

ルール番号 168 の基本セルオートマトンの力学的性質について

大鑄 史男

名古屋工業大学

〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町

E-mail: ohi.fumio@nitech.ac.jp

Abstract

ルール番号 40 の基本セルオートマトンは Wolfram class I に属し、生成される時空間パターンは死滅するとされていたが [17], ある特定の configurations 全体の上ではカオス性を持ち [12][13], Lyapunov exponent の値にも多様性があることが示されている [12].

本稿では、やはり Wolfram class I に属し、その時空間パターンは死滅するとされているルール番号 168 について、ルール番号 40 と同様にカオス性を持ち、多様な Lyapunov exponent の値を持ち得ることを示す。その際、ルール番号 40 の議論 [12][13] で用いた方法を用いる。

1. Introductory Preliminaries

基本セルオートマトン (elementary cellular automaton (ECA)) は、 $\{0, 1\}$ と $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ との組 $(\{0, 1\}, g)$ であり、簡単に ECA g と呼ぶ。 g は local transition function の呼ばれる。

a local transition function $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ によって、 $A \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ から A への写像 g を

$$x \in A, \quad (g(x))_i = g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

として定義する。この g を global transition function と呼ぶ。

A 上の距離 d を次のように定義する。

$$d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}, \quad x, y \in A,$$

これによって位相的な力学系 (A, g) が得られる。

A の要素は configuration と呼ばれ、初期 configuration $x \in A$ の軌道は、以下に定義される系列 $\{g^t(x)\}_{t=0}^{\infty}$ である。

$$g^0(x) = x, \quad g^{t+1}(x) = g(g^t(x)), \quad t \in \mathbb{N}.$$

ECA g のルール番号 $R(g)$ は

$$R(g) = \sum_{(a,b,c)} g(a, b, c) 2^{a*4+b*2+c}.$$

で定義される。ルール番号 40 と 168 の local transition function g_{40}, g_{168} は次の表によって与えられる。

(a, b, c)	(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(1, 0, 0)	(0, 1, 1)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
$g_{40}(a, b, c)$	0	0	1	0	1	0	0	0
$g_{168}(a, b, c)$	1	0	1	0	1	0	0	0

$$S_k = \{ (0, 1_{m_i})_{i=-\infty}^{\infty} \mid m_i = 1 \text{ or } 2 \text{ or } \dots \text{ or } k, \quad i \in \mathbb{Z} \} \subset A, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

としたとき、

$$\forall x \in A \setminus S_2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_{40}^t(x) = 0,$$

$$\forall x \in S_2, \quad g_{40}(x) = \sigma_L(x),$$

であることが [13] で示されている。ここで σ_L は, left-shift transformation である。

本稿では, A 上での g_{168} の軌道の性質について議論し, それぞれの S_k 上で $g_{168} = \sigma_L$ であり, 従ってカオス的事であること, また

$$S_k^+ \equiv \{x_{0,\rightarrow} \mid x \in S_k\}$$

としたとき, この上での $g_{168} = \sigma_L$ の動きをある区間力学系に関係づけ, その不変測度に関するあるパターンの相対頻度が g_{168} による spreading rate に一致することを示す。

Notations

(1) $x \in A$ に対して,

$$x_{i,j} \equiv (x_i, \dots, x_j) \quad (i \leq j),$$

$$x_{\leftarrow, i} \equiv (\dots, x_{i-1}, x_i),$$

$$x_{j,\rightarrow} \equiv (x_j, x_{j+1}, \dots).$$

(2) $\alpha_i \in \{0, 1\}^{n_i}$, $\beta_i \in \{0, 1\}^{m_i}$, $n_i \geq 1$, $m_i \geq 1$, $i \in \mathbb{Z}$, に対して, 次のように定義する。

$$(\alpha_i, \beta_i)_{i=-\infty}^{+\infty} = (\dots, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_{n_1}^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \beta_{m_1}^{-1}, \alpha_1^0, \dots, \alpha_{n_0}^0, \beta_1^0, \dots, \beta_{m_0}^0, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{n_1}^1, \beta_1^1, \dots, \beta_{m_1}^1, \dots),$$

