数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 162-169

Classification of isosceles sets which have the maximum cardinality in 4-dimensional Euclidean space

城戸　浩章 (Hiroaki Kido)
九州大学大学院数理学研究院
(Faculty of Mathematics, Kyushu University)

1 Introduction

$\mathbb{R}^k$ を k 次元ユークリッド空間とする。
$x, y \in \mathbb{R}^k$ を $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k), y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ とするとき、x と y の距離を $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}$ で定める。

Definition 1.1. 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$A(X) = \{d(x, y) | x, y \in X, x \neq y\}$$

とおく。このとき、$|A(X)| = s$ であるならば、X を $\mathbb{R}^k$ における s-distance set と呼ぶ。
　また、2 つの s-distance set が互いに相似である場合は同型であるということにする。

2-distance set の点の個数の最大値は、$\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$ (Kelly [9])、$\mathbb{R}^3$ (Croft [4]) の場合に知られていた。さらに、$k \leq 8$ に対する $\mathbb{R}^k$ の場合は Lisoněk [13] によって与えられ、次のページの Table 1 のような結果が得られている。(坂内-坂内 [1] より抜粋)
　また、$|X| \geq k + 2$ であるならば、$\mathbb{R}^k$ における 2-distance set となる X は有限個であることが Einhorn-Schoenberg [5] により示された。2-distance set の 2 つの距離の比については、Larman-Logers-Seidel [12] により、$|X| > 2k + 3$ であるならば、$\mathbb{R}^k$ における 2-distance set X の 2 つの距離の比は $\sqrt{\alpha - 1} : \sqrt{\alpha}$ となることが示された (ただし、α は $\alpha \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{k}{2}}$ を満たすある整数)。
　一般の s-distance set X については、Bannai-Bannai-Stanton [2] や Blokhuis [3] によって $|X| \leq \binom{k+s}{s}$ という上限が与えられた。また、$|X| \geq 5$ ならば、$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set X は有限個で、$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set の点の個数の最大値は 7 である (Shinohara [14]) ということが知られている。$\mathbb{R}^3$ における 3-distance set については、点の個数の最大値は 12 であり、最大値を与える 3-distance set の存在が同型を除けば一意的であることが Shinohara [15] によって示された。それにより、$\mathbb{R}^3$ における 3-distance set の個数が (同型を除いて) 有限個になるのは点の個数がいくつのときか？という問題については、その答えを満たす最小の値を a とすると、a は $7 \leq a \leq 12$ の範囲にあることが知られている。しかし、これらの結果を除いては s-distance set についての結果はあまり得られていない。

　また、2-distance set を考える際の 1 つのアイデアとして、isosceles set というものがあり、次で定義される。

Table 1: 2-distance set の点の個数の最大値

k	$\binom{k+2}{2}$	2-distance set の点の個数の最大値	最大値を与える 2-distance set の個数
1	3	3	1
2	6	5	1
3	10	6	6
4	15	10	1
5	21	16	1
6	28	27	1
7	36	29	1
8	45	45	≥ 1

Definition 1.2. $\mathbb{R}^k$ において、n 個の点からなる集合を考える。
この集合の任意の 3 点が 2 等辺 3 角形をなしているとき (ここでは、同一直線上の 3 点も 2 等辺 3 角形とみなす)、この集合は n-point isosceles set であるという。

任意の 2-distance set は isosceles set になっていることから、isosceles set は研究されるようになった。

次に、この isosceles set について知られていることをまとめておく。

- $\mathbb{R}^1$ では isosceles set の点の個数の最大値は 3 である。
- $\mathbb{R}^2$ における 7-point isosceles set は存在しない。(Golomb [8], Kelly [9])
- $\mathbb{R}^2$ における 6-point isosceles set は、同型を除けば正 5 角形とその中心の 6 点からなる集合 (次のページの Fig. 1) の唯 1 つに定まる。(Golomb [8], Kelly [9])
- $\mathbb{R}^2$ における 5-point isosceles set は、同型を除けば Fig. 2 の 3 つの集合に限る。(Fishburn [7], Golomb [8])
- $\mathbb{R}^3$ における 9-point isosceles set は存在しない。(Croft [4])
- $\mathbb{R}^3$ における 8-point isosceles set は、同型を除いて Fig. 3 で表される集合の唯 1 つに定まる。(Kido [11])
- $\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set は同型を除いても無限に存在する。

