数理解析研究所講究録
第 1587 巻 2008 年 95-99



# Twisted Bernoulli shift actions of $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ and their commuting automorphisms

東京大学大学院数理科学研究科
酒匂宏樹

## ◎概要

本研究の目的は、有限型 von Neumann 環上の群作用であって、それと交換する自己同型全てを書き表せるものを (たくさん) 構成することである。計算したいものは、有限型 von Neumann 環 $N$ 上の $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ のトレースを保つ作用を $\beta$ とした時の、次で定められる群である:

$$\mathrm{Aut}(N,\beta)=\{\alpha\in\mathrm{Aut}(N)\colon \alpha\circ\beta_g=\beta_g\circ\alpha,\quad g\in\mathbb{Z}^2\rtimes\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\}. \tag{1}$$

有限型 von Neumann 環上のトレースを保つ $\mathbb{Z}^2\rtimes\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 作用について捻れ Bernoulli shift 作用と呼ばれるクラスを定義し、まずはじめに作用の共役性の意味で分類した (下の Theorem1)。つづいて、全ての捻れ Bernoulli shift 作用についてその作用と交換する自己同型全体からなる群を計算した (Theorem2)。

有限型 von Neumann 環のうち AFD $\mathrm{II}_1$ 型因子環 $R$ もしくは標準確率空間 $X$ 上の本質的有界関数環 $L^\infty(X)$ への作用に注目した。

Theorem2 の系として、あらかじめ与えられた群を、交換する自己同型全体の群として実現した。例えば、任意の離散可算可換群 $H$ に対して、$L^\infty(X)$ 上の $\mathbb{Z}^2\rtimes\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 作用 $\beta$ で、それと交換する自己同型の群が $\mathrm{Aut}(H)$(または $H\rtimes\mathrm{Aut}(H)$) と同型であるものの存在を示した。AFD $\mathrm{II}_1$ 型因子環 $R$ 上の作用については、任意の奇数 $n$ に対して、$R$ 上の $\mathbb{Z}^2\rtimes\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 作用で、交換する自己同型全体の群が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型であるものの存在を示した。

## ◎捻れ Bernoulli shift 作用の定義

捻れ Bernoulli shift 作用 $\beta(H,\mu,\chi)$ を、可算離散アーベル群 $H$ とそのスカラー 2-コサイクル $\mu$、指標 $\chi$ からなる三つ組み $(H,\mu,\chi)$ に対して定義した。群 $\mathbb{Z}^2\rtimes\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ が作用する von Neumann 環 $N(H,\mu)$ をペア $(H,\mu)$ に従って定義した。

有限型 von Neumann 環 $N(H,\mu)$ はテンソル積 von Neumann 環 $\overline{\otimes}_{\mathbb{Z}^2}L_\mu(H)$ への $\widehat{H}$ による作用の固定点部分環である。ここで $L_\mu(H)$ は群 $H$ の 2-コサイクル $\mu$ による群 von Neumann 環である。言い換えると $N(H,\mu)$ は次の群の群 von Neumann 環である:

$$\Lambda(H)=\{(f_k)_{k\in\mathbb{Z}^2}\in\oplus_{\mathbb{Z}^2}H\colon \Sigma_{k\in\mathbb{Z}^2}f_k=0\}. \tag{2}$$

群 $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の $N(H,\mu)$ への作用 $\beta(H,\mu,\chi)$ は、$\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}^2$ への作用に基づく一般化 Bernoulli shift 作用に、指標 $\chi$ に従う "捻れ" を加えたものである。詳しくは [Sa] を参照されたい。

**◎定理**

二つの捻れ Bernoulli shift 作用、$\beta(H_a,\mu_a,\chi_a)$ と $\beta(H_b,\mu_b,\chi_b)$ の間の共役を与える $*$-同型は非常に限定されていることを示した。二つの可換群 $H_a$ と $H_b$ の間の同型から由来するものしか、捻れ Bernoulli shift 作用の間の共役性を与え得ない。次の定理を得た。

**Theorem 1.** 記号 $i$ を $a$ または $b$ とする。三つ組み $(H_i,\mu_i,\chi_i)$ を可算離散アーベル群とその 2-コサイクル、指標からなる三つ組みとする。二つの捻れ *Bernoulli shift* 作用 $\beta_a = \beta(H_a,\mu_a,\chi_a)$、$\beta_b = \beta(H_b,\mu_b,\chi_b)$ が共役であるための必要十分条件は、次の条件を満たす $H_a$ から $H_b$ への群同型 $\phi$ が存在することである:

$$\begin{aligned}\overline{\mu_a(h,g)}\,\mu_a(g,h) &= \overline{\mu_b(\phi(h),\phi(g))}\,\mu_b(\phi(g),\phi(h)),\\ \chi_a(g)^2 &= \chi_b(\phi(g))^2, \quad (g,h\in H_a).\end{aligned}$$

この定理によって、二つの捻れ Bernoulli shift 作用が共役であるかどうかが判定される。自明でないのは、必要条件であることであるが、証明は共役を与える同型写像で元がどのようにうつりあうかを、フーリエ係数をつかって丁寧に見るという、非常に直接的なものである。

