ をもつ状態といい、確率 $P_{\Psi_{\text{猫生死}}}(t)$ をもつ状態を

$$\varphi_{\text{猫生死}}(t)$$

によって表せば

$$\|\varphi_{\text{猫生}}(t)\| = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 +$$
$$\alpha(t)\overline{\beta(t)}(\varphi\text{ 猫生 }(t), \varphi_{\text{猫死}}(t)) + \overline{\alpha(t)}\beta(t)(\varphi_{\text{猫死}}(t), \varphi_{\text{猫生}}(t)) = 1$$

が得られる。

7) $\mathscr{H}'$ を内積 $<,>$ をもつ 2 次元の Hilbert 空間、$\{\varepsilon_i'(t)|i = 1, 2\}$ をノルム 1 の $\mathscr{H}'$ の基底とし

$$\Psi_{\text{猫}}(t) = \Psi_{\text{猫生}}(t) + \Psi_{\text{猫死}}(t)$$

を $\mathscr{H}'$ において

$$\varphi'_{\text{猫生}}(t) = \alpha'(t)\varphi'_{\text{猫生}}(t) + \beta'(t)\varphi'_{\text{猫死}}(t)$$

と表現する。

ここで $\varphi'_{\text{猫生}}(t)$、$\varphi'_{\text{猫死}}(t)$ を

$$\varphi'_{\text{猫生}}(t) = \varepsilon_1'(t), \quad \varphi'_{\text{猫死}}(t) = \varepsilon_2'(t),$$

によって定義し、$\{\varepsilon_i'(t)|i = 1, 2\}$、$\alpha'(t)$、$\beta'(t)$ を

$$|\alpha'(t)|^2 \quad = P_{\Psi_{\text{猫生}}}(t), \quad |\beta'(t)|^2 = P_{\Psi_{\text{猫死}}}(t),$$

$$\alpha'(t)\overline{\beta'(t)}(\varphi''\text{猫生 }(t), \varphi''_{\text{猫死}}(t)) + \overline{\alpha'(t)}\beta'(t)\varphi'_{\text{猫死}}(t), \varphi'_{\text{猫生}}(t))) = P_{\Psi_{\text{猫生死}}}(t)$$

を満足するするように決めると

$$\varphi'_{\text{猫生}}(t) = \alpha'(t)\varphi'_{\text{猫生}}(t) + \beta'(t)\varphi'_{\text{猫死}}(t)$$

も

$$\Psi_{\text{猫}}(t) = \Psi_{\text{猫生}}(t) + \Psi_{\text{猫死}}(t)$$

の表現であから、これらの表現を同一視して $\Psi_{\text{猫}}(t) = \Psi_{\text{猫生}}(t) + \Psi_{\text{猫死}}(t)$ の表現を

$$\varphi_{\text{猫生}}(t) = \alpha(t)\varphi_{\text{猫生}}(t) + \beta(t)\varphi_{\text{猫死}}(t)$$

によって表す。

8) $\varphi_{\text{猫生}}(t) = \alpha(t)\varphi_{\text{猫生}}(t) + \beta(t)\varphi_{\text{猫死}}(t)$ を量子論的形式という。

9) $t>0$ とすれば、次の条件は同値である：

(1) $P_{\Psi_{猫生死}}=0$；

(2) $\Psi_{猫生}(t)\cdot\Psi_{猫死}(t)=0$；
ここで 0 は命題が偽であることを示す真理値である。

(3) $(\varphi_{猫生}(t),\varphi_{猫死}(t))=0$；

(4) $\varphi_{猫}(t)=\varphi_{猫生}(t)\oplus\varphi_{猫死}(t)$；
ここで $\oplus$ は直交和である。

この条件を満足するとき $\{\varepsilon_i(t)|i=1,2\}$ は

$$(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t))=0$$

を満足するように選べる。

10)

$$\varphi_{猫}(t)=\alpha(t)\varphi_{猫生}(t)+\beta(t)\varphi_{猫死}(t)$$

は + を or と解釈して、確率つき命題論理式とみなせる。　これを確率つき命題論理式とみなすときは

$$\Psi_{猫}(t)=\Psi_{猫生}(t)+\Psi_{猫死}(t),$$

によって表す。

ここで

$$P_{\Psi_{猫生}}(t)=|\alpha(t)|^2,\quad P_{\Psi_{猫死}}(t)=|\beta(t)|^2,$$

$P_{\Psi_{猫生死}}(t)=\alpha(t)\overline{\beta(t)}(\varphi\,猫生\,(t),\varphi_{猫死}(t))+\overline{\alpha(t)}\beta(t)(\varphi_{猫死}(t),\varphi_{猫生}(t))$.

