数理解析研究所講究録
第 1589 巻 2008 年 16-26

自然数パラメータを持つガンマ事前分布に従うポアソン到着に対する期待所有期間最大化最適停止問題の最適停止戦略*

来島愛子 (Aiko Kurushima) 東京理科大学
穴太 克則 (Katsunori Ano) †

概要

未知のインテンシティに対してガンマ事前分布 $G(r, 1/a), r = 1, 2, \cdots, a > 0$ を持つポアソン過程に従い, $(0, T]$(T は有限で所与) 間にオブジェクトが到着する. オブジェクトは同順位ではないランク付け可能であり, その到着の順列の一つ一つは同じ確率であるとする. オブジェクトの相対ランクのみを知ることができる. 相対的ベストランクのオブジェクトを所有する期待所有期間を最大にする最適停止問題の最適停止時刻は, 各 $r = 1, 2, \cdots$ に対して $\tau_r^* = \min\{t \in [s_i^{(r)}, T] : X_i = 1\}$ であることを示す. ここで $s_i^{(r)}$ は本文中で定義されるある方程式の唯一解であり, 事象 $\{X_i = 1\}$ は i 番目に到着したオブジェクトの相対的ランクが 1 であることを意味する. 更に最適停止時刻を特徴づける $\{s_i^{(r)}\}_{i\geq 1}$ は非増加列であり, 各 $r = 1, 2, \cdots$ に対して, $s_i^{(r)} \to [(T+a)/e^2 - a]^+, i \to \infty$ であることを示す.

Key Words: 最適停止, ポアソン過程, Baysian Update
AMS 1991 Subject Classifications: Primary 60G40; Secondary 62L15.

1 はじめに

n は未知とし, その n 個のオブジェクトが有限の時刻 T までに逐次に到着する. 到着は未知のインテンシティ λ を持つポアソン過程 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ に従う. オブジェクトには同順位ではないランクがあるとする. 直接にオブジェクトの値は観測不能で相対ランクを付けることができる. X_i を i 番目に到着したオブジェクトの相対ランクとすると, $X_i = 1, 2, \cdots$ は相対的ランク $1, 2, \cdots$ を意味するとする. オブジェクトの到着する順列は同程度に確からしいと仮定する. すなわち, $P(X_i = j) = 1/i, i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots, i$ とする. ポアソン過程のインテンシティ λ はガンマ事前分布 $G(r, 1/a), r = 1, 2, \cdots$ に従うとする. 各 $r = 1, 2, \cdots$ に対して, 相対的ベストランクのオブジェクトを所有する期待所有期間を最大にする最適停止問題を解きたい.

§2 で $r = 1, 2, 3$ のときの最適停止時刻を得る. §3 で自然数 r に対する最適停止時刻を得る. 最適停止時刻は閾値 $s_i^{(r)}$ を持つ閾値型停止規則:

$$\tau_r^* = \min\{t \in [s_i^{(r)}, T] : X_i = 1\}, \tag{1.1}$$

で与えられ, 閾値 $s_i^{(r)}$ はある方程式の唯一解として定めることができる. 更に最適停止時刻を特徴づける $\{s_i^{(r)}\}_{i\geq 1}$ は非増加列であり, 各 $r = 1, 2, \cdots$ に対して, $s_i^{(r)} \to [(T+a)/e^2 - a]^+, i \to \infty$ である

*This paper is an abbreviated version of Kurushima and Ano [10]
†E-mail:kano2@mac.com

ことを示す. r が自然数のときには, 利得関数に含まれるガンマ関数が自然数の階乗で表現されることが, 最適停止時刻を求める際に本質的に効いてくる. これを実数 r に拡張することは, 計算の難易度が低くなく, その意味で容易ではない.

相対的ベストを所有する期待所有期間を最大化する問題は, Ferguson, Hardwick and Tamaki [7] によって研究され, 指数事前分布 $G(1,1/a), a>0$ をインテンシティが持つポアソン過程の場合の最適停止時刻を求めている. 良く知られているように $r=1$ のときにガンマ分布は指数分布に一致するから我々の問題は彼らの問題を含み拡張されている. 指数事前分布の場合の最適停止時刻は