さらに、作用 $\beta(H,\mu,\chi)$ について、それと可換な $N(H,\mu)$ の自己同型を決定することができる。次の定理は、Theorem 1 においてソースの作用とターゲットの作用を同等にした場合と見ることができる。

**Theorem 2.** *von Neumann* 環 $N = N(H,\mu)$ 上の自己同型で捻れ *Bernoulli shift* 作用 $\beta = \beta(H,\mu,\chi)$ と交換するもの全体を $\mathrm{Aut}(N,\beta)$ とする。すなわち、

$$\mathrm{Aut}(N,\beta) = \{\alpha\in\mathrm{Aut}(N)\colon \alpha\circ\beta_g = \beta_g\circ\alpha, \quad g\in\mathbb{Z}^2\rtimes\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\}.$$

このとき、次の群の同型を得る:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Aut}(N,\beta)\\ \cong\;& \{\phi\in\mathrm{Aut}(H)\colon \chi^2\circ\phi = \chi^2, \mu^*\mu(\phi(g),\phi(h)) = \mu^*\mu(g,h), \quad (g,h\in H)\}.\end{aligned}$$

ここで $\mu^*\mu(g,h) = \overline{\mu(h,g)}\mu(g,h)$。

定理中で von Neumann 環 $N$ は群 von Neumann 環 $L(H)$ の無限テンソル積の部分環であるが、作用 $\beta(H,\mu,\chi)$ と交換する自己同型はテンソル積の一つ一つの底の間の、同型から由来するものしかない。それのみならず、$H$ の群の自己同型から由来するものしかいないということがこの定理の主な主張である。

群 $H$ の自己同型のうち、作用 $\beta$ と交換する環 $N$ 上の自己同型を与えるものは、2-コサイクル $\mu^*\mu$ を保つという条件と、指標 $\chi^2$ を保つという条件を満たす。前者は2-コサイクル $\mu$ のコホモロジークラスを保つという条件であり、後者は作用の定義において通常の Bernoulli shift 作用にねじれを加えたことに由来する。

定理での群の同型は位相もこめた同型であるが、詳細については [Sa] を参照されたい。作用と交換する自己同型はとても少なく、群 $H$ の自己同型から由来するものしかない。これは言い換えると、構成した作用がもつ対称性は非常に小さいということを意味する。

二つの定理の証明は不変量を用いておらず、群及び作用の特別な状況によった具体的な方法で示した。とくに、群 $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の集合 $\mathbb{Z}^2$ への作用の性質を用いている。不変量によらない作用の非共役性の証明は文献、長田 [Ch] やニコアラ、ポパ、サシック [NPS] にも例がある。

### ◎系

主定理の系として、以下のような事実を得た。捻れ Bernoulli shift 作用と交換する $L^\infty(X)$ の自己同型全体の群として、あらかじめ与えた群を実現するものである。

**Corollary 3.** 任意の可算離散アーベル群 $H \neq \{0\}$ に対して、標準確率空間 $X$ 上の確率測度を保つ $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-作用 $\beta$ で、次を満たすものがある*:*

$$\mathrm{Aut}(L^\infty(X),\beta) \cong \mathrm{Aut}(H).$$

三つ組み $(H,\mu,\chi)$ を $(H,1,1)$ とすれば、$N(H,\mu)$ は non-atomic な可換 von Neumann 環である。Theorem 2 により、捻れ Bernoulli shift 作用 $\beta(H,\mu,\chi)$ と交換する自己同型全体の群として $\mathrm{Aut}(H)$ が実現される。

**Corollary 4.** 任意の可算離散アーベル群 $H$ に対して、互いに非共役な標準確率空間 $X$ 上の確率測度を保つ $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-作用の族 $\{\beta_t\colon t \in (0,\pi/2) \setminus \mathbb{Q}\pi\}$ で、次を満たすものがある*:*

$$\mathrm{Aut}(L^\infty(X),\beta_t) \cong H \rtimes \mathrm{Aut}(H).$$

パラメーター $t$ を $(0,\pi/2)\setminus\mathbb{Q}\pi$ の元として、三つ組み $(H \oplus \mathbb{Z}, 1, 1\times e^{it\cdot})$ に対応する捻れ Bernoulli shift 作用を $\beta_t$ とする。Theorem 2 によって、交換する自己同型全体の群として $H \rtimes \mathrm{Aut}(H)$ が実現される。作用の族 $\{\beta_t\}$ が互いに非共役であることは Theorem 1 によって示される。

**Corollary 5.** 互いに非共役な標準確率空間 $X$ 上の確率測度を保つ $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-作用の族 $\{\beta_t\colon t\in[0,\pi/2)\}$ で、次を満たすものがある*:*

$$\mathrm{Aut}(L^\infty(X),\beta_t) = \{\mathrm{id}\}.$$

パラメーター $t$ を $(0,\pi/2)$ の元とする。三つ組み $(\mathbb{Z},1,e^{it\cdot})$ に対応する捻れ Bernoulli shift 作用を $\beta_t$ とすることにより、Corollary の作用の族を得る。