ここで, $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_{n_i}^i)$, $\beta_i = (\beta_1^i, \dots, \beta_{m_i}^i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

(3) 0 は次の三つのうちのいずれかを意味する。いずれが意味されるかは, 前後の文脈から理解できる。

$$(\dots, 0, 0, 0, \dots), (\dots, 0, 0, 0) \text{ or } (0, 0, \dots).$$

(4) ブロック $\alpha \in \{0, 1\}^n$ を i 個並べることで得られるブロックを

$$(\alpha)_i \equiv (\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_i)$$

とする。また, α の長さを

$$|\alpha| = n$$

と定める。

2. Spreading Rate and Lyapunov Exponent

Shereshevsky[14] に従い, ECA g の $x \in A$ における Lyapunov exponent は次のように定義される。 $s \in \mathbb{Z}$ として

$$\begin{aligned} W_s^+(x) &\equiv \{y \in A \mid \forall i \geq s, y_i = x_i\}, & W_s^-(x) &\equiv \{y \in A \mid \forall i \leq s, y_i = x_i\}, \\ \bar{\Lambda}_t^+(x) &\equiv \min \{s \mid g^t(W_0^+(x)) \subset W_s^+(g^t(x))\}, & \Lambda_t^+(x) &\equiv \max_{j \in \mathbb{Z}} \{\bar{\Lambda}_t^+(\sigma_L^j x)\}, \\ \bar{\Lambda}_t^-(x) &\equiv \max \{s \mid g^t(W_0^-(x)) \subset W_s^-(g^t(x))\}, & \Lambda_t^-(x) &\equiv \min_{j \in \mathbb{Z}} \{\bar{\Lambda}_t^-(\sigma_L^j x)\}, \end{aligned}$$

とする。ここで, $\sigma_L^j = \sigma_R^{-j}$ for $j < 0$ であり, σ_R は right-shift transformation である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_t^+(x)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_t^-(x)}{t}$$

の極限が存在するとき, それぞれを x における右及び左 Lyapunov exponent と呼ぶ。

$x, y \in A$ に対して

$$DFR(x, y) \equiv \sup\{i \mid x_i \neq y_i\}, \quad DFL(x, y) \equiv \inf\{i \mid x_i \neq y_i\},$$

とおく. 次の Lemma は, 後に定義する spreading rate と Lyapunov exponent を結びつける.

Lemma 2.1 ECA g において, configuration $x \in A$ と $t \in \mathbb{N}_+$ に対して, 次の関係が成立する.

- (1) $\max_{y \in W_0^+(x)} DFR(g^t(x), g^t(y)) = \min\{s \mid g^t(W_0^+(x)) \subset W_s^+(g^t(x))\} - 1,$
- (2) $\min_{y \in W_0^-(x)} DFL(g^t(x), g^t(y)) = \max\{s \mid g^t(W_0^-(x)) \subset W_s^-(g^t(x))\} + 1.$

Ilachinski[5] に従い, spreading rate は次のように定義される. まず, $n_j : A \rightarrow A$ ($j \in \mathbb{Z}$) を次のように定義する.

$$x \in A, \quad (n_j(x))_i = \begin{cases} x_i, & i \neq j, \\ \bar{x}_i, & i = j. \end{cases}$$

n_j は, configuration x の j 番目の状態を逆転させる. ECA g に対して,

$$\Gamma_t^+(x) \equiv \max_{j \in \mathbb{Z}} \{DFR(g^t(x), g^t(n_j(x))) - j\}, \quad \Gamma_t^-(x) \equiv \min_{j \in \mathbb{Z}} \{DFL(g^t(x), g^t(n_j(x))) - j\}$$

とし,

$$\gamma^+(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t^+(x)/t, \quad \gamma^-(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t^-(x)/t$$

の極限が存在するとき, それぞれを x における右および左 left spreading rate と呼ぶ.

