数理解析研究所講究録
第1593巻 2008年 25-30

On the relationship between rational-valued characters and prime graphs of finite groups

千葉大学・自然科学研究科 與口卓志 (Takashi Yoguchi)
Graduate School of Science and Technology,
Chiba University

1. 動機

G を有限群, χ をその一般指標とするとき,

$$\chi' := \chi(1)\,1_G - \chi,$$
$$L'(\chi) := \{\chi'(g) \mid 1 \neq g \in G\}$$

と定める (ここで, 1_G は G の単位指標を表す.) この集合が考えられ始めたきっかけは, 次の事実が成り立つことである (cf. [1], [2]).

定理 1. χ を有限群 G の一般指標とするとき,

$$sh(\chi) := \prod_{\ell' \in L'(\chi)} \ell'$$

は $|G|$ の整数倍である.

特に $sh(\chi) = |G|$ が成り立つような χ のことを sharp 指標と呼ぶ. sharp 指標の典型例は sharply t-transitive な置換群の置換指標であるが, 実際は ordinary character の範囲に限っても他に多くの例が見つかっている.

特に χ が整数値の場合, 定理 1 の式は $|G|$ を因数分解しているとみることができる. そこで, 整数値の sharp 指標を考えるときにこの分解の仕方を手がかりにすることが多い. 当稿で扱う話題もそうした中で登場した予想の 1 つである.

以下, G は有限群を表すことにする. また, G の持つ整数値の一般指標全体を $\mathrm{Ch}_{\mathbb{Q}}(G)$ とおく. 煩雑になるのを避けるため, 以下では単に指標といえば一般指標のこととする. 次の用語を準備する.

定義 1. $\chi \in \mathrm{Ch}_{\mathbb{Q}}(G)$ に対し, $|L'(\chi)|$ のことを χ の rank と呼ぶ.

定義 2. $\chi \in \mathrm{Ch}_{\mathbb{Q}}(G)$ とする. $L'(\chi)$ が $L'(\chi) = L'_1 \cup L'_2 \cup \cdots \cup L'_t$ と分割でき,

(1) $0, \pm 1 \notin L'(\chi)$,

(2) $i \neq j$ ならば, $\forall a \in L'_i$, $\forall b \in L'_j$ に対し $(a, b) = 1$ が成り立つ,

の 2 つを満たすとき, χ は t-isolated であるという.

t-isolated は Iiyori [3] によって導入されたアイディアであり, rank が小さいときには次の結果が知られている.

定理 2 (Iiyori). 有限群 G に対し, 以下は同値:

(i) G は 2-isolated, かつ rank 2 の sharp 指標をもつ.

(ii) G は 2-isolated, かつ rank 2 の指標をもつ.

(iii) G の素数グラフの連結成分は 2 個以上.

上では一般化に含みを持たせて “2-isolated, かつ rank 2” と書いたが, 簡単に言えば $L'(\chi)$ が互いに素な 2 つの整数からなる場合である. このとき, G の素数グラフの構造に制限が掛かり, しかも逆もまた成り立つというのが定理の主張である.

ここでは (ii)⇒(iii) の証明だけ紹介する. $L'(\chi) = \{\ell, m\}$, $(\ell, m) = 1$ とする. このとき, $p \in \pi(\ell)$ と $q \in \pi(m)$ を取ると G は位数 pq の元 g を持たないことを示す. そうすれば, $|G|$ は ℓm の約数だから G の素数グラフが非連結であると分かる.

一般に, 整数値の指標 χ と素数 p について

$$\chi'(g^p) \equiv \chi(g)^p \equiv \chi'(g) \pmod p$$

が成り立つ. 従って, もし位数 pq の元 g が取れたとすると,

$$\chi'(g^p) = m, \quad \chi(g^q) = \ell$$

でなければならない. もし $\chi'(g) = \ell$ ならば, $\ell = \chi'(g) \equiv \chi'(g^q) = m \pmod q$ となり $(\ell, m) = 1$ と矛盾する. 同様に $\chi'(g) = m$ でも矛盾するので, このような g が存在してはいけない. よって (ii)⇒(iii) が示せた.

定理 2 が一般の t で成り立つと予想するのは自然なことだと思われる. にも関わらず, 現実には直感的は一般化が成り立たない. 次節以降では, まずその事実を紹介する.

2. 一般化の考察

さて, 定理 2 における (iii)⇒(i) の箇所は一般の t で成り立つことが既に分かっている:

定理 3. G の素数グラフの連結成分が t 個以上ならば, G は t-isolated, かつ rank t の sharp 指標を持つ.

Proof. G の素数グラフの連結成分に応じて, $|G|$ の素因数全体の集合 $\pi(G)$ を

$$\pi(G) = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \cdots \cup \pi_t$$

と分割する. $G - \{1\}$ の任意の元はいずれか 1 つの π_i に対し π_i-元である. そこで, G の類関数 χ を次で定義する:

$$\chi(1) := 0, \quad \pi_i\text{-元 } g \in G - \{1\} \text{ に対し } \chi(g) := -|G|_{\pi_i}.$$

この χ が一般指標になることを Brauer の定理によって示す. 仮定から G の elementary subgroup E はいずれかの i に対する π_i-群になるので, χ_E は $G - \{1\}$ で唯 1 つの値 $-|G|_{\pi_i}$ を取る. ゆえに,

$$\chi_E = \frac{|G|_{\pi_i}}{|E|}\rho_E + c1_G \quad (c \in \mathbb{Z},\ \rho_E \text{ は } E \text{ の正則指標})$$

と書ける. これはもちろん一般指標だから, χ も G の一般指標である. □

従って, 一般化を考えるときに問題となるのは (ii)⇒(iii), または (i)⇒(iii) に相当する部分となる. 定理 2 の証明は rank 2 であることを本質的に使っているので単純には流用できない. 実際, 次のような例が存在する.

