数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 36-44



# $[P,P]$-perfect isometry I

大阪教育大学・教育学部・教養学科　宇野勝博 (Katsuhiro Uno)
Division of Mathematical Sciences, Osaka Kyoiku University

C.Broto, R.Levi, R.Oliver 達による $p$-local finite group の研究 [1], [2] は, もともと群の分類空間の $p$-completion の分類を目的としているが, Puig による fusion system の研究からも刺激を受けながら発展していることもあり, 有限群の構造を「再度」fusion を通してみる機会を与えてくれているように思う. 一方, 表現論の観点から見ると, Brauer の第一主定理が言うように, 群 $G$ の表現と $G$ の Sylow $p$-subgroup $P$ の正規化群 $N_G(P)$ (一般には block の defect 群の正規化群) のそれは関連が深い. 例えば, Broué's Conjecture は $P$ が可換の場合, $G$ と $N_G(P)$ の対応する block に含まれる指標, 加群の間に深い関係があると予想する. しかし, そもそも Broué Conjecture の背景にあったのは, fusion が同じ場合は指標間に対応 (perfect isometry) があるのではないかということである. ($P$ が可換の場合は $G$ と $N_G(P)$ において $P$ 上の fusion が同じになる.) ところが, 一般には, fusion が同じというだけで指標間に perfect isometry が存在するとは限らない. Broué's Conjecture は, あくまでも $P$ が可換という条件のもとでの予想である. Fusion が同じという条件のみで ($P$ が可換ではない場合も含めて) 指標間, 加群間に関係はないのだろうか. 以下では, $P$ が位数 $p^3$ の extra specail $p$-group の場合等の考察から想起される予想を述べる. ただし, ここで述べる予想は, まだまだ満足いく形ではないように思える. 今後さらに考察を進め, 将来少し違った形の予想を発表する可能性も大きい. (実際, 研究集会で発表した予想とここで述べる予想も異なる.) 今回発表する予想に対し, 多くの方々からご意見を頂戴できることを期待し, また, 将来予想の更なる変更がもたらすであろう混乱については, ご寛容をお願いする次第である. 以下では $p$ は奇素数を表す. ただし, isometry の定義などでは $p=2$ でもよい.

## 1. Fusion Systems

まず, saturated fusion system の定義を述べる. 群 $G$ の部分群 $H$ に対し, $C_G(H)$ は $H$ の $G$ における中心化群を表す.

**定義 1.** $P$ を有限 $p$-群とする. Saturated fusion system $\mathcal{F}$ over $P$ とは, $P$ の部分群のすべてを対象とし, 射の集合は単射からなる圏で以下の条件をみたすものをいう.

(i) $\mathcal{F}$ の対象 $Q_1, Q_2$ に対し, $Q_1$ から $Q_2$ への $P$ の元による共役写像全体の集合 $\mathrm{Hom}_P(Q_1,Q_2)$ は $\mathcal{F}$ における射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q_1,Q_2)$ の部分集合である.

(ii) $\mathcal{F}$ の対象 $Q_1, Q_2$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q_1,Q_2)$ の任意の元 $\varphi$ は $\mathcal{F}$ のふたつの射 $\varphi: Q_1 \to \varphi(Q_1)$ と包含写像 $i: \varphi(Q_1) \subseteq Q_2$ の合成として表される.

(iii) $Q$ を $\mathcal{F}$ の対象とする. このとき, 任意の射 $\varphi$ に対し $|N_P(Q)| \geq |N_P(\varphi(Q))|$ であれば $|C_P(Q)| \geq |C_P(\varphi(Q))|$ が成り立つ.

(iv) $\mathcal{F}$ の任意の対象 $Q$ に対し, $\mathrm{Hom}_P(Q,Q)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q,Q)$ の Sylow $p$-部分群である.

(v) $Q$ を $\mathcal{F}$ の対象とする. $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q,P)$ が任意の射 $\varphi'$ に対し $|C_P(\varphi(Q))| \geq |C_P(\varphi'\varphi(Q)|$ であるとき, $N = \{g \in N_P(Q) \mid \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_P(\varphi(Q))\}$ と定義すると (但し, $c_g$ は $g$ による共役写像), $Q$ への制限が $\varphi$ となるような射 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N,P)$ が存在する.

Sylow $p$-部分群 $P$ をもつ任意の有限群 $G$ に対し, 圏 $\mathcal{F}_G$ を対象を $P$ の部分群のすべて, $P$ の部分群 $Q_1$, $Q_2$ に対して射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(Q_1,Q_2)$ を $G$ の元による $Q_1$ から $Q_2$ への共役の

全体

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(Q_1, Q_2) = \{\ c_g : Q_1 \to Q_2 \mid g \in G,\ g^{-1}Q_1 g \subseteq Q_2\ \}$$

ただし, $c_g(x) = g^{-1}xg$, $(x \in Q_1)$, とおくと $\mathcal{F}_G$ は $P$ 上の saturated fusion system となる. Fusion system にとって重要な対象は次の centric なものと radical なものである.