$$\tau_1^* = \min\{t \in [s^{(1)}, T] : X_i = 1\}, \tag{1.2}$$

ここで $s^{(1)} = [(T+a)/e^2 - a]^+$, で与えられる. 尚, 最適停止時刻に従うときの最大期待所有期間を explicit に得るのは指数事前分布の場合ですら容易ではない. 一方, 既知のインテンシティを持つポアソン過程に従いオブジェクトが到着するときに, 到着するオブジェクトの中のベストを得る確率を最大にする最適停止問題は Cowan and Zabczyk [6] により研究され, その後,Bruss [4] により指数事前分布に従うインテンシティを持つポアソン過程の場合に拡張された. 興味深いことに, この場合の最適停止時刻は, $s^{(1)} = [(T+a)/e - a]^+$ を伴う (1.2) と同じ閾値型停止時刻である. これをガンマ事前分布に拡張し, $r = 1, 2, \cdots$ に対する最適停止問題として定式化をし, $r=2$ のときの最適停止時刻を解いたのが Ano [1] であり, $r=2$ に対する最適停止時刻は閾値型停止時刻であることを得ている. 更に $r = 3, 4, \cdots$ の場合の最適停止時刻を導いたのが Kurushima and Ano [8] である. Ano and Ando [2] は Bruss の停止問題に対してオブジェクトへの選択オファーが不確実であり, オブジェクト側により拒否される確率が存在する停止問題の最適停止時刻を導いている. また Szajowski [14] は Bruss の問題のゲーム版を研究している.

2 準備

2.1 定式化

状態 (i,s) を時刻 s で i 番目のオブジェクトが到着し, そのオブジェクトが相対的ベストである状態と定義する. i 番目のオブジェクトの真のランクを Z_i で表す. 事象 $\{Z_i = 1\}$ は i 番目のオブジェクトが到着するすべてのオブジェクトの中でベストであることを意味し, すなわち, $Z_i = \min(Z_1, Z_2, \cdots, Z_{N(T)})$ とする. 状態 (i,s) から $(i+k, s+u)$ への推移確率を $p_{(i,s)}^{(k,u)}$ とすると,

$$\begin{aligned} p_{(i,s)}^{(k,u)} &= \int_0^\infty P(S_{i+k} = s+u | S_i = s, \lambda) \\ &\quad \times P(X_{i+k} = 1 | X_i = 1, S_i = s, S_{i+k} = s+u, \lambda) g(\lambda | S_i = s) d\lambda. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ポアソン過程の到着時間間隔分布,$P(S_{i+k} = s+u | S_i = s, \lambda)$ はガンマ分布であり, i 番目に相対的ベストが到着して以後に初めて相対的ベストが $(i+k)$ 番目に到着する条件付き確率は

$$P(X_{i+k} = 1 | X_i = 1, S_i = s, S_{i+k} = s+u, \lambda) = \frac{i}{(i+k-1)(i+k)},$$

であること, および, $S_i = s$ のときの λ の分布は

$$g(\lambda | S_i = s) = \frac{\lambda^{i+r-1} e^{-\lambda(s+a)}}{\int_0^\infty u^{i+r-1} e^{-u(s+a)} du} = \frac{\lambda^{i+r-1} e^{-\lambda(s+a)}}{\Gamma(i+r)/(s+a)^{i+r}}.$$

であることから, 推移確率は次のように得られる.

$$
\begin{aligned}
p_{(i,s)}^{(k,u)} &= \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda}(\lambda u)^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{i}{(i+k-1)(i+k)} \frac{\lambda^{i+r-1}e^{-\lambda(s+a)}}{\Gamma(i+r)/(s+a)^{i+r}} d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(i+k+r)}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)(i+k)(i+k-1)} \frac{i}{(i+k-1)(i+k)} \frac{s+a}{(s+a+u)^2} \\
&\quad \times \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1}. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

$S_1, S_2, \cdots$ をポアソン過程 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ の到着時間とする. 未知のインテンシティ λ はガンマ事前密度 $g(\lambda) = (a^r e^{-a\lambda}\lambda^{r-1}/\Gamma(r))I(\lambda \geq 0)$, を持つと仮定する. ここで r は自然数, a は所与で非負. ベイズの定理より, $S_1 = s_1, \cdots, S_i = s$ であるときの λ の事後密度もガンマであり $G(r+1, 1/(a+s))$ となる. Bruss [4] が示したように, $S_1 = s_1, \cdots, S_i = s$, $0 < s < T$ を観測後の, $N(T)$ の事後分布は i と S_i のみに依存し, パラメーター $(r+1, (s+a)/(T+a))$ を伴うパスカル分布, すなわち,

$$
P(N(T)=n|S_i=s) = \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r+i)(n-i)!}\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r+i}\left(\frac{T-s}{T+a}\right)^{n-i}, n = i, i+1, \cdots \qquad (2.3)
$$

となる.

以上の準備のもとで, 状態 (i,s) で停止したときに相対的ベストを所有する期待所有期間を求める. この所有期間を $y_i^{(r)}(s)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
y_i^{(r)}(s) &= E(u|(i,s)) + (T-s)P(\text{no relatively best appears in (s,T]}|(i,s)) \\
&= \int_0^\infty u \sum_{k\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)} du + (T-s)\sum_{n\geq i}\left(\frac{i}{n}\right) P(N(T)=n|S_i=s) \\
&= \int_0^{T-s} \sum_{k\geq 1} \frac{(i+r+k-1)!}{(k-1)!(i+r-1)!} \frac{i}{(i+k)(i+k-1)} x^{i+r}(1-x)^k du \\
&\quad +(T-s)\sum_{n\leq i}\left(\frac{i}{n}\right)\frac{(n+r-1)!}{(r+i-1)!(n-i-1)!}\theta^{r+i}(1-\theta)^{n-i}.
\end{aligned}
$$

ここで, $x = (s+a)/(s+a+u)$, $\theta = (s+a)/(T+a)$.

