数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 190-196

On a generalization of a Gelfand pair (S_{2n}, H_n)

水川裕司 (防衛大学校・総合教育学群)

1 (S_{2n}, H_n) について

G を群, H をその部分群とする. このノートでは表現はすべて $\mathbb{C}$ 上のものとする. ξ を H の線型指標とした時, 3つ組 (G, H, ξ) が **twisted Gelfand pair** であるとは, 誘導表現 ξ_H^G が G の表現として無重複なことである. また, とくに ξ が恒等表現の時上記の条件を満たせば (G, H) を単に Gelfand pair という.

S_{2n} を $2n$ 次の対称群とする, この時 S_{2n} の部分群 H_n を

$$H_n = \langle \underbrace{(2i-1, 2i)}_{(\mathbb{Z}2\mathbb{Z})^n-part}, \underbrace{(2j-1, 2j+1)(2j, 2j+2)}_{S_n-part}\ ;\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n-1 \rangle.$$

で定義する. $H_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr S_n$ に注意. この時次の事が知られている.

定理 1.1. [3]
(S_{2n}, H_n) は *Gelfand pair.*

Gelfand pair から帯球関数が定義されるが, このケースの帯球関数は zonal 多項式 [4] の冪和対称関数による展開式に現れることも知られている. そして, ϵ を H_n の S_{2n} に拡張できない一次指標とした時, 次の事も知られている.

定理 1.2. [6]
(S_{2n}, H_n, ϵ) は *twisted Gelfand pair.*

そしてこのケースの帯球関数に相当するものとシューアの Q-関数 [2] との関係も知られている. ここではこれらの環積による一般化を考える.

2 SG_{2n} とその部分群 HG_n ; 両側剰余類

以下では次の群を考える.

- $SG_{2n} := G \wr S_{2n}$

さらに部分群として,

- $HG_n := \{(g_1, g_1, \cdots, g_n, g_n; \sigma); g_i \in G, \sigma \in H_n\}$

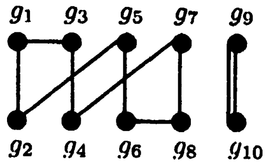
を考える．この組は実は Gelfand pair であり（先の節で述べた組 (S_{2n}, H_n) の Gelfand pair の意味での一般化），その帯球関数と対称関数の多重積との関係も調べられている ([5])．ここでは両側剰余類の記述の仕方を [5] に沿って紹介しよう．

SG_{2n} の元 $x = (g_1, g_2, \cdots, g_{2n}; \sigma)$ に対して，グラフ $\Gamma_x = (\underbrace{V_x}_{\text{vertices}}, \underbrace{E_x}_{\text{edges}})$ を

$$\begin{cases} V_x = \{g_1, g_2, \cdots, g_{2n}\}, \\ E_x = \{\{g_{2i-1}, g_{2i}\}, \{g_{\sigma(2i-1)}, g_{\sigma(2i)}\}; 1 \leq i \leq n\}. \end{cases}$$

で定義する．わかりにくいので例を見てみよう．

例 2.1. $x = (g_1, g_2, \cdots, g_{10}; (1,4,3)(2,7)(5,8)(9,10))$

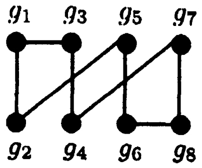
$\Gamma_x =$ 

つまり添え字だけに注目すると，まずは 1 と 2，3 と 4，5 と 6 ･･･ をつないで，そのあと $\sigma(1)$ と $\sigma(2)$，$\sigma(3)$ と $\sigma(4)$，$\sigma(5)$ と $\sigma(6)$ ･･･ をつないで作るグラフを考える，という事である．

注意したい事はグラフの連結成分に含まれる辺の数は必ず偶数である事と各連結成分は輪状になっている，という事である．

さて，以下でこのグラフから定義される量をいくつか定義する．ただし，細かく書くと複雑なので適当に具体例を交えて説明する．

定義 2.2.
• L : **回路** (Γ_x の連結成分をここではこのように呼ぶ事にする) とする．
この回路に沿って次のように積を定義する．

$L =$  $\rightarrow$ $p(L) = g_1^{-1} g_2 g_5^{-1} g_6 g_8^{-1} g_7 g_4^{-1} g_3$