**定義 2.** (i) $\mathcal{F}$ の対象 $Q$ が任意の射 $\varphi$ に対し, $\varphi(Q) \geq C_P(\varphi(Q))$ をみたすとき, $Q$ を $\mathcal{F}$-centric な対象であるという.

(ii) $\mathcal{F}$ の対象 $Q$ に対し, $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q,Q)/\mathrm{Hom}_Q(Q,Q)$ とおく. $O_p(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q))$ が自明であるとき, $Q$ を $\mathcal{F}$-radical な対象であるという.

Alperin の fusion theorem によれば, saturated fusion system $\mathcal{F}$ は, $\mathcal{F}$-centric かつ $\mathcal{F}$-radical な対象からなる full subcategory によって決定される.

位数 $p^3$, べき数 $p$ の extra special $p$-group を $p_+^{1+2}$ と書くことにする. $\mathcal{F}^e$ を elementary abelian であり, $\mathcal{F}$-centric かつ $\mathcal{F}$-radical な対象の全体とする. (注：$P$ 上の saturated fusion system $\mathcal{F}$ に対し, $P$ 自身はいつも $\mathcal{F}$-centric かつ $\mathcal{F}$-radical な対象である. $P = p_+^{1+2}$ のとき, $P$ 以外に $\mathcal{F}$-centric かつ $\mathcal{F}$-radical な対象は必ず位数 $p^2$ の elementary abelian になる.) このとき $P = p_+^{1+2}$ 上の saturated fusion system は $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ と $\mathcal{F}$-centric かつ $\mathcal{F}$-radical な対象で定まる. すなわち, 次の定理が成り立つ.

**定理 3.** (Ruiz, Viruel [12]) $P = p_+^{1+2}$ とする. このとき, $P$ 上の saturated fusion system $\mathcal{F}$ は $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ と $|\mathcal{F}^e|$ により一意的に定まる.

実際, Ruiz, Viruel は以下のように $P$ 上の saturated fusion system を分類した. ここで, 自然数 $n$ に対し $n$ で位数 $n$ の巡回群, $S_n$, $A_n$, $D_n$, $SD_n$ でそれぞれ, 次数 $n$ の対称群, 次数 $n$ の交代群, 位数 $n$ の二面体群, 位数 $n$ 準二面体群を表す. また, 群 $B$ が群 $A$ に作用しているとき, その作用による半直積を $A{:}B$ と表す. 個々の群の名称は [5] の通りである.

まず, すべての奇素数 $p$ に対して次の saturated fusion system がある. なお, $P \cong p_+^{1+2}$ が $G$ の Sylow $p$-部分群で, かつ $G$ で T.I. (trivial intersection) のとき, $|\mathcal{F}_G^e| = 0$ となり, $\mathcal{F}_G$ は $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_G}(P)$ のみで定まる.

| $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ | $\lvert\mathcal{F}^e\rvert$ | Examples |
|---|---|---|
| $W$ | 0 | $P{:}W$ with $p \nmid \lvert W\rvert$ |
| $(p-1) \times r$ | 1 | $p^2{:}(SL_2(p){:}r)$ with $r \mid (p-1)$ |
| $(p-1) \times \frac{(p-1)}{3}$ | 2 | $L_3(p)$ with $3 \mid (p-1)$ |
| $((p-1) \times \frac{(p-1)}{3}){:}2$ | 2 | $L_3(p){:}2$ with $3 \mid (p-1)$ |
| $(p-1) \times (p-1)$ | 2 | $L_3(p){:}3$ with $3 \mid (p-1)$ |
| $((p-1) \times (p-1)){:}2$ | 2 | $L_3(p){:}S_3$ with $3 \mid (p-1)$ |
| $(p-1) \times (p-1)$ | 2 | $M_{12}$ (for $p=3$), $L_3(p)$ with $3 \nmid (p-1)$ |
| $((p-1) \times (p-1)){:}2$ | 2 | $M_{24}$, $He$ (for $p=3$), $Ru$ (for $p=5$), $L_3(p){:}2$ with $3 \nmid (p-1)$ |

更に, $p \leq 13$ の場合は以下の "sporadic" な saturated fusion system がある. ちなみに, $p_+^{1+2}$ を Sylow $p$-部分群にもつ散在型単純群では $p \leq 13$ となっており, $p_+^{1+2}$ の状況だけを用いた Ruiz, Viruel による saturated fusion system の分類の方も, 同様に $p \leq 13$ のときのみ例外型の saturated fusion system が存在するということは非常に興味深い.