Theorem 2.2 ECA g において, $x \in A$ と $t \in \mathbb{N}_+$ に対して次の関係が成立する.

- (1) $\Lambda_t^+(x) = \max_{j \in \mathbb{Z}} \max_{y \in W_j^+(x)} \{DFR(g^t(x), g^t(y)) - j\} + 1, \quad \Gamma_t^+(x) \leq \Lambda_t^+(x).$
- (2) $\Lambda_t^-(x) = \min_{j \in \mathbb{Z}} \min_{y \in W_j^-(x)} \{DFR(g^t(x), g^t(y)) - j\} - 1, \quad \Lambda_t^-(x) \leq \Gamma_t^-(x).$

一般的に spreading rate と Lyapunov exponent は一致しないが, ECA が left most permutive または right most permutive であれば一致する [12].

3. A 上での g_{168} の軌道の性質

g_{168} の対応表から, 次の二つの Lemma は容易である.

Lemma 3.1 $x \in A, x_i = x_{i+1} = 0$ であるとき,

$$(g_{168}(x))_{i, i+1} = (0, 0)$$

である. configuration 中の $(0, 0)$ ブロックは, 時間発展に於いて壁のような働きをする. つまり, 時刻 t に於ける configuration $g_{168}^t(x)$ について次のことが成立する.

$$g_{168}^t(x) = \left((g_{168}^t(x_{\leftarrow, i-1}, 0))_{\leftarrow, i-1}, \overset{\downarrow}{0}, \overset{\uparrow}{0}, (g_{168}^t(0, x_{i+2, \rightarrow}))_{i+2, \rightarrow} \right)$$

Lemma 3.2 (1) $x = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, \dots)$ とする. $(0, 0)$ の site 番号がそれぞれ -1 番, 0 番とされているが, 一般性は失われない. このとき,

$$g_{168}^{m_1}(x) = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, 0, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, \dots),$$

$$g_{168}^{m_1+\dots+m_n}(x) = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0, 1_{m_{n+1}}, \dots).$$

(2) $x = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_n}, 0)$ に対して,

$$g_{168}^{m_1}(x) = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_n}, 0),$$

$$g_{168}^{m_1+\dots+m_n}(x) = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0, 0),$$

$$(g_{168}^t(x))_{-1, \rightarrow} = 0, \quad \forall t \geq m_1 + \dots + m_n.$$

(3) $x = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_n}, 0, 1)$ に対して,

$$g_{168}^{m_1}(x) = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_n}, 0, 1),$$

$$g_{168}^{m_1+\dots+m_n}(x) = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0, 0, 1),$$

$$(g_{168}^t(x))_{-1, \rightarrow} = (0, 0, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0, 1), \quad \forall t \geq m_1 + \dots + m_n.$$

(4) $x = (\dots, \underbrace{\overset{0}{0}, 0, \dots, 0, \overset{1}{0}}_{\geq 2}, \dots)$ に対して,

$$g(x) = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, 0, \dots, 0, \overset{1}{0}, \dots)$$

$$g^t(x) = (\dots, \overset{-1}{0}, 0, \dots, 0, \overset{0}{0}, 0, \dots, 0, \overset{1}{0}, \dots), \quad \forall t \geq 1.$$

これらの Lemmas と, g_{168} の対応表から次の定理は容易である.

Theorem 3.3 (1) $x \in \mathcal{S}_k$ ($k \in \mathbf{N}$), $g_{168}(x) = \sigma_L(x)$.

