数理解析研究所講究録
第1587巻 2008年 22-26

Supersymmetric conformal field theory and operator algebras

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

1 前置き

代数的場の量子論 (algbraic quantum field theory) とは，物理理論である場の量子論を，時空領域でパラメトライズされた作用素環の族を用いて公理的，数学的に研究するものである．時空とその対称性の選び方によりいろいろなものが統一的に扱えるが，ここでは，Supersymmetric conformal field theory の場合について述べる．これは Carpi-Longo との共著論文 [4] に基づく．

2 共形場理論と作用素環

まず作用素環を用いた共形場理論の一般的枠組みについて概説する．正確な定義などは [13] に書いてある．量子場の理論を数学的に扱う際に広く使われているのは Wightman 場であり，それは時空の上のしかるべき作用素値超関数である．これらはある Hilbert 空間の上の作用素を値に取るが，代数的場の量子論では，同じ Hilbert 空間の上で有界な線形作用素のなす von Neumann 環を研究の対象にする．時空領域 O に対し，そこで観測可能な物理量に対応する (非有界) 自己共役作用素たちの生成する von Neumann 環を考えることにより，時空領域によってパラメトライズされた von Neumann 環の族ができる．(非有界作用素については，スペクトル分解に現れる射影たちを考えればよい．) そこで最初から時空領域でパラメトライズされた von Neumann 環の族である条件を満たすものを考えれば数学的には完全な理論ができる．時空は何でもよく，多様体や「非可換時空」での試みもあるが，一番うまくいっているのは Minkowski 空間である．ここでは，$1+1$-次元の Minkowski 空間を考える．ここで light ray $\{(x,t)|\,|\,x=\pm t\}$ の上に理論を「制限」することができ，そこで1次元空間 $\mathbf{R}$ 上の話になる．これをコンパクト化して S^1 にしたものをここでは考える．これが物理量を観測する空間に当たる．考える時空領域は円周上の区間と呼ばれるが，空でも稠密でもない，連結開集合のことである．また時空の対称性も指定する必要があるが，ここでは非常に高い対称性を要請する．すなわち S^1 上の向きを保つ diffeomorphism 全体の群 $\mathrm{Diff}(S^1)$ である．これが chiral conformal field theory と呼ばれる設定である．まず，"super" のつかないものを説明する．

基本的な対象は区間 I に対し，共通の Hilbert 空間の上の von Neumann 環 $A(I)$ を対応させる写像である．その正確な公理系については [13] に書かれているが，簡単に説明を与えておく．まず，区間が大きくなると，観測可能量は増えるので，von Neumann 環

も大きくなる．これが単調性の公理である．次に Einstein causality から生じるものとして，$I_1 \cap I_2 = \emptyset$ のとき $[A(I_1), A(I_2)] = 0$ となるという 局所性の公理がある．ここで四角い括弧は commutator である．また，共変性の公理は $\mathrm{Diff}(S^1)$ の射影的ユニタリ表現 u_g があって，$u_g A(I) u_g^* = A(gI)$ となるということである．(共変性にはさらにもう一つ自然な条件があるが詳しくは [13] を参照していただきたい．) さらに今考えている Hilbert 空間には特別の，真空ベクトルと呼ばれるベクトルがあり，表現についてある不変性を持っている．こうして公理付けられた作用素環族を local conformal net と言う．

これを "super" にする第一歩は $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-grading である．すなわち今考えている Hilbert 空間上に self-adjoint unitary Γ が存在して，$\Gamma A(I) \Gamma = A(I)$ などの条件を満たすことである．これによって，Hilbert 空間も各 von Neumann 環 $A(I)$ も，even part, odd part を持つことになる．これによって，odd operator x, y に対しては，$[x, y] = xy + yx$ とすることにより，super commutator $[x, y]$ を定めることができる．局所性の公理で，commutator を super commutator で置き換えたものが，超局所性の公理である．これに応じて，$\mathrm{Diff}(S^1)$ の表現についてもしかるべき条件をつける．半可換なものは Fermion と呼ばれるので，こうしてできる作用素環族を Fermi conformal net と呼ぶ．正確な定義は [4] にある．