Fig. 1. $\mathbb{R}^2$ における唯 1 つの 6-point isosceles set

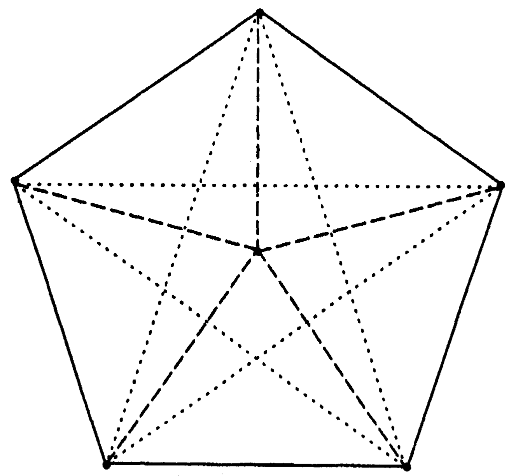


Fig. 2. $\mathbb{R}^2$ における全 3 個の 5-point isosceles set

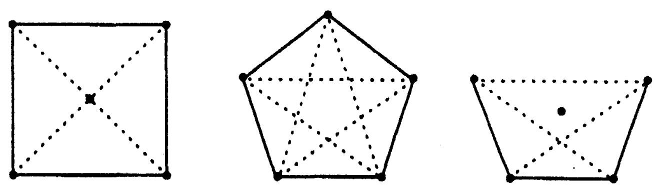
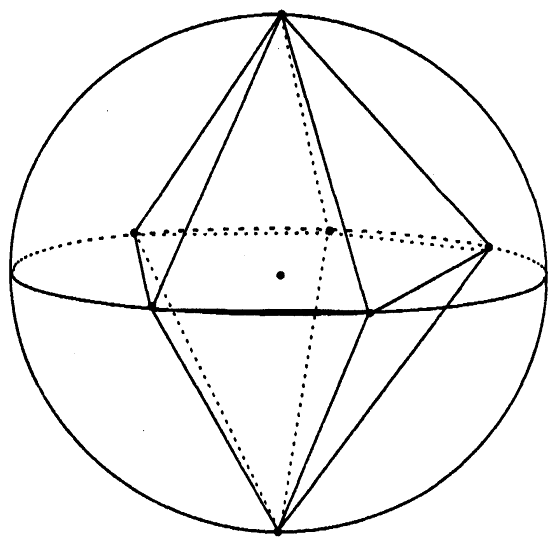


Fig. 3. $\mathbb{R}^3$ における唯 1 つの 8-point isosceles set



今回は、$\mathbb{R}^4$ における isosceles set の点の個数の最大値および分類について考えた。$\mathbb{R}^4$ における isosceles set については、現時点では 11-point isosceles set の構成は可能であることが分かっていて、次の 2 つがその例である。

X' を次の集合とする。

$$X' = \{\mathrm{e}_i + \mathrm{e}_j | 1 \le i, j \le 4,\ i \ne j\} \cup \{-\mathrm{e}_k + (\tfrac{3+\sqrt{5}}{4}, \tfrac{3+\sqrt{5}}{4}, \tfrac{3+\sqrt{5}}{4}, \tfrac{3+\sqrt{5}}{4}) | 1 \le k \le 4\}$$

すると X' は $\mathbb{R}^4$ における唯 1 つの 10-point 2-distance set である (Lisoněk [13] 参照)。X' の 10 点は同一 3 次元球面上にあるので、その中心である $(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10})$ を加えた集合

$$X = X' \cup \{(\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}, \tfrac{5+\sqrt{5}}{10}, \tfrac{5+\sqrt{5}}{10}, \tfrac{5+\sqrt{5}}{10})\}$$

は $\mathbb{R}^4$ における 11-point isosceles set となる。 X' や X は正方形を含んでいることに注意しておく。もう 1 つの 11-point isosceles set の例は、

$$Y = \{(\cos \tfrac{2j}{5}\pi, \sin \tfrac{2j}{5}\pi, 0, 0) | 0 \le j \le 4\} \cup \{(0, 0, \cos \tfrac{2k}{5}\pi, \sin \tfrac{2k}{5}\pi) | 0 \le k \le 4\} \cup \{(0,0,0,0)\}$$