(2) $x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{S}_\infty$ に対して,

(2-i) x 中の 0-state site が孤立し, $\exists i \in \mathbf{Z}$, $x_{i, \rightarrow} = 1$ ならば,

$$\forall t \geq 1, g_{168}^t(x) \neq 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_{168}^t(x) = 1.$$

(2-ii) $x = 1$ ならば $g_{168}^t(1) = 1$ であり, 従って

$$\forall t \geq 1, g_{168}^t(1) = 1.$$

(2-iii) $\exists i \in \mathbf{Z}$, $x_{i, \rightarrow} = 1$, $\exists j \in \mathbf{Z}$, $(x_j, x_{j+1}) = (0, 0)$ (the right most 00 block in x) ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{168}^t(x) = (\overset{j+1}{0}, 1).$$

(2-iv) これら以外の x に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{168}^t(x) = 0.$$

(g_{168}, \mathcal{S}_k) は (g_{168}, \mathcal{A}) の a sub-dynamical system であり, a left-shift dynamical system である. これについて次の定理が成立する. 証明は, ルール 40 が \mathcal{S}_2 上で Devanay chaos であることの証明 [14] と同様である.

Theorem 3.4 任意の $k \geq 2$ に対して, (g_{168}, \mathcal{S}_k) は Devanay chaos である.

周期点に関する次の定理は明らかである.

Theorem 3.5 (1) (g_{168}, \mathcal{S}_2) は, 不動点, 素周期 4, 6, 以外の任意の素周期点を持つ.

(2) (g_{168}, \mathcal{S}_3) は, 不動点, 素周期 4, 以外の素周期点を持つ.

(3) (g_{168}, \mathcal{S}_k) ($k \geq 4$) は, 不動点以外の素周期点を持つ.

(4) ($k \geq 4$) の任意の k に対して, $(g_{168}, \mathcal{S}_k \cup \{0\})$ 及び $(g_{168}, \mathcal{S}_k \cup \{0\})$ は全ての周期点を持つ.

Remark (1) ルール 168 と双対である 224 について, 同様のことが双対的に成立する.

(2) (g_{168}, \mathcal{S}_2) は (g_{40}, \mathcal{S}_2) である.

4. Spreading Rate of Rule 168

$x \in \mathcal{S}_\infty$ について

$$x = (\dots, \overset{0}{1}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots)$$

としても以下の議論の一般性は失われない.

$$n_0(x) = (\dots, \overset{0}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots)$$

とし, x と $n_0(x)$ との right most different site number の時間推移を調べる.

$$\begin{aligned} g^{m_1}(x) &= (\dots, 1, 0, \overset{1}{1_{m_1}}, \overset{2}{0}, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots), \\ g^{m_1+1}(x) &= (\dots, 1, 0, \overset{0}{1_{m_1}}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, 1_{m_2-1}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots), \\ g^{m_1}(n_0(x)) &= (\dots, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots), \\ g^{m_1+1}(n_0(x)) &= (\dots, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, 1_{m_2-1}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots), \end{aligned}$$

であり, よって

$$\begin{aligned} 1 \leq t \leq m_1, & \quad \text{Diff}(g^t(x), g^t(n_0(x))) = 1, \\ m_1 + 1 \leq t \leq m_1 + m_2, & \quad \text{Diff}(g^t(x), g^t(n_0(x))) = 2, \\ m_1 + m_2 + 1 \leq t \leq m_1 + m_2 + m_3, & \quad \text{Diff}(g^t(x), g^t(n_0(x))) = 3, \end{aligned}$$

従って, 帰納的に

$$m_1 + \dots + m_n + 1 \leq t \leq m_1 + \dots + m_n + m_{n+1} \quad \text{Diff}(g^t(x), g^t(n_0(x))) = n,$$

であり, よって

$$m_1 + \cdots + m_n + 1 \leq t \leq m_1 + \cdots + m_n + m_{n+1}, \quad \frac{Diff(g^t(x), g^t(n_0(x)))}{t} = \frac{n}{t}.$$

このことから, $n \rightarrow \infty$ としたときの

$$\frac{n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

の極限が存在すれば, それが right spreading rate である. 従って, $x_{0,-}$ に於ける $(0, 1_k, 0)$ の頻度によって right spreading rate が決まる. $(0, 1_k, 0)(x_{0,j})$ を $x_{0,j}$ に含まれる $(0, 1_k, 0)$ の個数 とすると,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (0, 1_n, 0)(x_{0,j})}{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (0, 1_n, 0)(x_{0,j})}$$

の極限が right spreading rate である.