| | $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ | $\|\mathcal{F}^e\|$ | Examples |
|---|---|---|---|
| $p=3$ | $D_8$ | 4 | ${}^2F_4(2)'$ |
| | $SD_{16}$ | 4 | $Ru$, $J_4$ |
| $p=5$ | $4S_4$ | 6 | $Th$ |
| $p=7$ | $S_3\times 3$ | 3 | $He$ |
| | $S_3\times 6$ | 3 | $He{:}2$ |
| | $S_3\times 6$ | 6 | $Fi'_{24}$ |
| | $(6\times 6){:}2$ | 6 | $Fi_{24}$ |
| | $(6\times 6){:}2$ | 8 | none |
| | $D_8\times 3$ | 4 | $O'N$ |
| | $D_{16}\times 3$ | 4 | $O'N{:}2$ |
| | $D_{16}\times 3$ | 8 | none |
| | $SD_{32}\times 3$ | 8 | none |
| $p=13$ | $3\times 4S_4$ | 6 | $M$ |

**注意 4.** $p=7$ のとき，上の表で none と表示されている saturated fusion system $\mathcal{F}$ については，$\mathcal{F}=\mathcal{F}_G$ となる有限群 $G$ は存在しない．（ある種の無限群に $p$-部分群の概念を導入したものを考え，そのような無限群 $G$ で $\mathcal{F}=\mathcal{F}_G$ となるものが存在するという結果はある）なお，彼らは，none であることの証明に有限単純群の分類定理を用いている．

有限単純群の分類定理を用いると Sylow $p$-部分群が $p_+^{1+2}$ であり，かつ，$O_{p'}(G)=\{1\}$ である有限群をすべて求めることができる．$p=3$ の場合の結果は [13] にもある．これらを saturated fusion system の分類に即してまとめると以下のようになる．

| Case | $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ | $\|\mathcal{F}^e\|$ | Groups $G$ with $O_{3'}(G)=\{1\}$ |
|---|---|---|---|
| (1) | 1 (*) | 0 | $P$ |
| (2) | 2 (*) | 0 | $P{:}2$ |
| (3) | 2 | 0 | $P{:}2$ |
| (4) | 2 | 1 | $PGL_3(q)\le G\le \mathrm{Aut}(PSL_3(q))$ ($q\equiv 4,7 \mod 9$),<br>$PGU_3(q^2)\le G\le \mathrm{Aut}(PSU_3(q^2))$ ($q\equiv 2,5 \mod 9$) |
| (5) | 4 (*) | 0 | $P{:}4$, $3A_6$, $3A_7$ |
| (6) | $2^2$ | 0 | $P{:}2^2$ |
| (7) | $2^2$ | 1 | $PGL_3(q)\le G\le \mathrm{Aut}(PSL_3(q))$ ($q\equiv 4,7 \mod 9$),<br>$PGU_3(q^2)\le G\le \mathrm{Aut}(PSU_3(q^2))$ ($q\equiv 2,5 \mod 9$) |
| (8) | $2^2$ | 2 | $L_3(3)$, $M_{12}$ |
| (9) | 8 | 0 | $P{:}8$, $U_3(3)$, $J_2$, $3A_6{:}2_2$ |
| (10) | $Q_8$ (*) | 0 | $P{:}Q_8$, $3A_6{:}2_3$, $3M_{22}$,<br>$SL_3(q){:}A$ ($q\equiv 4,7 \mod 9$) for some $A$<br>$SU_3(q^2){:}A$ ($q\equiv 2,5 \mod 9$) for some $A$ |
| (11) | $D_8$ | 0 | $P{:}D_8$, $3A_6{:}2_1$, $3S_7$ |
| (12) | $D_8$ | 2 | $L_3(3){:}2$, $M_{12}{:}2$, $M_{24}$, $He$, $He{:}2$ |
| (13) | $D_8$ | 4 | ${}^2F_4(2)'$ |
| (14) | $SD_{16}$ | 0 | $P{:}SD_{16}$, $3S_6{:}2$, $J_2{:}2$, $3M_{22}{:}2$<br>$SL_3(q){:}A$ ($q\equiv 4,7 \mod 9$) for some $A$<br>$SU_3(q^2){:}A$ ($q\equiv 2,5 \mod 9$) for some $A$<br>$G_2(q)\le G\le \mathrm{Aut}(G_2(q))$ ($q\equiv 2,4,5,7 \mod 9$) |
| (15) | $SD_{16}$ | 4 | $Ru$, $J_4$, ${}^2F_4(q^2)\le G\le \mathrm{Aut}({}^2F_4(q^2))$ ($q^2\equiv 2,5 \mod 9$) |

ここで, (*) の表示がある fusion system は $\mathrm{Out}(P)$ が $Z(P)$ に自明に作用しているものである.