3 Fermi conformal net の表現論

さて代数的場の量子論において最も基本的な道具は表現論である．今の設定では $A(I)$ たちを一斉に他の共通の Hilbert 空間に表現することを考える．$\mathrm{Diff}(S^1)$ の表現についてもある種の compatibility が必要である．表現された Hilbert 空間では真空ベクトルのことは考えなくてよい．表現の直和や既約性は簡単に定義できるが，テンソル積の定義はまったく明らかではない．これを実現するのが Doplicher-Haag-Roberts 理論 [6] であり，表現をある大きな C^*-環の自己準同型として実現し，自己準同型の合成を「テンソル積」の演算と定める．Local conformal net の設定では，これによって表現たちが組み紐圏をなす．([9].) この表現論を Fermi conformal net に拡張する必要がある．いろいろ技術的な問題はあるが，これらの表現論は Doplicher-Haag-Roberts 理論を拡張する形で，[4] で与えられた．

Fermi conformal net は even part に制限すれば通常の local conformal net になっていることに注意する．これによって，通常の local conformal net の表現論との関係がつけられる．特に，通常の local conformal net の表現に対して，下でも出てくる α-induction と呼ばれる誘導表現の技法を適用したとき，現れるものがいつ正当な表現になるかを，モノドロミーを用いて決定した．正当な表現になっていない場合は，ソリトン表現と呼ばれる，少し条件をゆるめたものになっている．ソリトン表現は，S^1 から "無限遠点" を取り除いたものの表現を考えることにあたっている．

4 Fermi conformal net の分類理論

まず [13] のよる，local conformal net の場合の分類理論を思い出そう．基本的な作戦は super がついても同じである．

Local conformal net に対し，共形共変性の公理から，Virasoro 代数の unitary 表現が生じる．Virasoro 代数とは，生成元 $\{L_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ と 中心的な元 c から

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0},$$

という関係式で定められる無限次元 Lie 環である．この生成元 c は正の実数に表現で移ることがわかるので，その値を central charge と呼んでやはり c で表す．[8], [12] によって，c の取りうる値は

$$\{1-6/m(m+1) \mid m=3,4,5,\ldots\} \cup [1,\infty)$$

であることがわかっている．$c<1$ の場合は，Virasoro 代数の表現は，local conformal net を生じることがわかっている．これは，[12] の coset construction を作用素環的に実現，研究した [17, 18] によって基本的な性質がわかっており，特にその表現論は modular 圏を与えることがわかっている．(Xu の仕事と [14] をあわせてよりわかる．）一般の local conformal net で $c<1$ となるものは，この Virasoro 代数の表現から生じる local conformal net (Virasoro net と呼ばれる) の拡大となっていることが共形共変性と局所性よりわかる．

このような拡大については誘導表現に当たる α-induction の一般論が [15, 16, 1] で研究されており，延長から modular invariant と呼ばれる特別な行列が生じることがわかっている．これは行列なので，無限次元の作用素環よりずっと扱いやすくさまざまな分類結果が得られている．この Virasoro 代数の表現の状況では，[3] により modular invariant の分類が得られており，それをもとに，[13] で local conformal net の分類が与えられた．そこでは分類リストの元は，A-D_{2n}-$E_{6,8}$ 型の Dynkin 図形のペアで，Coxeter 数の差が 1 であるようなものでラベル付けされた．ここには新しい例が作られており，その構成は [19] で一般化されている．