分母分子に於ける無限和を見かけ上のものであり, $x_{0,j}$ が有限個の項のみからなるため, 和は有限和である.

$x \in S_k$ ($k \geq 2$) の場合を考える

right spreading rate は,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k (0, 1_n, 0)(x_{0,j})}{\sum_{n=1}^k n \cdot (0, 1_n, 0)(x_{0,j})} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k \frac{(0, 1_n, 0)(x_{0,j})}{j}}{\sum_{n=1}^k n \cdot \frac{(0, 1_n, 0)(x_{0,j})}{j}}$$

の極限として定まる. つまり, $x_{0,-}$ に於ける $(0, 1_n, 0)$ の相対頻度が求まれば, right spreading rate が求まる.

$x \in S_k$ に対して, $x_{0,-}$ を問題にすればよい. そこで

$$S_k^+ \equiv \{ x_{0,-} \mid x \in S_k \}$$

とし, (S_k^+, σ_L) の力学系を考える. この dynamical system は, 区間力学系 $([0, 1], f)$ と位相同型であり, f はそのグラフが図のように与えられるものである.

位相同型写像 $\Psi: [0, 1] \rightarrow S_k^+$ は次のように定義される.

$$x \in [0, 1], \quad (\Psi(x))_i = \begin{cases} 0, & f^i(x) \in \bar{0}, \\ 1, & f^i(x) \in \bar{1}, \end{cases}$$

で与えられる.

$[0, 1]$ 上のルベーグ測度 l は, $([0, 1], f)$ の不変測度であり, フォルクローレ定理より ergodic である. このルベーグ測度 l の Ψ による induce は, (S_k^+, σ_L) の ergodic 測度である. この ergodic 測度による相対頻度は, $([0, 1], f, l)$ において次のようにして求められる相対頻度である.

$(0, 1_n, 0)$ の記号を流用して, $n+2$ 変数の関数として, 次のように約束する.

$$(0, 1_n, 0)(a_0, a_1, \dots, a_i, a_{n+1}) = \begin{cases} 1, & a_0 = 0, a_1 = \cdots = a_i = 1, a_{n+1} = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

次の極限を求めればよい.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k \frac{\sum_{i=0}^j (0, 1_n, 0)(f^i(x), f^{i+1}(x), \dots, f^{i+n+1}(x))}{j}}{\sum_{n=1}^k n \cdot \frac{\sum_{i=0}^j (0, 1_n, 0)(f^i(x), f^{i+1}(x), \dots, f^{i+n+1}(x))}{j}}$$

Ergodic 定理より,

$$\frac{\sum_{i=0}^j (0, 1_n, 0)(f^i(x), f^{i+1}(x), \dots, f^{i+n+1}(x))}{j} \rightarrow \mathbf{E}[(0, 1_n, 0)(\cdot, f^1(\cdot), \dots, f^{n+1}(\cdot))], \quad l - a.s.$$

である.

$$\mathbf{E}[(0, 1_n, 0)(\cdot, f^1(\cdot), \dots, f^{n+1}(\cdot))] = \alpha_{k-n}$$

であるから, よって, 求める right spreading rate は, 次のようである.