例 1. $G = M \times N$ とするとき,

$$\chi := (1_M)^G + (1_N)^G$$

とおけば $L'(\chi) = \{|M|, |N|, |M| + |N|\}$ である. 特に $(|M|, |N|) = 1$ ならば χ は 3-isolated, かつ rank 3 である.

上の G の素数グラフは M, N に依らず連結なので, 定理 2 をそのまま一般化することが不可能だと分かる. さらに, GAP によって探索した結果, 次のような例も見つかった.

例 2. $G = \mathrm{SL}(2, 16)$ とする. G は

$$\chi(1) = 1, \quad L'(\chi) = \{-16, -3, 5, 17\}$$

なる sharp 指標 χ を持つが, G の素数グラフの連結成分は 3 つである.

なお, 上の χ は ordinary character ではない. $\mathrm{SL}(2, q)$, $q = 2^a$ の sharp な ordinary character は本質的に q 次の既約指標のみであることが知られている. これは, 一般指標の範囲で sharp 指標を考えるとより多くの可能性が生き残る例の 1 つでもある.

このような例が比較的容易に見つかったこと自体予想外であったが, GAP による探索結果を見ると, 実際はさらに多くの群で変則的な例が構成できるようである.

しかし, 少なくとも現在のところでは, 素数グラフが連結な群でこういった例は見つかっていない. これが偶然か否かは不明だが, ここでは敢えて次の予想を提示したい.

予想. 有限群 G が t-isolated, かつ rank t の (sharp) 指標をもつならば, G の素数グラフは非連結である.

なお, やや趣旨から外れるが, もともと sharp 指標は ordinary character で考えられていた概念であり, 対象を ordinary character に限定した場合にどうなっているかについても興味がある. しかし, この場合はサンプル自体が少なくあまり良く分かっていない.

3. より弱い一般化

前節の予想自体については現時点では如何ともいえないが, より弱い次の定理であれば成り立つことが確認できる.

定理 4. $\chi \in \mathrm{Ch}_{\mathbb{Q}}(G)$ が t-isolated, かつ rank t $(t > 1)$ とする.

$$L'(\chi) = \{d_1, d_2, \ldots, d_t\}$$

とおく. このとき, 任意の $p_1 \in \pi(d_1)$, $p_2 \in \pi(d_2)$, ..., $p_t \in \pi(d_t)$ に対して, G は位数 $p_1 p_2 \cdots p_t$ の元を持たない.

必要になる事実は基本的に rank 2 の場合と同じである．ただし，rank 2 の場合のように具体的に値を見ていこうとしてもうまくいかない．そこである種の“階層分け”をして，その階層間の関係を見てやる．

定理 4 の証明. 仮に位数 $p_1p_2\cdots p_t$ の元 $g \in G$ が存在したとする．$G = \langle g \rangle$ と仮定してよい．便宜上，$|G|$ の約数 m に対し位数 m の元 $g_m \in G$ を 1 つずつ取って固定しておく (χ の $g \in G$ における値は $o(g)$ のみによって決まることに注意.)

$i = 1, 2, \ldots, t$ に対して

$$
\begin{aligned}
U_i &:= \{g_m \mid (\chi'(g_m), m) = 1,\ |\pi(m)| = i\},\\
D_i &:= \{g_m \mid (\chi'(g_m), m) > 1,\ |\pi(m)| = i\}.
\end{aligned}
$$

という集合を定義する．明らかに $|U_i| + |D_i| = \binom{t}{i}$ である．これらの集合の間に次の写像 $f_i : U_i \longrightarrow D_{i+1}$ を定める: $f_i(g_m) := g_{mp}$, ただし p は $p_1, p_2, \ldots, p_t$ のうち $\chi'(g_m)$ を割り切るものを選ぶ．

この定義は well-defined である．実際，$L'(\chi)$ の元はすべて互いに素なので $g_m \in U_i$ に対して g_{mp} という元が一意的に決まり，$p \mid \chi'(g_m)$ かつ $\chi'(g_m) \equiv \chi'(g_{mp}) \pmod p$ より $g_{mp} \in D_{i+1}$ が成り立つ．

さらに，f_i は全単射である．これは，$g_m \in D_{i+1}$ を $g_{m/p}$ に写す写像がちょうど逆写像になることから分かる (この p も $p \mid \chi'(g_m)$ となるように p_i の中から選ぶ.) 特に $|U_i| = |D_{i+1}|$ が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
0 = |D_2| = \binom{t}{2} - |U_2| &= \binom{k}{2} - \binom{t}{3} + |U_3| \\
&= \cdots = \sum_{j=2}^{t} (-1)^j \binom{t}{j} = (1-1)^t - 1 + t,
\end{aligned}
$$

を得る ($|D_2| = 0$ となるのは定理 2 の証明と同様の理由による．また，$|U_t| = 0$ を用いた.) よって $t = 1$ となり矛盾が生じた． $\square$

この定理は本来の予想に比べてずっと弱いが，出発点である sharp 指標の考察においては幾らかの応用が期待できる．それらは近く別の形で発表される予定である．

参考文献

[1] H. F. Blichfeldt, *A theorem concerning the invariants of linear homogeneous groups with some applications to substitution groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904) 461–466.

[2] P. J. Cameron, M.Kiyota, *Sharp characters of finite groups*, J. Algebra 115 (1988) 125–143.

[3] N. Iiyori, *Sharp characters and prime graphs of finite groups*, J. Algebra 163 (1994) 1–8.