• 上の $p(L)$ を長さ 4(=回路の辺の数の半分) の**回路積**と呼ぶ．

この定義だと，起点の選択や回り方に任意性が生じるが，両側剰余類を考える上では問題は生じない，つまりどこか好きな起点を選びその元を逆元に置き換え，好きな回り方で，一つ置きに逆元に置き換えながら積を作ったモノをすべて回路積と呼ぶ事にする．この回路積を用いて両側剰余類が決定されるのだが，そのために記号を準備しておく．

$$G_* : G \text{ の共役類},$$

$$G_{**} = \{C \cup C^{-1} \ ; \ C \in G_*\}$$

例を見ておく．

例 2.3.

$$G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$$

$$G_{**} = \{\{1\}, \{a, a^5\}, \{a^2, a^4\}, \{a^3\}\}$$

さて，回路積から分割の組を次のように作る事にする．

定義 2.4. $x \in SG_{2n}$，$R \in G_{**}$ とする．

$$m_k^x(R) = |\{L\ :\Gamma_x\text{の回路} \mid p(L) \in R, |L| = k\}|$$

と置いた時，分割を

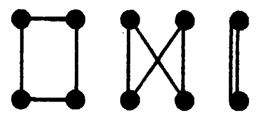
$$\rho^x(R) := 1^{m_1^x(R)} 2^{m_2^x(R)} \ldots$$

で定義し，これらを纏めて

$$\underline{\rho}(x) := (\rho^x(R); R \in G_{**}) :$$

と置いて x の**回路型**と呼ぶ．

例 2.5.
$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{-1, 1\}$ のとき，$G_{**} = \{\{-1\}, \{1\}\}$ である．
$x = (1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, (23)(5678)(9, 10))$ と置くと，グラフは

$\Gamma_x =$ 

であり，$p(L_1) = 1$，$p(L_2) = 1(-1)(-1)(-1) = -1$，$p(L_3) = 1$ である．したがって x の回路型は

$$\underline{\rho}(x) = (\rho^x(\{1\}), \rho^x(\{-1\})) = ((2, 1), (2))$$

となる．

以上の準備で次が言える．

定理 2.6.

(1) $\underline{\rho}(x) = \underline{\rho}(y) \Leftrightarrow x \in HG_n y HG_n$.

(2) $\underline{\rho}(x) = \underline{\rho}(x^{-1})$.

(3) (SG_{2n}, HG_n) は *Gelfand pair*.

上の定理の (3) は (2) より従う．

注意 2.7. 両側剰余類は大きさ n の $|G_{**}|$-個の分割の組と 1 対 1 に対応する．

$$HG_n \backslash SG_{2n} / HG_n \leftrightarrow \{\underline{\rho} \mid |G_{**}| - \text{tuple of partitions}\ , |\underline{\rho}| = n\}.$$

ただし，$\underline{\rho} = (\rho(R) : R \in G_{**})$ に対して，大きさを $|\underline{\rho}| = \sum_{R \in G_{**}} |\rho(R)|$ で定義する．

3 SG_{2n} とその部分群 HG_n；既約分解

3.1 Representation Theory of SG_n

簡単に環積の表現の復習をしておく．

G^*: G の既約指標全体（指標，表現，表現空間はあえて混同する），対称群に対しては $S_n^* = \{S^\lambda\ ;\ \lambda \vdash n$, Young diagram$\}$ としておく．
$\gamma \in G^*$ にたいして，

$$S_\gamma^\lambda := \gamma^{\otimes n} \otimes S^\lambda,$$

とおく，するとここには $G \wr S_n$ の作用が，

$$(g_1, \cdots, g_n; \sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w = g_1 v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes g_n v_{\sigma^{-1}(n)} \otimes \sigma w,$$

で定義できる．しかも，

命題 3.1. S_γ^λ は $G \wr S_n$ の既約表現を与える．

が成り立つ．さて自然数の組，

$$\underline{n} = (n_\gamma | \gamma \in G^*) \in \mathbb{N}_0^{|G^*|}, \quad |\underline{n}| = \sum_{\gamma \in G^*} n_\gamma$$

に対して，

$$G \wr S_{\underline{n}} := \prod_{\gamma \in G^*} G \wr S_{n_\gamma} (\text{惰性群})$$

と置く．環積の既約表現は次のようになる．

命題 3.2.

$$(G \wr S_n)^* = \{ \bigotimes_{\gamma \in G^*} S_\gamma^{\lambda(\gamma)} \uparrow_{G \wr S_{\underline{n}}}^{G \wr S_n} ; |\underline{n}| = n,\ \lambda(\gamma) \vdash n_\gamma \}.$$