(2.2),(2.3) と公式

$$
\frac{(n+r-1)!}{n} = (r-1)!\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(n+i-1)!}{i!}, \ r = 1, 2, \cdots, \qquad (2.4)
$$

$$
1 = \sum_{k\geq 1}\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}x^{n+1}(1-x)^{k-1}, \ 0 \leq x \leq 1, \qquad (2.5)
$$

を使えば,

$$
\begin{aligned}
y_i^{(r)}(s) &= \frac{1}{\binom{i+r-1}{r-1}}\int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(i+k+j-1)!x^{i+r}(1-x)^k}{(i-1)!(k-1)!j!(i+k-1)}du \\
&= \frac{1}{\binom{i+r-1}{r-1}}\int_0^{T-s}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{j}\binom{i+l-1}{l}\sum_{k\geq 1}\binom{i+k+l-2}{k-1} \\
&\quad \times x^{r+i}(1-x)^{n-i}du + \frac{T-s}{\binom{i+r-1}{r-1}}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{i+j-1}{j}\theta^{r-j}. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

公式を再び使い, $x=(s+a)/(s+a+u)$ であったから, 上の方程式の右辺第1項は次となる.

$$\begin{aligned}
&\frac{s+a}{\binom{i+r-1}{r-1}}\int_{\frac{s+a}{T+a}}^{1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{j}\binom{i+l-1}{l}x^{r-l}(1-x)dx\\
=\;&\frac{s+a}{\binom{i+r-1}{r-1}}\left\{\binom{i+r-2}{r-1}(-\ln\theta)+\sum_{l=0}^{r-2}\binom{i+l-1}{l}\frac{1-\theta^{r-l-1}}{r-l-1}\right\}\\
&+\frac{s+a}{\binom{i+r-1}{r-1}}\left\{\sum_{l=0}^{r-2}\binom{i+l-1}{l}(1-\theta^{r-l-1})+\sum_{l=0}^{r-1}\binom{i+l-1}{l}(1-\theta^{r-l})\right\}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

(2.7) を (2.6) に代入して計算すれば $y_i^{(r)}(s)$ を得る.

補題 2.1 状態 (i,s) で停止したときの利得を $y_i^{(r)}(s)$, すなわち, 状態 (i,s) で停止したときの相対的ベストの期待所有期間とすると,

$$y_i^{(r)}(s)=\frac{(s+a)}{\binom{i+r-1}{r-1}}\left\{\binom{i+r-2}{r-1}(-\ln\theta)+\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{1-\theta^{r-j-1}}{r-j-1}\right\}, \qquad (2.8)$$

ここで,$\theta=(s+a)/(T+a)$.

状態 (i,s) での最大期待所有期間を $W_i^{(r)}(s)$ とすると, 最適性の原理から次の最適方程式を得る: 各 r と $i=1,2,\cdots$ に対して

$$W_i^{(r)}(s)=\max\left\{y_i^{(r)}(s),\int_0^{T-s}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}W_{i+k}^{(r)}(s+u)du\right\},\quad s\in[0,T]$$

,$W_i^{(r)}(T)=0,\ i=1,2,\cdots,r=1,2,\cdots$. 良く知られていいるように, マルコフ列に対する最適停止問題に対して OLA(one-stage look-ahead) 停止規則と OLA 停止領域 B を構成する. $r=1,2,\cdots$ に対して, $H_i^{(r)}(s)$ を次で定義する.

$$H_i^{(r)}(s)=\frac{\binom{i+r-1}{r-1}}{(s+a)}\left\{y_i^{(r)}(s)-\int_0^{\infty}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}y_{i+k}^{(r)}(s+u)du\right\}. \qquad (2.9)$$

OLA 停止規則 τ_r と OLA 停止領域 B_r はそれぞれ,

$$\tau_r=\min\{i\geq 1: H_i^{(r)}(s)\geq 0\},\ B_r=\{(i,s): H_i^{(r)}(s)\geq 0\}.$$

となる. $H_i^{(r)}(s)$ を計算する. 補題1より

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}y_{i+k}^{(r)}(s+u)du\\
=\;&\int_0^{\infty}\sum_{k\geq 1}\frac{(i+r+k-2)!}{(k-1)!(i+r-1)!}\frac{ix^{i+r}(1-x)^{k-1}(-\ln\tilde\theta)}{i+k-1}du\\
&+\int_0^{\infty}\sum_{k\geq 1}\frac{i(r-1)!x^{i+r}(1-x)^{k-1}}{(k-1)!(i+r-1)!}\sum_{j=0}^{r-2}\frac{(i+k+j-1)!(1-\tilde\theta^{r-j-1})}{j!(i+k-1)(r-j-1)}du,
\end{aligned}$$