ここで共形共変性を "super 化" したものとして，$N=1$ super Virasoro 代数を考える．これは Virasoro 代数の生成元と関係式に $\{G_r\}$ と次の関係式

$$[L_m, G_r] = (\frac{m}{2}-r)G_{m+r}$$

$$[G_r, G_s] = 2L_{r+s} + \frac{c}{3}(r^2-\frac{1}{4})\delta_{r+s,0}$$

を加えたものであるが，r の動く範囲は二通りあって，$r \in \mathbf{Z}+1/2$ のときに Neveu-Schwarz 代数，$r \in \mathbf{Z}$ のときに Ramond 代数と呼ぶ．この表現がしかるべく組み込まれている Fermi conformal net を $N=1$ superconformal net と呼ぶことにする．$N=1$ super Virasoro 代数の表現においても同様に，c の取りうる値に制限がつき，

$$\{\frac{3}{2}\left(1-\frac{8}{m(m+2)}\right) \mid m=3,4,5,\ldots\} \cup [\frac{3}{2},\infty)$$

となることがわかっている．この離散部分はやはり，[12] の coset 構成で得られる．これも作用素環の枠組みで実現できることが Xu によってわかっているので，それによって得られる $N=1$ superconformal net を $N=1$ super Virasoro net と呼ぶ．これの延長を $N=1$ superconformal net として分類することを考える．$N=1$ super Virasoro net の even part を考えればこれは普通の local conformal net なので，α-indution と modular invariant によるこれまでの分類法が使える．この設定での，modular invariant の list は [2] で得られており，それが完全なリストであることは [10, 11] の手法で示せる．これによって，完全な分類リストが得られるのである．それは，

- $N=1$ super Virasoro net
- その index 2 の拡張
- 6 つの例外

からなる．[4] に詳しいことが書かれている．

References

[1] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *On α-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487. math.OA/9904109.

[2] A. Cappelli, *Modular invariant partition functions of superconformal theories*, Phys. Lett. **B 185** (1987) 82–88.

[3] A. Cappelli, C. Itzykson & J.-B. Zuber, *The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1–26.

[4] S. Carpi, Y. Kawahigashi,& R. Longo, *Structure and classification of superconformal nets*, preprint 2007, arXiv:0705.3609.

[5] P. Di Francesco, P. Mathieu & D. Sénéchal, "Conformal Field Theory", Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1996.

[6] S. Doplicher, R. Haag & J. E. Roberts, *Local observables and particle statistics*, I. Commun. Math. Phys. **23** (1971) 199–230; II. **35** (1974) 49–85.

[7] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, "Quantum symmetries on operator algebras", Oxford University Press, 1998.

[8] D. Friedan, Z. Qiu & S. Shenker, *Superconformal invariance in two dimensions and the tricritical Ising model*, Phys. Lett. **151B**, 37 (1985).

[9] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren & B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, I. Commun. Math. Phys. **125** (1989) 201–226, II. Rev. Math. Phys. **Special issue** (1992) 113–157.

[10] T. Gannon, *Towards a classification of* $\mathrm{su}(2)\oplus\cdots\oplus\mathrm{su}(2)$ *modular invariant partition functions*, J. Math. Phys. **36** (1995) 675–706.

[11] T. Gannon & M. A. Walton, *On the classification of diagonal coset modular invariants*, Commun. Math. Phys. **173** (1995) 175–197.

[12] P. Goddard, A. Kent & D. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **103**, 105-119 (1986).

[13] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of local conformal nets. Case $c < 1$*, Ann. of Math. **160** (2004), 493–522. math-ph/0201015.

[14] Y. Kawahigashi, R. Longo & M. Müger, *Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **219** (2001) 631–669. math.OA/9903104.

[15] R. Longo & K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 567–597.

[16] F. Xu, *New braided endomorphisms from conformal inclusions*, Commun. Math. Phys. **192** (1998) 347–403.

[17] F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories I*, Commun. Math. Phys. **211** (2000) 1–44.

[18] F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **35** (1999) 795–824.

[19] F. Xu, *Mirror extensions of local nets*, Commun. Math. Phys. **270** (2007) 835-847.