**注意 5.** (i) $3A_6{:}2_1 \cong 3S_6$, $3A_6{:}2_2 \cong 3PGL_2(3^2)$, $3A_6{:}2_3 \cong 3M_{10}$.
(ii) $3A_6{:}2^2 \cong 3S_6{:}2 = \mathrm{Aut}(3A_6) = \mathrm{Aut}(3S_6)$, $3S_7 = \mathrm{Aut}(3A_7)$.
(iii) $PGU_3(2^2) \cong 3^2{:}SL_2(3)$, $PGU_3(2^2){:}\langle\sigma\rangle \cong 3^2{:}GL_2(3)$, $SU_3(2^2) \cong P{:}Q_8$, $SU_3(2^2){:}\langle\sigma\rangle \cong P{:}SD_{16}$, ここで $\sigma$ は有限体 $\mathbb{F}_4$ の非自明な Galois 自己同型.
(iv) $U_3(3):2 = \mathrm{Aut}(U_3(3)) = G_2(2)$, $L_3(3):2 = \mathrm{Aut}(L_3(3))$, $M_{12}:2 = \mathrm{Aut}(M_{12})$, $J_2:2 = \mathrm{Aut}(J_2)$, $3M_{22}{:}2 = \mathrm{Aut}(3M_{22})$, $He{:}2 = \mathrm{Aut}(He)$.

$p > 3$ の場合も上と同様の分類ができる.

## 2. Broué's Perfect Isometry Conjecture

以下の記号を固定する. (一般的には [7] 参照.)

$\zeta$ : 1 の原始 $n$-乗根 ($n$ は十分大きい自然数), $\mathcal{P}$ : $\mathbb{Z}[\zeta]$ の $\mathcal{P}\cap\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ を満たす素イデアル,
$R$ : $\mathbb{Z}[\zeta]$ の $\mathcal{P}$ による完備化, $k$ : 剰余体 $R/\mathcal{P}R$ (標数 $p$),
$\mathrm{Irr}(G)$: $G$ の複素既約指標の全体のなす集合.

このとき, $\mathbb{Q}(\zeta)$ と $k$ は, $G$ のすべての部分群に対して分解体となる. また, $\frac{|G|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z}$, $\forall\,\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ となることはよく知られている. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対し, $d(\chi)$ と $r(\chi)$ を次で定義する.

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = p^{d(\chi)}r(\chi), \quad ただし \quad (p, r(\chi)) = 1.$$

$d(\chi), r(\chi)$ をそれぞれ $\chi$ の $p$-defect, $p$-residue と呼ぶ. 次に $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して, $\chi_1 \sim \chi_2$ を以下のように定義する.

$$\chi_1 \sim \chi_2 \iff \frac{|G|\chi_1(g)}{|C_G(g)|\chi_1(1)} \equiv \frac{|G|\chi_2(g)}{|C_G(g)|\chi_2(1)} \mod \mathcal{P},\ \forall g \in G$$

(Note: 上の値は $\mathbb{Z}[\zeta]$ に含まれることが知られている.) この $\sim$ は, $\mathrm{Irr}(G)$ に ($p$ には依存するが) $\mathcal{P}$ に依存しない同値関係を与える. この同値関係による同値類を $p$-block という.

$B$ を $G$ の $p$-block とする.

$$e_B = \sum_{\chi\in B} \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g\in G} \chi(g^{-1})g.$$

とおくと, $e_B$ は, group algebra $RG$ の中心 $Z(RG)$ に含まれる idempotent ($B$ の block idempotent という) となり, $B$ について和 $\sum_B e_B$ とると $RG$ の単位元に一致する. 従って, $e_BRG$ は, $RG$ の $R$-subalgebra であり (ただし, 単位元は $e_B$) $R$-algebra として $RG = \prod_B e_BRG$ となる.

$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ が $p$-block $B$ に含まれるための必要十分条件は, ($\chi$ を $R$-線形に拡張して $RG$ 上定義されたものとして) $\chi(e_B) \neq 0$ である. また, 直既約 (右) $RG$-加群 $M$ が $Me_B \neq \{0\}$ を満たすとき, $M$ は $B$ に含まれると言い, 直既約 (右) $kG$-加群 $N$ が $N\overline{e_B} \neq \{0\}$ を満たすとき, $N$ は $B$ に含まれると言う. ただし, $\overline{e_B}$ は, $e_B$ の自然な準同型 $RG \to kG$ による像である.