また，上にあらわれる表現はすべて非同値である．

以下

$$S(\lambda(\gamma); \gamma \in G^*) = \bigotimes_{\gamma \in G^*} S_\gamma^{\lambda(\gamma)} \uparrow_{G \wr S_{\underline{n}}}^{G \wr S_n}.$$

と置こう．

3.2 (SG_2, HG_1)

まずは $n = 1$ の場合ペアを考える．この場合の解析が一般の場合の既約表現を決定する上での重要なデータを与える．

次のように設定する．

- ξ は G の線型指標.
- $\hat{\xi}$ を $(g, g; \sigma) \mapsto \xi(g)$ なる SG_{2n} の (既約) 表現.
- $e_\xi = \frac{1}{|HG_1|} \sum_{x \in HG_1} \hat{\xi}(x^{-1})x$.
- $\mathcal{H}^\xi(SG_2, HG_1) = e_\xi \mathbb{C} SG_2 e_\xi$.

このとき有限群のユニタリ表現の性質やそれらの行列要素等を用いた指標の計算により以下に述べる命題たちが同時に得られる.

命題 3.3. $(SG_2, HG_1, \hat{\xi})$ は *twisted Gelfand pair* である.

次の命題はフロベニウス-シューアの定理 (例えば [1]) の twist 版と考えられる.

命題 3.4. χ を G の既約指標とする. このとき

$$\nu_2^\xi(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2)\xi(g) = -1, 0, 1.$$

既約分解は次のようになる.

命題 3.5.

$$\begin{aligned}\xi_{HG_1}^{SG_2} = \bigoplus_{\substack{\chi = \xi \otimes \overline{\chi} \\ \nu_2^\xi(\chi) = 1}} (\chi \otimes \chi \otimes 1) \uparrow_{SG_2}^{SG_2} \oplus \bigoplus_{\substack{\chi = \xi \otimes \overline{\chi} \\ \nu_2^\xi(\chi) = -1}} (\chi \otimes \chi \otimes \mathrm{sgn}) \uparrow_{SG_2}^{SG_2} \\ \oplus \bigoplus_{\substack{\chi \neq \xi \otimes \overline{\chi} \\ \nu_2^\xi(\chi) = 0}} (\chi \otimes (\xi \otimes \overline{\chi})) \uparrow_{SG_1 \times SG_1}^{SG_2}\end{aligned}$$

ヘッケ環の基底について,

$$K_{(g_1, g_2; \sigma)} = \sum_{x, y \in HG_1} \overline{\xi(xy)} x (g_1, g_2; \sigma) y.$$

とすると, $\mathcal{H}^\xi(SG_2, HG_1) = \mathrm{Span}\langle K_{(1,g;1)} | g \in G \rangle$ だが, さらに次の命題が成り立つ.

命題 3.6. $K_{(1,g;1)} = 0 \Leftrightarrow \xi(g) = -1$ and $C_g = C_{g^{-1}}$
(C_g は g の共役類).

この命題によって両側剰余類から来るヘッケ環 $\mathcal{H}^\xi(SG_2, HG_1)$ の基底を完全に記述できた事になる. 以上の系として次のような指標と共役類の個数の関係も得られる.

系 3.7.

$$\begin{aligned}&|\{\chi | \chi = \overline{\chi} \otimes \xi\}| + \frac{1}{2} |\{\chi | \chi \neq \overline{\chi} \otimes \xi\}| \\ &\qquad = |G_{**}| - |\{C | C = C^{-1}, \xi(C) = -1\}|\end{aligned}$$

これは ξ が自明な場合, 実の指標と実の共役類の個数が等しい, という事実からすぐに従う事に注意. で与えられている, という事である. 以下に具体例を二つ乗せておく.

例 3.8. $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ として，ξ を下の指標表から χ_2 にとる．C_i は G_*，R_i は G_{**} の元である．

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8		
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_7	$\nu_2^1(\chi)$	$\nu_2^\xi(\chi)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
χ_2	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	0
χ_3	2	2	2	-1	-1	0	0	0	1	-1
χ_4	3	3	-1	0	0	1	-1	1	1	0
χ_5	3	3	-1	0	0	-1	1	-1	1	0
χ_6	2	-2	0	-1	1	0	$\sqrt{2}i$	$-\sqrt{2}i$	0	-1
χ_7	2	-2	0	-1	1	0	$-\sqrt{2}i$	$\sqrt{2}i$	0	-1
χ_8	4	-4	0	1	-1	0	0	0	1	-1