ここで,$\tilde\theta=(s+a+u)/(T+a)$. 公式を再び使って計算すると

$$\int_0^{\infty}\sum_{k\geq 1}p_{(i,s)}^{(k,u)}y_{i+k}^{(r)}(s+u)du$$

$$
\begin{aligned}
&= -\binom{i+r-2}{r-1}\frac{1}{2}(\ln\theta)^2 - \sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{1-\theta^{r-j-1}}{r-j-1}\ln\theta \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{(j-l)+(r-j-1)\theta^{r-l-1}-(r-l-1)\theta^{r-j-1}}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)}.
\end{aligned}
$$

これを (2.9) に代入すると, $H_i^{(r)}(s) \equiv h_i^{(r)}(\theta)$ が次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&H_i^{(r)}(s) \equiv h_i^{(r)}(\theta) \\
&= -\binom{i+r-2}{r-1}\ln\theta\left(1+\frac{1}{2}\ln\theta\right) + \sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{1-\theta^{r-j-1}}{r-j-1}(1+\ln\theta) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{(j-l)+(r-j-1)\theta^{r-l-1}-(r-l-1)\theta^{r-j-1}}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)},
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

ここで,$\theta = (s+a)/(T+a) \in [0,1]$. したがって τ_r と B_r は次のように書くことができる.

$$
\tau_r = \min\{i \geq 1 : h_i^{(r)}(\theta) \geq 0\}, \ B_r = \{(i,\theta) : h_i^{(r)}(\theta) \geq 0\}.
$$

これ以降 $h_i^{(r)}(\theta)$ を OLA 関数と呼ぶ.

2.2 $r = 1, 2, 3$ の場合

$r = 1, 2, 3$ のときに OLA 関数はそれぞれ次のようになる.

$$
\begin{aligned}
h_i^{(1)}(\theta) &= -\ln\theta\left(1+\frac{\ln\theta}{2}\right), h_i^{(2)}(\theta) = -i\ln\theta\left(1+\frac{\ln\theta}{2}\right) + (1-\theta)(1+\ln\theta), \\
h_i^{(3)}(\theta) &= -\frac{i(i+1)}{2}\ln\theta\left(1+\frac{\ln\theta}{2}\right) + \frac{1-\theta^2}{2}(1+\ln\theta) + i(1-\theta)(1+\ln\theta) - \frac{(1-\theta)^2}{2}.
\end{aligned}
$$

2.2.1 $r = 1$ の場合:(Ferguson, Hardwick and Tamaki [7]).

$h^{(1)}(\theta)$ は区間 $\theta \in (0,1]$ で単峰関数であり, $h^{(1)}(0+) = -\infty$ かつ $h^{(1)}(1) = 0$. これは $h^{(1)\prime}(\theta)(= -(1/\theta)(1+\ln\theta))$ は区間 $\theta \in (0, e^{-1}]$ で増加関数, $h^{(1)\prime}(\theta)$ は区間 $\theta \in [e^{-1}, 1]$ で減少関数, かつ $h^{(1)\prime\prime}(\theta) = (1/\theta^2)\ln\theta \leq 0, \theta \in (0,1]$ であることから分かる. それゆえに $B_1 = \{\theta : h^{(1)}(\theta) \geq 0\} = \{\theta : \theta \geq e^{-2}\} = \{s : s \geq [(T-a)/e^2 - a]^+\}$ は closed となる. したがって最適停止規則は (1.2) で与えられる.

2.2.2 $r = 2$ の場合:(Ano [1]).

補題 2.2 $r = 2$ とする.

(i) 方程式 $h_i^{(2)}(\theta) = 0$ は唯一解 $\theta_i^{(2)} \in (e^{-2}, e^{-1})$ を持つ. そして $h_i^{(2)}(\theta) \geq 0 \Longrightarrow h_i^{(2)}(\theta+\eta) \geq 0$, $0 \leq \eta \leq 1-\theta$.

(ii) 各 $i = 1, 2, \cdots$ に対して, $h_i^{(2)}(\theta) \geq 0 \Longrightarrow h_{i+1}^{(2)}(\theta) \geq 0$.

Proof. 略.

定理 2.1 (Ano[1]) $r = 2$ に対する最適定式時刻は $\tau_2^* = \min\{t \in [s_i^{(2)}, T] : X_i = 1\}$, ここで $s_i^{(2)} \in (0, T]$ は方程式 $H_i^{(2)}(s) = 0$ の唯一解.

Proof. 略.

2.2.3 $r = 3$ の場合.

補題 2.3 $r = 3$ のとき,

(i) 方程式 $h_i^{(3)}(\theta) = 0$ の唯一解 $\theta_i^{(3)} \in (e^{-2}, e^{-1})$ が存在する. また,$h_i^{(3)}(\theta) \geq 0 \Longrightarrow h_i^{(3)}(\theta + \eta) \geq 0$, for $0 \leq \eta \leq 1 - \theta$.