$B$ を $G$ の $p$-block とする. $\chi \in B$ をとり,

$$\frac{|G|\chi(g)}{|C_G(g)|\chi(1)} \notin \mathcal{P}$$

となる $g \in G$ をすべて考え, その中心化群 $C_G(g)$ の Sylow $p$-部分群をとる. このとき, このようにして得られた $p$-部分群達の包含関係による極小元は互いに $G$ の元による共役で移りあう. この極小元を $B$ の defect 群と言う. $p$-block の定義により, この極小元は $\chi \in B$ の取り方に依存せずに定まる. $B$ の defect 群 $D$ の位数が $p^d$ のとき, $B$ の defect は $d$ であると言い, この $d$ を $d(B)$ で表す. 即ち, $|D| = p^{d(B)}$. このとき, 次のことが知られている.

$$d(B) = \max\{d(\chi) | \chi \in B\}.$$

特に, $(p, \chi(1)) = 1$ となる $\chi$ が $p$-block $B$ に存在するとき, $B$ の defect 群 は Sylow $p$-部分群でなければならない. 単位指標を含む $p$-block を主 block という. 主 block の defect 群は Sylow $p$-部分群である.

群 $G$ の $p$-部分群 $D$ を固定したとき, Brauer の第一主定理は, defect 群が $D$ である $G$ の $p$-block と defect 群が $D$ である $N_G(D)$ の $p$-block が自然に一対一に対応していることを主張する. $B$ を有限群 $G$ の $p$-block で defect 群が $D$ であるものとし, $B'$ を $N_G(D)$ の $p$-block で $B$ と Brauer の第一主定理で対応しているものとする. Broué's Conjecture は, 指標値, 加群の圏についての内容を含む. ただし, defect 群が可換という条件下での話である.

**予想 6.** (Broué [3], [4]) $B$ と $B'$ が可換な defect 群 $D$ をもつとき次が成立する ?

(i) (Perfect Isometry Conjecture) 全単射 $f : B \to B'$ と写像 $\varepsilon : B \to \{\pm 1\}$ が存在し,

$$\mu(g,h) = \sum_{\chi \in B} \varepsilon(\chi)\chi(g)f(\chi)(h), \quad (g \in G, h \in N_G(D))$$

とおくとき次をみたす;

(P1) $\mu(g,h) \neq 0 \Longrightarrow$

$g$ と $h$ はともに $p$ と素な位数をもつか, あるいは, ともに $p$ の倍数である位数をもつ.

(P2) $\mu(g,h)/|C_G(g)|$ と $\mu(g,h)/|C_{N_G(D)}(h)|$ は $R$ の元.

(ii) (Derived Equivalence Conjecture) $e_B RG$ と $e_b RN_G(D)$ の加群圏の導来圏は三角圏として同値 ?

$$D^b(\mathrm{mod}(e_B RG)) \cong D^b(\mathrm{mod}(e_{B'} RN_G(D)) \ ?$$

(iii) (Splendid Equivalence Conjecture, Rickard [10]) 各項 $C_i$ が $p$-permutation かつ $\Delta(D)$-射影的な $R(G \times N_G(D))$-加群で, $RG$-$RN_G(D)$-両側加群とみたとき, 左 $RG$-射影的かつ右 $RN_G(D)$-射影的なものからなる有限鎖複体 (ただし, $\Delta(D) = \{(g, g^{-1}) \mid g \in D\}$)

$$\mathbf{C} : \cdots \to C_{i+1} \to C_i \to \cdots$$

で $\mathbf{C} \otimes_{RN_G(D)} \mathbf{C}^* \cong e_B RG$ および $\mathbf{C}^* \otimes_{RG} \mathbf{C} \cong e_{B'} RN_G(D)$ (homotopy equivalence) を満たすものが存在する ? 特に, この $\mathbf{C}$ は, $D^b(\mathrm{mod}(e_B RG))$ と $D^b(\mathrm{mod}(e_{B'} RN_G(D))$ 間の同値を与える.

**注意 7.** (i) $p$-permutation かつ $\Delta(D)$-射影的な加群とは, $\Delta(D)$-加群からの誘導で得られる $G \times N_G(D)$-加群の直和因子となっている加群のことである.

(ii) Conjecture (iii) の性質をもつ $R(G \times N_G(D))$-加群の有限鎖複体が存在することと同様の性質をもつ $k(G \times N_G(D))$-加群の有限鎖複体が存在することは同値である.

(iii) ここでは, $G$ と $N_G(D)$ の block について述べたが, 「$\mu$ perfect isometry」「derived equivalence」「splendid equivalence」の概念は, 一般の block 間で定義することができる.

Broué's Conjecture も最初の形 Conjecture 6 (i) から Rickard による森田同値の理論の導来圏への拡張を受け, より強い形 (iii) へ変化した. 即ち, 以下の命題が成立する.