である。Y は正 5 角形を含んでいる。

次の定理と系は本講演における主結果である。

Theorem 1.1. $\mathbb{R}^4$ における 11-point isosceles set は同型を除くと 2 つに分類され、それらは上述の X と Y である。

次の Corollary 1.1 は Theorem 1.1 から分かる命題である。

Corollary 1.1. $\mathbb{R}^4$ における 12-point isosceles set は存在しない。したがって、$\mathbb{R}^4$ における isosceles set の点の個数の最大値は 11 である。

$\mathbb{R}^3$ における Croft の手法 [4] を $\mathbb{R}^4$ に拡張することにより、この Theorem 1.1 の証明を行った。証明の概略を次の節以降で述べる。

2 Notation and a fundamental lemma

次の言葉を導入する。
apex : 3 点以上からなる集合において、残りすべての点から等距離の位置にある点

$\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ を n-point isosceles set とする。$\mathcal{P}$ の点 P_i の"vertex-number" $V(P_i)$ を $V(P_i) = (P_i$ を含む 3 点からなる部分集合をすべて考え、そのうち、P_i が apex となっているものの数 $) = (\angle P_i$ を頂角とする 2 等辺 3 角形の個数$)$
で定義する。
このとき、

$$V(P_1) + \cdots + V(P_n) \ge \binom{n}{3} \tag{1}$$

が成り立つ。

また、点 P_i から $\mathcal{P}$ の残りの点との距離を考える。距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、$\cdots$、距離 l となる点が u 個あったとき $(a, b, \cdots, l$ は互いに異なり、$r \geq s \geq \cdots \geq u$ とする。また、$r + s + \cdots + u = n - 1)$、点 P_i は type$(r, s, \cdots, u)$ の点であるということにする。

P_i が type$(r, s, \cdots, u)$ であるならば、

$$V(P_i) = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \cdots + \binom{u}{2} \tag{2}$$

が成り立つ。

11-point isosceles set の分類を考えるうえで、最も基本的な補題を述べる。

Lemma 2.1. $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_{11}\}$ を $\mathbb{R}^4$ における 11-point isosceles set とし、P_1 が最大の vertex-number であるとする。このとき P_1 の type は、次の Case (A) から Case (H) までのいずれかを満たしている。

Case (A): *(10),*

Case (B): *(9,1), (8,2), (8,1,1),*

Case (C): *(7,3), (7,2,1),*

Case (D): *(6,4), (6,3,1), (5,5), (5,4,1),*

Case (E): *(7,1,1,1),*

Case (F): *(6,2,2),*

Case (G): *(6,2,1,1),*

Case (H): *(6,1,1,1,1).*

Proof: $V(P_1) + \cdots + V(P_{11}) \geq \binom{11}{3} = 165$ が (1) より成り立つので、$V(P_1) \geq 15$ となる。

ゆえに、P_1 の type を $(r, s, \cdots, u)$ とすると、(2) より、

$$\binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \cdots + \binom{u}{2} \geq 15 \tag{3}$$

が成り立ち、さらに、

$$r + s + \cdots + u = 10 \tag{4}$$

も成り立つ。

(3) と (4) の両方を満たすには、$(r, s, \cdots, u)$ は補題にある Case (A) から Case (H) までのいずれかでなければならない。■

3 Sketch of the proof of Theorem 1.1

ポイントとなる補題や命題を以下に紹介することによって（ただし、それらの証明は省略する）、Theorem 1.1 の証明の概略を述べる。

Lemma 2.1 における P_1 の type を Case (A) から Case (H) のそれぞれに場合分けして考察することによって（複雑な議論によるものもある）、次の補題が示される。

Lemma 3.1. $\mathbb{R}^4$ における 11-point isosceles set が存在するならば、11 点のうちのある 4 点は同一円周上にある。■

11 点のうちのある 4 点は同一円周上にあることが分かったので、同一円周上の 4 点の配置を考える。次の補題はそれについてのもので、Croft [4] の Lemma 18 と同様に証明できる。