(ii) 各 $i = 1, 2, \cdots$ に対して, $h_i^{(3)}(\theta) \geq 0 \Longrightarrow h_{i+1}^{(3)}(\theta) \geq 0$.

Proof. (i): $\theta \in (0, e^{-1}]$ に対して,

$$\theta h_i^{(3)\prime}(\theta) = -\left\{\frac{i(i+1)}{2} + i\theta + \theta^2\right\}(1 + \ln\theta) + \frac{(1-\theta^2)}{2} + (i+\theta)(1-\theta) \geq 0,$$

したがって,$h_i^{(3)}(\theta)$ は, 区間 $\theta \in (0, e^{-1}]$ で増加. $\theta \in [e^{-1}, 1]$ に対して,

$$\theta^2 h_i^{(3)\prime\prime}(\theta) = -\left(\theta^2 - \frac{i(i+1)}{2}\right)\ln\theta - \frac{5}{2}\theta^2 - i(1+\theta) - \frac{3}{2} < 0,$$

したがって,$h_i^{(3)}(\theta)$ は, 区間 $\theta \in (e^{-1}, 1]$ で concave. それゆえに, $h_i^{(3)}(0+) = -\infty$, $h_i^{(3)}(1) = 0$, $h_i^{(3)}(e^{-2}) = -(1-e^{-4})/4 - i(1-e^{-2}) - (1-e^{-2})^2/2 < 0$ と $h_i^{(3)}(e^{-1}) = (1/4)\{i(i+1) - 2(1-e^{-2})^2\} > 0$ より, (i) が成立.

(ii): (i) より, $h_{i+1}^{(3)}(\theta_i^{(3)}) > 0$ ならば, (ii) が成り立つ. 唯一解 $\theta_i^{(3)}$ は区間 (e^{-2}, e^{-1}) にあるので, $1 + \ln\theta_i^{(3)} < 0$. $h_i^{(3)}(\theta_i^{(3)}) = 0$ から, 差分 $h_{i+1}^{(3)}(\theta_i^{(3)}) - h_i^{(3)}(\theta_i^{(3)})$ は $h_{i+1}^{(3)}(\theta_i^{(3)})$ に等しく, 次で与えられる.

$$h_{i+1}^{(3)}(\theta_i^{(3)}) = -(i+1)\ln\theta_i^{(3)}\left(1 + \frac{\ln\theta_i^{(3)}}{2}\right) + (1-\theta_i^{(3)})(1 + \ln\theta_i^{(3)}).$$

一方, $h_i^{(3)}(\theta_i^{(3)}) = 0 \Longleftrightarrow$

$$-(i+1)\ln\theta_i^{(3)}\left(1 + \frac{\ln\theta_i^{(3)}}{2}\right) = -\frac{1-\theta_i^{(3)^2}}{i}(1 + \ln\theta_i^{(3)}) - 2(1-\theta_i^{(3)})(1 + \ln\theta_i^{(3)}) + \frac{(1-\theta_i^{(3)})^2}{i}.$$

これを $h_{i+1}^{(3)}(\theta_i^{(3)})$ に代入すると,

$$h_{i+1}^{(3)}(\theta_i^{(3)}) = -\frac{1-\theta_i^{(3)^2}}{i}(1 + \ln\theta_i^{(3)}) - (1-\theta_i^{(3)})(1 + \ln\theta_i^{(3)}) + \frac{(1-\theta_i^{(3)})^2}{i} \geq 0,$$

ここで最後の不等式は $1 + \ln\theta_i^{(3)} < 0$ より得られる. □

定理 2.2 $r = 3$ のとき, 最適停止時刻は $\tau_3^* = \min\{t \in [s_i^{(3)}, T] : X_i = 1\}$, ここで $s_i^{(3)} \in (0, T]$ は方程式 $H_i^{(3)}(s) = 0$ の唯一解.

Proof. 補題 2.3 より. 以下, 略.

3 主結果

2つの命題を準備する.

命題 3.1 各 $r=1,2,\cdots,i=1,2,\cdots$ に対して,

(i) $h_i^{(r)}(\theta)$ は区間 $\theta\in(0,e^{-1}]$ で非減少.

(ii) $h_i^{(r)}(0+)=-\infty$, $h_i^{(r)}(1)=0$.

(iii) $h_i^{(r)}(\theta)$ が区間 $\theta\in[e^{-1},\hat{\theta}]$ で非減少, 区間 $\theta\in[\hat{\theta},1]$ で非増加であるような $\hat{\theta}$ が存在する.