**定理 8.** (Broué) Derived Equivalence Conjecture が正しければ Perfect Isometry Conjecture も正しい.

## 3. Relatively Perfect Isometries

Broué's Conjecture が正しいことが確認されている場合の多くは (i) の形か (iii) の形が確認されている. (iii) が確認されている場合, Broué の定理 (定理 8) の証明における議論から, perfect isometry について, 実際は (P1), (P2) より強い条件が成立している. 即ち, (P2) と次の (P3) が成立している.

(P3) $\mu(g,h) \neq 0 \Longrightarrow (g_p, h_p) \in_{G\times N_G(D)} \Delta(D)$.

ここで, $g_p$ は $g$ の $p$-部分, 一般に 群 $G$, $G$ の部分群 $K$, $G$ の元 $g$ に対して, $g \in_G K$ で $g$ の適当な $G$-共役が $K$ に含まれることを表す. (P3) $\Rightarrow$ (P1) が成立することは容易に分かる.

条件 (P2) を一般化するために以下の準備をする.

$P$ を $p$-群, $Q$ を $P$ の正規部分群とする. $\mathrm{Irr}(P)$ の整数係数一次結合の全体, 即ち, $P$ の一般指標の全体を $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(P)$ で表す. このとき, $X(P;Q)$ と $V(P;Q)$ を次のように定義する.

**定義 9.** $X(P;Q) = \{\ \chi \in \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(P) | \chi(g) = 0,\ \forall g \in P \setminus Q\}$, $V(P;Q) = \mathrm{Ind}\uparrow_Q^P (\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(Q))$.

$V(P;Q)$ は $Q$ の一般指標を $P$ へ誘導して得られる $P$ の一般指標の全体である. $X(P;Q)$, $V(P;Q)$ はともに $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(P)$ の $\mathbb{Z}$-部分加群であり, $V(P;Q) \subseteq X(P;Q)$ となることが知られている. さらに次のことも知られている.

**補題 10.** (Robinson [11]) $p^c X(P;Q) \subseteq V(P;Q)$ となる非負整数 $c$ が存在する. 特に, $V(P;Q)$ と $X(P;Q)$ の $\mathbb{Z}$-rank は等しい.

上の補題をふまえ, $P$ とその正規部分群 $Q$ に対し, $c(P;Q)$ を以下のように定義する.

**定義 11.** $P$ を $p$-群, $Q$ を $P$ の正規部分群とする. $p^c X(P;Q) \subseteq V(P;Q)$ となる非負整数 $c$ のうち最小のものを $c(P;Q)$ と書く.

**例 12.** (i) $X(P;\{1\})$ と $V(P;\{1\})$ はともに $\mathbb{Z}$ 上 $P$ の正則表現の指標で生成されるので, $c(P;\{1\}) = 0$ となる. 特に, $P$ が可換であるとき $c(P;[P,P]) = 0$ となる.

(ii) $P = p_+^{1+2}$ とする. このとき, $\psi = (1_{[P,P]}) \uparrow_{[P,P]}^P$ とおき, $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{p-1}$ を $P$ の互いに異なる次数 $p$ の既約指標とする. この記号のもとで $X(P;[P,P])$ は $\mathbb{Z}$ 上 $\psi, \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{p-1}$ で生成され, $V(P;[P,P])$ は $\mathbb{Z}$ 上 $\psi, p\chi_1, p\chi_2, \cdots, p\chi_{p-1}$ で生成されることが容易に分かる. 従って $c(P,[P,P]) = 1$ となる.

**定義 13.** $(g,h)\in G\times H$ に対し, $S_1$, $S_2$ をそれぞれ $C_G(g)$, $C_H(h)$ の Sylow $p$-部分群とする. このとき, $d(g,h)$ を以下で定義する.

$$p^{d(g,h)}=\min\{|S_1||S_2|/|(S_1\times S_2)\cap((Q\times Q)\Delta(P))^{(x,y)}|\ :\ (x.y)\in G\times H\}$$

**注意 14.** $d(g,h)$ は $S_1$, $S_2$ の選び方に依存せず, また, $g$, $h$ をそれぞれ $g$ の $G$-共役, $h$ の $H$-共役でおきかえても同じ値となる. さらに, $|Q|=1$ のとき, $p^{d(g,h)}\geq\max\{|S_1|,|S_2|\}$ であることが容易にわかる.

**定義 15.** $P$ を $p$-群, $Q$ を $P$ の正規部分群とする. $B$, $B'$ をそれぞれ有限群 $G$, $H$ の $p$-block とし, $G$, $H$ の Sylow $p$-部分群はともに $P$ であるとする. $G\times H$ の一般指標 $\mu$ が以下をみたすとき, $\mu$ を $Q$-perfect であるという.

(P'1) $\mu(g,h)\neq 0\Rightarrow(g_p,h_p)\in_{G\times H}(Q\times Q)\Delta(P)$.