$$\frac{\sum_{n=1}^k \alpha_n}{\sum_{n=1}^k (k-n+1) \cdot \alpha_n}.$$

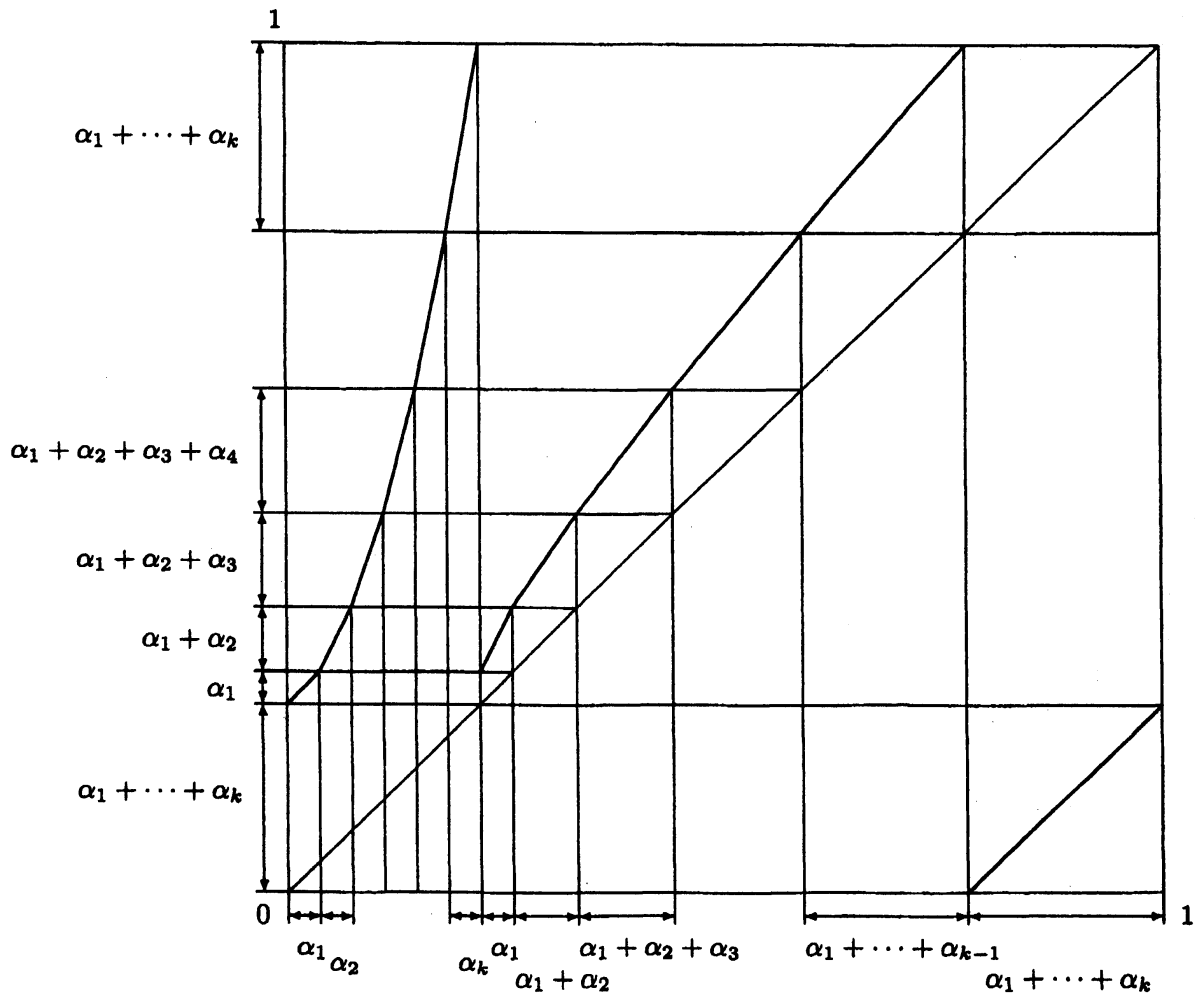
α_n は, 次の条件を満たす.

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \alpha_j + \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1, \quad \alpha_j > 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

次の等号と不等号は条件より容易に確認できる.

$$\frac{1}{k} < \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i}{\sum_{i=1}^k (k-i+1) \cdot \alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i} \leq 1.$$

従って, spreading rate について次の定理が成立する.



定理 4.1 ルール番号 168 の基本セルオートマトンにおいて, 0 以上 1 以下の任意の数を right spreading rate とする configuration が存在する.