Proof. (i), (ii): まず

$$\begin{aligned}\theta h_i^{(r)\prime}(\theta)&=-\binom{i+r-2}{r-1}(1+\ln\theta)-\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\theta^{r-j-1}(1+\ln\theta)\\&+\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{1-\theta^{r-j-1}}{r-j-1}-\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{\theta^{r-l-1}-\theta^{r-j-1}}{j-l}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

$\theta\in(0,e^{-1}]$ に対して, $(1+\ln\theta)\le 0$, かつ, $\theta\in[0,1]$ に対して, $\theta^{r-l-1}\le\theta^{r-j-1}$ なので, $\theta\in(0,e^{-1}]$ に対して, $h_i^{(r)\prime}\ge 0$. よって, $h_i^{(r)}(\theta)$ は区間 $\theta\in(0,e^{-1}]$ で非減少. これより示される.

(iii): $f_2^{(r)}(\theta)$ と $f_3^{(r)}(\theta)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}f_2^{(r)}(\theta)&=\binom{i+r-2}{r-1}(1+\ln\theta)-\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{\theta^{r-j-1}}{j-l},\\f_3^{(r)}(\theta)&=-\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\left\{\theta^{r-j-1}(1+\ln\theta)-\frac{1-\theta^{r-j-1}}{r-j-1}\right\}-\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{\theta^{r-l-1}}{j-l}.\end{aligned}$$

このとき $\theta h_i^{(r)\prime}(\theta)=-f_2^{(r)}(\theta)+f_3^{(r)}(\theta)$ と表わされる. 次を示す. (a) $f_3^{(r)}(e^{-1})>f_2^{(r)}(e^{-1})$, (b) $f_2^{(r)}(1)>f_3^{(r)}(1)$, (c) 区間 $[e^{-1},1]$ で $f_2^{(r)}(\theta)$ は concave, (d) 区間 $[e^{-1},1]$ で, $f_3^{(r)}(\theta)$ は減少, かつ, concave. (a)-(d) が成り立つとき, 方程式 $f_2^{(r)}(\theta)=f_3^{(r)}(\theta)$, すなわち, $h_i^{(r)\prime}(\theta)=0$ の唯一解 $\hat{\theta}$ が, 区間 $[e^{-1},1]$ に存在する. このとき命題が成り立つ. (a)-(d) が成り立つことを示す. $e^{-(r-l-1)}<e^{-(r-j-1)}$ なので,

$$f_3^{(r)}(e^{-1})-f_2^{(r)}(e^{-1})=\sum_{j=0}^{r-2}\frac{1-e^{-(r-j-1)}}{r-j-1}-\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\frac{e^{-(r-l-1)}-e^{-(r-j-1)}}{j-l}>0.$$

よって (a) は成り立つ.

$$-f_2^{(r)}(1)+f_3^{(r)}(1)=h_i^{(r)\prime}(1)=-\binom{i+r-2}{r-1}-\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}<0$$

より, (b) が成り立つ. $\theta\in[e^{-1},1]$ に対して, $f_2^{(r)\prime\prime}(\theta)<0, f_3^{(r)\prime}(\theta)<0$ and $f_3^{(r)\prime\prime}(\theta)<0$. よって (c),(d) が成り立つ. □

命題 3.2 各 $r=1,2,\cdots,i=1,2,\cdots$ に対して, (i) $h_i^{(r)}(e^{-2})<0$ and (ii) $h_i^{(r)}(e^{-1})>0$.

Proof. (i):

$$h_i^{(r)}(e^{-2}) \;=\; -\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{1-e^{-2(r-j-1)}}{(r-j-1)}-\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{f_1^{(r)}(e^{-2})}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)},$$

ここで, $f_1^{(r)}(\theta)=(j-l)+(r-j-1)\theta^{r-l-1}-(r-l-1)\theta^{r-j-1}$. $f_1^{(r)}(0)=j-l>0, f_1^{(r)}(1)=0$ と $f_1^{(r)\prime}(\theta)=(r-j-1)(r-l-1)(\theta^{r-l-2}-\theta^{r-j-2})\le 0$ より, $f_1^{(r)}(\theta)>0, \theta\in[0,1)$. よって $f_1^{(r)}(e^{-2})>0$. すなわち, $h_i^{(r)}(e^{-2})<0$.

(ii): まず, $h_i^{(r)}(e^{-1})=\frac{1}{2}\binom{i+r-1}{r-2}-f_4^{(r)}(e^{-1})$, ここで, $f_4^{(r)}(\theta)$ は次で定義:

$$f_4^{(r)}(\theta)=\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{f_1^{(r)}(\theta)}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)}.$$

このとき, $h_i^{(r)}(e^{-1})=(1/2)\binom{i+r-1}{r-2}-f_4^{(r)}(e^{-1})$. 関数 $f_4^{(r)}(\theta)$ は, $f_4^{(r)}(0)>0$, $f_4^{(r)}(1)=0$, かつ, $f_4^{(r)\prime}(\theta)<0$ を満たす. これより $f_4^{(r)}(\theta)$ は, 区間 $[0,1]$ で非負で減少関数. したがって, $(1/2)\binom{i+r-1}{r-2}-f_4^{(r)}(0)>0$ ならば, $h_i^{(r)}(e^{-1})>0$.