(P'2) $g\in_G Q$ かつ $h\notin_H Q$, または, $g\notin_G Q$ かつ $h\in_H Q$ のとき, $\mu(g,h)/p^{d(g,h)}$ は $\frac{1}{p^{c(P;Q)}}R$ の元. そうでないときは $R$ の元.

全単射 $f:B\to B'$ と写像 $\varepsilon:B\to\{\pm1\}$ が存在し,

$$\mu(g,h)=\sum_{\chi\in B}\varepsilon(\chi)\chi(g)f(\chi)(h),\quad(g\in G,h\in H)$$

が $Q$-perfect であるとき, $B$ と $B'$ は $Q$-perfectly isometric であるという.

**注意 16.** (i) $\mu$ が $\{1\}$-perfect であれば, $P$ の任意の正規部分群 $Q$ に対して $Q$-perfect となる.

(ii) 例 12(i) と注意 14 より, $\mu$ が $\{1\}$-perfect ならば $\mu$ は (P2) と (P3) をみたす. 従って, $\{1\}$-perfect isometry ならば perfect isometry である.

(iii) $B$ と $B'$ が splendid equivalent であれば, $B$, $B'$ は $\{1\}$-perfectly isometric である.

(iv) $\mu$ が $p$-permutation かつ $(Q\times Q)\Delta(P)$-射影的 $R(G\times H)$-加群の指標であれば, $\mu$ は (P'1) をみたし, かつ, すべての $(g,h)\in G\times H$ に対して $\mu(g,h)/p^{d(g,h)}\in R$ となる. (前半は [7], IV.7.4, 後半は [10], p.348 と [6], p.143.) しかし, 一般には isometry を与えるであろう $R(G\times H)$-加群 (または, その有限鎖複体) はこの条件を満足せず, その $p^{c(P;Q)}$ 倍の指標を与える加群が $p$-permutation かつ $(Q\times Q)\Delta(P)$-射影的であろうと考えられる.

(v) $x\in P$ に対し, $C_G(x)$, $C_H(x)$ の指標の関係まで含めた isotypy という概念がある. これに対応するものとして, $x\in P\setminus Q$ に対して, $C_G(x)$, $C_H(x)$ の指標の関係を含めた $Q$-isotypy も定義できる.

Broué の Perfect Isometry Conjecture の拡張として, 次の予想を提示する.

**予想 17.** $G$ と $H$ は同じ Sylow $p$-部分群 $P$ をもつ有限群とし, $B$, $B'$ をそれぞれ $G$, $H$ の主 block とする. $\mathcal{F}_G=\mathcal{F}_H$ であれば, $Q\leq Z(P)\cap[P,P]$ をみたす適当な $Q$ に対し, $B$ と $B'$ は $Q$-perfect isometric であり, このときの $Q$-perfect isometry は指標の $p$-defect と $p$-residue を保つように取れる.

**注意 18.** (i) $P$ が可換であるとき, $\mathcal{F}_G=\mathcal{F}_{N_G(P)}$ である. (Burnside の定理) 従って, このとき, (Perfect isometry ではなく $\{1\}$-perfect isometry の意味ではあるが) 上の予想は Broué の Perfect Isometry Conjecture と同じである.

(ii) Perfect Isometry Conjecture (予想 6) では, $\mu$ が主 block 間の perfect isometry で, 単位指標を単位指標に移すものであれば, その isometry は $p$-defect と $p$-residue を保存する.

(iii) 一般の $p$-block $B$ に対しても同様の予想が定式化できる．ただし，Sylow $p$-部分群上の fusion system の代わりに Sylow $B$-subpair 上の fusion system を考えなければならない．

予想 17 は，例えば次の場合に確認されている．

**定理 19.** (Narasaki, Uno [9]) $P = p_+^{1+2}$ のとき，予想 17 は成り立つ．

$P = p_+^{1+2}$ のとき，splendid equivalence が存在する例も多くある．しかし，一般には $\{1\}$-perfect isometry は存在しない．しかし，そのような場合でも $Z(P)$-perfect isometry が存在している．（注：$Z(P)$ は $[P,P]$ と等しく，位数 $p$ の巡回群である．）