11) 確率つき命題論理式から量子論的形式が得られ、逆に量子論的形式から確率つき命題論理式が得られる。

12) 確率つき命題論理式から、事象、全事象を
$\psi_{猫生}(t)=\Psi_{猫生}(t)$, $\psi_{猫死}(t)=\Psi_{猫死}(t)$, $\psi_{猫生死}(t)=\Psi_{猫生死}(t)$, $\psi_{猫}(t)=\Psi_{猫}(t)$
によって定義し　事象、全事象の確率を
$P_{\psi_{猫生}}(t)=P_{\Psi_{猫生}}(t)$, $\mathrm{P}_{\psi_{猫死}}(t)=P_{\Psi_{猫死}}(t)$, $P_{\psi_{猫生死}}(t)=P_{\Psi_{猫生死}}(t)$, $P_{\psi_{猫}(t)}=P_{\Psi_{猫}}(t)$
によって定義することにより、確率つき命題論理式から事象、全事象、およびそれらのの確率による確率論的記述得られることが解かった。
同じ置き換えにより逆も成り立つ。

2. 以上の結果から量子論的形式

$$\varphi_{猫}(t)=\alpha(t)\varphi_{猫生}(t)+\beta(t)\varphi_{猫死}(t),$$

は $\varphi_{猫}(t)$ を全事象、$\varphi_{猫生}(t)$、$\varphi_{猫死}(t)$、$\varphi_{猫生死}(t)=\varphi_{猫生死}(t)$ を事象と考え、その解釈は対応する確率つき命題論理式に従って解釈しなければならない。

1) 状態 $\varphi_{猫}(t)$ は $\varphi_{猫生}(t)$ にあるか、状態 $\varphi_{猫死}(t)$ にあるかの少なくとも一方が成り立つ。

状態 $\varphi_{猫生}(t)$ にある確率は $|\alpha(t)|^2$、状態 $\varphi_{猫死}(t)$ ある確率は $|\beta(t)|^2$、状態 $\varphi_{猫生死}(t)$ ある確率は

$$\alpha(t)\overline{\beta(t)}(\varphi\ 猫生\ (t), \varphi_{猫死}(t)) + \overline{\alpha(t)}\beta(t)(\varphi_{猫死}(t), \varphi_{猫生}(t))$$

である。

2)

$$\Psi_{猫生}(t) \cdot \Psi_{猫死}(t) = 0$$

を仮定する。 このとき

$\varphi_{猫}(t) = \alpha(t)\varphi_{猫生}(t) \oplus [be(t)\varphi_{猫死}(t), \quad \|\varphi_{猫}(t)\|^2 = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$
の解釈は次の様になる：

状態 $\varphi_{猫}(t)$ は確率 $|\alpha(t)|^2$ で状態 $\varphi_{猫生}(t)$ にあるか、確率 $|\beta(t)|^2$ で状態 $\varphi_{猫死}(t)$ にあるかいずれか一方である。

3. Schrödinger の猫の場合も同様に解釈すればよい。

注意 量子論における 2 重スリットにおける一般解

$$\varphi(x, y) = \alpha\varphi_1(x, y) + \beta\varphi_2(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$$

において $\varphi(xy)$ に対応する事象 $\psi(x, y)$ は全事象ではなく事象である。

この問題の全事象は事象の集合 $\{\psi(x, y)_{x,y} : x, y \in \mathbb{R}\}$ で量子論的形式では

$$\underset{x,y\in\mathbb{R}}{\oplus} \psi(x, y)$$

と書くことにする。

Akira Igarashi
3-4-23 Nishine-minami, Tsuchiura-shi, Ibaraki, 300-0842, Japan
Email: jiga-akira@memoad.jp