公式 (2.4) より,

$$\frac{1}{2}\binom{i+r-1}{r-2}=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j}{j}=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r-2}\sum_{l=0}^{j}\binom{i+l-1}{l}.$$

各 $r=3,4,\cdots$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\binom{i+r-1}{r-2}-f_4^{(r)}(0)\\
&=\binom{i-1}{0}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(r-2)(r-1)}\right]+\binom{i-1}{0}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(r-3)(r-1)}\right]\\
&\quad+\binom{i-2}{1}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(r-3)(r-2)}\right]+\cdots+\binom{i-1}{0}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1(r-1)}\right]+\cdots\\
&\quad+\binom{i+r-4}{r-3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\left\{\binom{i-1}{0}+\binom{i-2}{1}+\cdots+\binom{i+r-3}{r-2}\right\}>0.
\end{aligned}$$

最後の不等号は各 $r=3,4,\cdots$ に対して, すべての [ ] が非負であることより従う. よって, $h_i^{(r)}(e^{-1})>0, r-3,4,\cdots$. $r=1,2$ のときは, $h^{(1)}(e^{-1})>0$, $h_i^{(2)}(e^{-1})>0$. □

補題 3.1 各 $r=1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,$ に対して,

(i) 方程式 $h_i^{(r)}(\theta)=0$ の唯一解 $\theta_i^{(r)}$ が区間 (e^{-2},e^{-1}) に存在する.

(ii) $h_i^{(r)}(\theta)\ge 0 \Longrightarrow h_i^{(r)}(\theta+\eta)\ge 0,\;\; 0\le\eta\le 1-\theta$.

(iii) $h_i^{(r)}(\theta)\ge 0 \Longrightarrow h_{i+1}^{(r)}(\theta)\ge 0$.

Proof. (i),(ii) は命題 3.1 と 3.2 より従う. (ii) は $h_{i+1}^{(r)}(\theta)$ が一度非負になれば, 非負のままであることを意味している. 既に $h_i^{(r)}(\theta)<0, \theta\in[0,e^{-2}]$ であることと, $\theta_i^{(r)}\ge e^{-2}$ であることを知っているので, (iii) を示すには, $h_{i+1}^{(r)}(\theta_i^{(r)})$ が非負であることを示せば十分である.

$h_i^{(r)}(\theta_i^{(r)})=0 \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
\binom{i+r-2}{r-1}\ln\theta_i^{(r)}\left(1+\frac{\ln^2\theta_i^{(r)}}{2}\right)&=\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{(1-\theta_i^{(r)\,r-j-1})(1+\ln\theta_i^{(r)})}{r-j-1}\\
&\quad-\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{f_1^{(r)}(\theta_i^{(r)})}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)}.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

差分 $h_{i+1}^{(r)}(\theta) - h_i^{(r)}(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} i\left(h_{i+1}^{(r)}(\theta) - h_i^{(r)}(\theta)\right) &= -(r-1)\binom{i+r-2}{r-1}\ln\theta\left(1+\frac{\ln\theta}{2}\right) \\ &+ \sum_{j=0}^{r-2} j\binom{i+j-1}{j}\frac{1-\theta^{r-j-1}}{r-j-1}(1+\ln\theta) \\ &- \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l} l \frac{f_1^{(r)}(\theta)}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)}. \end{aligned}$$

$h_i^{(r)}(\theta_i^{(r)}) = 0$ なので,

$$\begin{aligned} ih_{i+1}^{(r)}(\theta_i^{(r)}) &= -(r-1)\binom{i+r-2}{r-1}\ln\theta_i^{(r)}\left(1+\frac{\ln\theta_i^{(r)}}{2}\right) \\ &+ \sum_{j=0}^{r-2} j\binom{i+j-1}{j}\frac{1-\theta_i^{(r)\,r-j-1}}{r-j-1}(1+\ln\theta_i^{(r)}) \\ &- \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l} l \frac{f_1^{(r)}(\theta_i^{(r)})}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.2) を (3.3) に代入すると,

$$\begin{aligned} ih_{i+1}^{(r)}(\theta_i^{(r)}) &= -\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}(1-\theta_i^{(r)\,r-j-1})(1+\ln\theta_i^{(r)}) \\ &+ \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{(r-l-1)f_1^{(r)}(\theta_i^{(r)})}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

命題 3.2 より, $\theta_i^{(r)} \le e^{-1}$. よって $1+\ln\theta_i^{(r)} < 0$. また, $f_1^{(r)}(\theta) \ge 0, \theta \in [0,1]$ であったから, (3.4) の右辺は正になる. したがって $h_{i+1}^{(r)}(\theta_i^{(r)}) > 0$. □

定理 3.1 ガンマ事前分布 $G(r, 1/a), a > 0, r = 1, 2, \cdots$ を持つポアソン過程に対して, 最適停止時刻は $\tau_r^* = \min\{t \in [s_i^{(r)}, T] : X_i = 1\}$, ここで $s_i^{(r)}$ は方程式 $H_i^{(r)}(s) = 0, s \in [0, T]$ の唯一解.