また、AFD $\mathrm{II}_1$ 型因子環 $R$ への作用については次の事実を得た。

**Corollary 6.** $q$ を奇数、$H_q$ をアーベル群 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ とする。その 2-コサイクル $\mu_q$ と指標 $\chi_q$ を

$$\mu_t\left(\left(\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right)\right) = e^{\frac{kn}{q}2\pi i}, \quad \chi_q\left(\left(\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}\right)\right) = e^{\frac{k}{q}2\pi i}, \quad k, l, m, n \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

と定める。そのとき、$N(H_q, \mu_q)$ は $AFD$ $\mathrm{II}_1$ 型因子環 $R$ で、

$$\mathrm{Aut}(R, \beta(H_q, \mu_q, \chi_q)) \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

**Corollary 7.** 互いに非共役な $R$ への $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-作用の族 $\{\beta_t \colon t \in (0, \pi/2) \setminus \mathbb{Q}\pi\}$ で、次を満たすものがある:

$$\mathrm{Aut}(R, \beta_t) = \{\mathrm{id}\}.$$

パラメーター $t$ を $(0, \pi/2) \setminus \mathbb{Q}\pi$ の元として、三つ組み $(\mathbb{Z}^2, \mu_t, \chi)$ に対応する捻れ Bernoulli shift 作用を $\beta_t$ とする。ここで、$\mathbb{Z}^2$ の指標 $\chi$ は単射なものとし、2-cocycle $\mu_t$ は次で定められるものとする:

$$\mu_q\left(\left(\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right)\right) = e^{it(kn-ln)}, \quad k, l, m, n \in \mathbb{Z}.$$

群 $\mathbb{Z}^2$ の自己同型のうち $\chi^2$ を保つものは id のみである。Theorem 2 によって、全ての $t$ について $\beta_t$ と交換する自己同型は、id のみである。作用の族 $\{\beta_t\}$ が互いに非共役であることは Theorem 1 によって示される。

**◎ 1-コサイクルの計算**

確率空間上の群作用の剛性は近年がさまざまな分野からアプローチされている。特に von Neumann 環論を用いて、ソリン・ポパ氏が w-rigid 群 (Kazhdan の相対的特性 (T) を満たす正規部分群を持つ群) の標準確率空間への Bernoulli shift で定められる作用について軌道同値超剛性定理を証明した (文献 [Po] など)。相対的特性 (T) の最も基本的な例が $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ である。

ソリン・ポパ氏の証明のキーポイントは Bernoulli shift 作用の malleability を用いて、1-コサイクルがほどけることを示した点である。有限型 von Neumann 環のユニタリー群に値を持つ 1-コサイクルがほどけることは、ポパによって [Po] で、より簡単なトーラスに値を持つ 1-コサイクルがほどけることはポパとサシックによって、[PoSa] で示された。研究で構成した作用についても、工夫を加えるとその議論を用いることができる。この帰結についても少し述べたい。

Corollary 5 のケースは作用にねじれを加えているものの、この malleability を満たす。すると 1-コサイクル $\{w_g\}_{g \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} \subset N(\mathbb{Z}, 1)$ は全て $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ のキャラクターにコホモロガスであることが示される。

同じ議論を Corollary 6 に用いることが出来る。ここで、作用されている von Neumann 環は AFD $\mathrm{II}_1$ 型因子環であるが、malleability が成り立っており、任意の 1-コサイクル

がやはり、$\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ のキャラクターにコホモロガスであることが示される。その結果、Corollary 6 で定義した奇数で番号付けられた $G$-作用の族 $\beta(H_q, \mu_q, \chi_q)$ が互いにコサイクル共役でないことも言える。

いずれのケースでも、作用と交換する自己同型が恒等写像しかないことが示されている。さらにここで 1-コホモロジーが非常に限られた形をしていることを述べた。これらの事実は、群が複雑に von Neumann 環に作用していることを示している。ラフな言い方をするとぐちゃぐちゃに von Neumann 環をかき混ぜていること意味している。

## 参考文献


[Ch] M. Choda, A continuum of non-conjugate property T actions of SL(n,Z) on the hyperfinite $\mathrm{II}_1$-factor, *Math. Japon.*, **30** (1985), 133–150.

[NPS] R. Nicoara, S. Popa, R. Sasyk, On $\mathrm{II}_1$ factors arising from 2-cocycles of $w$-rigid groups. *J. Funct. Anal.*, **242** (2007), no. 1, 230–246.

[Po] S. Popa, Cocycle and Orbit Equivalence Superrigidity for Malleable Actions of w-Rigid Groups, *Invent. Math.*, **170** (2007), no.2, 243–295.

[PoSa] S. Popa, R. Sasyk, On the cohomology of Bernoulli actions, *Ergodic Theory and Dynamamical Systems*, **27**(2007), 241–251.

[Sa] H. Sako, Twisted Bernoulli shift actions of $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$ and their commuting automorphisms, arXiv:0704.1533