5 Concluding Remarks

ルール番号 168 のセルオートマトンで定義される right spreading rate(Lyapunov exponent) が, 区間力学系でのある特定のパターンの相対頻度の期待値に等しいことがわかる. このことは, ルール番号 40 の場合と同様であり, 共に Wolfram class I に属する. ルール 40 のみであれば, 例外的な場合と考えることも出来るが, さらにルール 168 の例があることから, Lyapunov exponent が, セルオートマトンが生成する時空間パターンの複雑さを必ずしも反映しないことが分かる.

セルオートマトンが生成する時空間パターンの複雑さを捉えるためには, どのような量が有効であるのだろうか.

一方, ルール番号 40 と 168 については, 区間力学系と明確な対応が見つかる. このことがどの程度の一般性を持つかは今後の課題であるが, エントロピー等の量がどのような関係にあるのか興味ある問題が残されている.

References

- [1] G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchini and C.Quaranta Vogliotti, Pattern growth in elementary cellular automata, *Theoretical Computer Science*, **145**(1995), 1-26.
- [2] G. Cattaneo and L. Margara, Generalized sub-shifts in elementary cellular automata: the "strange case" of chaotic rule 180, *Theoretical Computer Science*, **201**(1998), 171-187.
- [3] G. Cattaneo, E.Formenti and L.Margara, Topological Definitions of Deterministic Chaos, in *Cellular Automata*, eds. M Delorme and J. Mazoyer, Kluwer Academic Publishers(1999), 213-259.
- [4] M.Gardner, *Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life"*, *Scientific American*, **223**(1970), 120-123.
- [5] A. Ilachinski, *Cellular Automata - A Discrete Universe*, World Scientific, (2001).
- [6] C. G. Langton, STUDYING ARTIFICIAL LIFE WITH CELLULAR AUTOMATA, *Physica* **22D**(1986), 120-149.
- [7] C. G. Langton, Life at the Edge of Chaos, *ARTIFICIAL LIFE II, PROCEEDINGS OF THE WORKSHOP ON ARTIFICIAL LIFE HELD FEBRUARY, 1990 IN SANTAFE, NEW MEXICO*, edited by Christopher G.Langton, Charles Taylor, J.Doyne Farmer and Steen Rasmussen, Addison-Wesley Publishing Company, 41-91.
- [8] J. von Neumann, *Theory of Self - Reproducing Automata*, University of Illinois Press, Urbana and Chicago, (1966).
- [9] F. Ohi and Y. Takamatsu, Time-Space Pattern and Periodic Property of Elementary Cellular Automata - Sierpinski Gasket and Partially Sierpinski Gasket -, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **18**(2001), 59-73.
- [10] 大鑄 史男, 基本セルオートマトンが生成する時空間パターン - Sierpinski Gasket -, *京都大学数理解析研究所講究録 1306 「不確実性の下での意志決定の数理」*, 2003.2, 142-151.
- [11] F. Ohi and K. Mabuchi, Time-Space Pattern and Dynamics Determined by Elementary Cellular Automata, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **21**(2004), 1-23.
- [12] 大鑄史男, ルール番号 40 の基本セルオートマトンと確率測度, *数理解析研究所講究録 1559 「RIMS 共同研究. 最適化問題における確率モデルの展開と応用」*, 2007.6, pp122-130.

- [13] Fumio Ohi Chaotic Property of Elementary Cellular Automaton of Rule 40 in Wolfram Class I, Complex Systems, Vol.17(2007),295-308.
- [14] M. A. Shereshevsky, Lyapunov exponents for one-dimensional cellular Automata, J.Nonlinear Sci. 2(1992), 1-8.
- [15] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, Review of Modern Physics, 55(1983), 601-644.
- [16] S. Wolfram, UNIVERSALITY AND COMPLEXITY IN CELLULAR AUTOMATA, Physica 10D(1984),1-35.
- [17] S. Wolfram, A NEW KINDS OF SCIENCE, Wolfram Media, Inc., (2002).