$\mathcal{F}$ を $P = p_+^{1+2}$ 上の saturated fusion system とする．Sylow $p$-部分群 $P$ をもつ有限群 $G$ について $\mathcal{F} = \mathcal{F}_G$ であれば，$G$ の $p$-元の $G$-共役類およびその中心化群の構造が定まる．従って，モジュラー表現論の基本的な定理により $G$ の主 block $B_0(G)$ に属する通常既約指標の数 $k(B_0(G))$ とモジュラー既約指標の数 $\ell(B_0(G))$ の差 $k(B_0(G)) - \ell(B_0(G))$ は $\mathcal{F}$ により定まる．実際，この場合，主 block $B_0(G)$ に属し，$d(\chi) = 3$, $d(\chi) = 2$ となる通常既約指標の数をそれぞれ $k_0(B_0(G))$, $k_1(B_0(G))$ とおくと，$k_0(B_0(G))$, $k_1(B_0(G))$ は $\mathrm{Out}(P)$ によって定まり，$\ell(B_0(G))$ は $\mathcal{F}$（即ち，$\mathrm{Out}(P)$ と $|\mathcal{F}^e|$）によって定まる，$p = 3$ のときは以下のようになる．

| Case | $\mathrm{Out}(P)$ | $\lvert\mathcal{F}^e\rvert$ | $k_0(B_0(G))$ | $k_1(B_0(G))$ | $\ell(B_0(G))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 (*) | 0 | 9 | 2 | 1 |
| (2) | 2 (*) | 0 | 6 | 4 | 2 |
| (3) | 2 | 0 | 9 | 1 | 2 |
| (4) | 2 | 1 | 9 | 1 | 3 |
| (5) | 4 (*) | 0 | 6 | 8 | 4 |
| (6) | $2^2$ | 0 | 9 | 2 | 4 |
| (7) | $2^2$ | 1 | 9 | 2 | 6 |
| (8) | $2^2$ | 2 | 9 | 2 | 8 |
| (9) | 8 | 0 | 9 | 4 | 8 |
| (10) | $Q_8$ (*) | 0 | 6 | 10 | 5 |
| (11) | $D_8$ | 0 | 9 | 4 | 5 |
| (12) | $D_8$ | 2 | 9 | 4 | 7 |
| (13) | $D_8$ | 4 | 9 | 4 | 9 |
| (14) | $SD_{16}$ | 0 | 9 | 5 | 7 |
| (15) | $SD_{16}$ | 4 | 9 | 5 | 9 |

Sylow 3-部分群 $P$ が位数 3 の巡回群 $C_3$ の wreath product $C_3 \wr C_3$ のときについては以下のことが知られている．

**例 20.** ([14]) $p = 3$ とする．
(i) $PSL_4(4)$ と $PSU_4(2^2)$ の主 block 間には $\{1\}$-perfect isometry が存在する．
(ii) $PSL_6(2)$ と $PSp_6(2)$ の主 block 間には $Z(P)$-perfect isometry が存在する．

以上の例で適当な $Q$ に対して $Q$-perfect isometry が確認されている場合は，ほとんどの場合，同じ $Q$ に対して $Q$-isotypy も確認されている．他の例については，この報告集収録の Part II および [8] を参照のこと．

## REFERENCES


[1] C. Broto, R. Levi, R. Oliver, *Homotopy equivalences of p-completed classifying spaces of finite groups*, Invent. Math., **151** (2003), 611–664.

[2] C. Broto, R. Levi, R. Oliver, *The homotopy theory of fusion systems*, J. Amer. Math. Soc., **16** (2003), no. 4, 779–856.

[3] M. Broué, *Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées*, in "Représentations Linéaires des Groupes Finis, Luminy, 1988", Astérisque, **181-182** (1990) 61–92.

[4] M. Broué : Equivalences of blocks of group algebras, Finite dimensional algebras and related topics, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Representations of Algebras and Related Topics, Ottawa, 1992 (V.Dlab. L.L.Scott, Ed.), 1–26, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[5] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, "Atlas of finite groups", Claredon Press, 1985.

[6] W. Feit,"The representation theory of finite groups", North Holland, 1982.

[7] H. Nagao, Y. Tsushima, "Representations of Finite Groups", Academic Press, New York, 1987.

[8] R. Narasaki, *Isometries for blocks with T.I. Sylow defect groups*, preprint, 2007.

[9] R. Narasaki, K. Uno, *Principal blocks with extra special defect groups of order* $p^3$, preprint, 2007.

[10] J. Rickard, *Splendid equivalences: Derived categories and permutation modules*, Proc. London Math. Soc.(3), **72** (1996), 331–358.

[11] G. Robinson, *On characters of relatively projective modules*, J. London Math. Soc. (2), **36** (1987), 44–58.

[12] A. Ruiz, A. Viruel, *The classification of p-local finite groups over the extraspecial group of order* $p^3$ *and exponent* $p$, Math. Z., **248** (2004), 45–65.

[13] Y. Usami, *Principal blocks with extra-special defect groups of order* 27, Advanced Studies in Pure Mathematics, **32** Groups and Combinatorics - in memory of Michio Suzuki, (2001), 413–421.

[14] S. Zushi, 位数が $3^4$ の非可換シロー群をもつ有限群のパーフェクトアイソメトリーについて, 大阪教育大学修士論文, 2008.