Lemma 3.2. 4-point isosceles set をなす同一円周上の 4 点は、正方形の 4 点もしくは正 5 角形の 4 点に限る。■

Lemma 3.2 より、正方形の 4 点を含む 11-point isosceles set と正 5 角形の 4 点を含む 11-point isosceles set の分類をそれぞれ考えればよい。

《正 5 角形の 4 点を含む 11-point isosceles set について》

Proposition 3.3. $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ を $\mathbb{R}^4$ における正 5 角形の 4 点を含む n-point isosceles set とし、P_1, P_2, P_3, P_4 は正 5 角形の 4 点であるとする（P_4 と P_1 の間には"gap"がある）。このとき、$P_1 = (\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, 0, 0), P_2 = (-\frac{1}{2}, 0, 0, 0), P_3 = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0), P_4 = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, 0, 0)$ と仮定できる。
（P_2P_3 の中点が原点で、正 5 角形の 1 辺の長さは 1 である。）
すると、残りの点の座標は次のいずれかを満たしていなければならない。
(i) $(0, \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, z, w)$, 但し、$z$ と w は任意,
(ii) 正 5 角形の残りの点である $(0, \frac{5+3\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, 0, 0)$,
(iii) $(0, \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, z, w)$, 但し、$z$ と w は $z^2 + w^2 = (\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}})^2$ を満たしている. ■

Proposition 3.3 で $n = 11$ の場合を考える。残りの点について、(i)~(iii) の条件を加味して考察すると、次の結果を得る。

Lemma 3.4. $\mathbb{R}^4$ において、正 5 角形の 4 点を含む 11-point isosceles set は同型を除くと Theorem 1.1 の Y に限られる。■

《正方形を含む 11-point isosceles set について》

Proposition 3.5. $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ を $\mathbb{R}^4$ における正方形を含む n-point isosceles set とし、P_1, P_2, P_3, P_4 は正方形であるとする。このとき、$P_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0), P_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0), P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0), P_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ と仮定できる。
すると、残りの点の座標は次のいずれかを満たしていなければならない。
(i) $(0, 0, z, w)$, 但し、z と w は任意,
(ii) $(0, -\frac{1}{2}, z, w)$, $(\frac{1}{2}, 0, z, w)$, $(0, \frac{1}{2}, z, w)$, $(-\frac{1}{2}, 0, z, w)$ のうちの 1 つ, 但し、z と w は $z^2 + w^2 = \frac{3}{4}$ を満たしている. ■

Proposition 3.5 で $n = 11$ の場合を考える。残りの点について、(i), (ii) の条件を加味して考察すると、次の結果を得る。

Lemma 3.6. $\mathbb{R}^4$ において、正方形の 4 点を含む 11-point isosceles set は同型を除くと Theorem 1.1 の X に限られる。■

以上の結果をまとめると、Theorem 1.1 を得る。■

References

[1] 坂内英一、坂内悦子、球面上の代数的組合せ理論、シュプリンガー・フェアラーク東京、1999.

[2] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space, II, *Combinatorica* **3** (1983), 147-152.

[3] A. Blockhuis, Few-distance sets, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).

[4] H. T. Croft, 9-point and 7-point configuration in 3-space, *Proc. London. Math. Soc.* (3), **12** (1962), 400-424, Corrigendum. ibid. **13** (1963), 384.

[5] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points I, *Indag. Math.* **28** (1966), 479-488. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)

[6] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points II, *Indag. Math.* **28** (1966), 489-504. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)

[7] P. Fishburn, Isosceles Planar Subsets, *Discrete Comput. Geom.* **19** (1998), 391-398.

[8] M. Golomb, Advanced Problems and Solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **55** (1948), 513-514.

[9] L. M. Kelly, Elementary Problems and Solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947), 227-229.

[10] 城戸浩章、3 次元ユークリッド空間における isosceles 8-point set の分類、数理解析研究所講究録 1394 代数的組合せ論 (2004), 138-151.

[11] H. Kido, Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **27** (2006), 329-341.

[12] D. G. Larman, C. A. Logers, and J. J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean space, *Bull. London Math. Soc.*, **9** (1977), 261-267.

[13] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Comb. Theory*, Ser. A.77 (1997), 318-338.

[14] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **25** (2004), 1039-1058.

[15] M. Shinohara, Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space, preprint.