Proof. $B_r = \{(i,s) : H_i^{(r)}(s) \ge 0\} = \{(i,\theta) : h_i^{(r)}(\theta) \ge 0\}$ であるので, 補題 3.1 より B_r は'closed'. よって B_r が最適停止領域で, τ_r^* が最適.

定理 3.2 (i) 各 $r = 1, 2, \cdots$ に対して, 閾値列 $\{s_i^{(r)}\}_{i\ge 1}$ は非増加.

(ii) $\lim_{i\to\infty} s_i^{(r)} = \left[(T+a)/e^2 - a\right]^+$.

Proof. (i): 補題 3.1 より直ちに得られる.

(ii): $s_i^{(r)} = \theta_i^{(r)}(T+a) - a$ なので, $\lim_{i\to\infty}\theta_i^{(r)} = e^{-2}$ を示せば良い. $h_i^{(r)}(\theta) = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} -\ln\theta\left(1+\frac{\ln\theta}{2}\right) &= \frac{1}{\binom{i+r-2}{r-1}}\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{(1-\theta^{r-j-1})(1+\ln\theta)}{r-j-1} \\ &+ \frac{1}{\binom{i+r-2}{r-1}}\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{f_1^{(r)}(\theta)}{(j-l)(r-j-1)(r-l-1)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

よって $i \to \infty$ のとき,

$$\frac{1}{\binom{i+r-2}{r-1}}\sum_{j=1}^{r-2}\binom{i+j-1}{j} = \frac{(r-1)!}{(i+r-2)\cdots i}+\cdots+\frac{r-1}{i+r-2} \to 0$$

そして

$$\frac{1}{\binom{i+r-2}{r-1}}\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l} = \left\{\frac{(r-1)!}{(i+r-2)\cdots i}+\cdots+\frac{(r-1)!}{(i+r-2)\cdots i}\right\}$$
$$+\cdots+\left\{\frac{(r-1)!}{(i+r-2)\cdots i}+\cdots+\frac{(r-1)(r-2)}{(i+1)!}\right\} \to 0.$$

したがって, $-\ln\theta(1+(\ln\theta/2)) \to 0, i \to \infty$. よって $\lim_{i\to\infty}\theta_i^{(r)} = e^{-2}$. □

参考文献

[1] ANO, K.(2000). A Poisson arrival selection problem for Gamma prior density with parameter $r = 2$, *Proceedings of International Conference on Applied Stochastic System Modeling*, 10-17.

[2] ANO, K. AND ANDO, M. (2000). A note on Bruss' stopping problem with random availability, *Game Theory, Optimal Stopping, Probability and Statistics*, IMS Lecture Note, Bruss, F. T. and Cam, L. Le. eds., **35**, 71–82.

[3] ANO, K. (2001). Multiple selection problem and OLA stopping rule. *Sci. Math. Japo.* **53**, 335-346.

[4] BRUSS, F. T. (1987). On an optimal selection problem by Cowan and Zabczyk, *Journal of Appli. Probab.*, **24**, 918–928.

[5] CHOW,Y.S., ROBBINS, H. AND SIEGMUND, D. O. (1971). *The Theory of Optimal Stopping*, Houghton Mifflin Co.

[6] COWAN, R. AND ZABCZYK, J. (1978). An optimal selection problem associated with the Poisson process, *Theory Probab. Appli.*, **23**, 584–592.

[7] FERGUSON, T. S., HARDWICK, J. P. AND TAMAKI, M. (1993). Maximizing the duration of owing a relatively best object, *Contemporary Mathematics*, Bruss, F. T., Ferguson, T. S. and Samuels, S. M. eds., **125**, 37–58.

[8] KURUSHIMA, A. AND ANO, K. (2003). A Poisson arrival selection problem for Gamma prior intensity with natural number parameter, *Sci. Mathematica Japonica*, **57**, 217–231.

[9] KURUSHIMA, A. AND ANO, K. (2003). A note on the full-information Poisson arrival selection problem, *Journal of Appli. Probab.*, **40**, 1147–1154.

[10] KURUSHIMA, A. AND ANO, K. (2007). Maximizing the expected duration of owning a relatively best object in a Poisson processes of rankable observations, submitted.

[11] MAZALOV V. AND TAMAKI M. (2006). An explicit formula for the optimal gain in the full-information problem of owning a relatively best object, *Journal of Appli. Probab.*, **43**, 87–101.

[12] ROSS, S. M. (1970). *Applied Probability Models and Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco.

[13] SHIRYAYEV, A. N. (1973). *Statitical Sequential Analysis,* Translations of Mathematical Monographs, **32**, American Mathematical Society.

[14] SZAJOWSKI, K. (2002). Game version of Bruss problem, *Proceedings of 10th International Symposium on Dynamic Games and Applications.*