上の表から以下の関係が見て取れる．

$$\chi_j = \xi \otimes \overline{\chi_j}\ (j = 3,6,7,8),\ \chi_1 = \xi \otimes \overline{\chi_2},\ \chi_4 = \xi \otimes \overline{\chi_5}$$

したがって系 3.7 の左辺は $4 + \frac{1}{2}4 = 6$ であり，左辺は $7 - 1 = 6$ となりこの二つが等しい事がわかる．

例 3.9. $G = Q_8$, $\xi = \chi_i$ $(i = 2,3,4)$. これは $\nu_2^1(\chi) = -1$ が出てくる例である．

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5		
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	ν_2^1	ν_2^ξ
χ_1	1	1	1	1	1	1	0
χ_2	1	-1	1	1	-1	1	0
χ_3	1	1	1	-1	-1	1	0
χ_4	1	-1	1	-1	1	1	0
χ_5	2	0	-2	0	0	-1	1

3.3 主定理

HG_n の線型指標として，

$$\hat{\xi}(g_1, g_1, \cdots, g_n, g_n; \sigma) = \xi(g_1 g_2 \cdots g_n),$$

を考える．主定理を述べるための記号の準備として，$|G^*|$ 個の分割の組

$$P(\underline{n}) = \{(\lambda(\gamma); \gamma \in G^*); \sum_{\gamma \in G^*} |\lambda(\gamma)| = n\}$$

とその部分集合，

$$P_\xi(\underline{n}) = \{(\lambda(\gamma); \gamma \in G^*); (**)\} \subset P(\underline{2n})$$

を考える．ただし $(**)$ は次のようにする：

$$(**): \begin{cases} \gamma = \overline{\gamma} \otimes \xi & \Rightarrow \begin{cases} \lambda(\gamma) & : \text{even partition} \quad (\nu_2^{\xi}(\chi) = 1) \\ \lambda(\gamma) & : (\text{even partition})' \quad (\nu_2^{\xi}(\chi) = -1), \end{cases} \\ \gamma \neq \overline{\gamma} \otimes \xi & \Rightarrow \lambda(\gamma) = \lambda(\overline{\gamma} \otimes \xi).\text{''} \end{cases}$$

ここで even partition とは各成分が偶数からなる分割で「′」は分割の転置の意味である．この時，次元の計算と，不変元の存在を示す事により，次の定理が得られる．

定理 3.10.

$$\hat{\xi}_{HG_n}^{SG_{2n}} = \bigoplus_{(\lambda(\gamma);\gamma \in G^*) \in P_{\xi}(\underline{n})} S(\lambda(\gamma); \gamma \in G^*)$$

上の分解は無重複，つまり (SG_{2n}, HG_n) は *twisted Gelfand pair* である．

先ほどの二つの例では次のようになる．

例 3.11. $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$:

$$\hat{\xi}_{HG_n}^{SG_{2n}} = \bigoplus S(\lambda^1, \lambda^1, (2\lambda^2)', \lambda^3, \lambda^3, (2\lambda^4)', (2\lambda^5)', (2\lambda^6)')$$

$$1_{HG_n}^{SG_{2n}} = \bigoplus S(2\lambda^1, 2\lambda^2, 2\lambda^3, 2\lambda^4, 2\lambda^5, \lambda^6, \lambda^6, 2\lambda^7)$$

例 3.12. $G = Q_8$:

$$1_{HG_n}^{SG_{2n}} = \bigoplus (2\lambda^2, 2\lambda^2, 2\lambda^3, 2\lambda^4, (2\lambda^5)')$$

$$(\chi_2)_{HG_n}^{SG_{2n}} = \bigoplus (\lambda^1, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^2, 2\lambda^3).$$

また両側剰余類より来るヘッケ環の基底も次の定理より記述できる．

定理 3.13.

$$e_{\xi} x e_{\xi} = 0 \Leftrightarrow \exists R \in G_{**} \cap G_* \text{ s.t. } \xi(g) = -1 (g \in R) \text{ and } \rho^x(R) \neq \emptyset$$

参考文献

[1] C.W.Curtis and I.Reiner, *Methods of Representation Theory Vol.1,* Wiley,New York,1981.

[2] P.N.Hoffman and J.F.Humphreys, *Projective Representations of Symmetric Groups,* Oxford Science Pub, 1995.

[3] A.T.James, Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices", Annals of Math. vol.74,pp.475-501,1961.

[4] I.G.Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomils 2nd.ed.,* Oxford Science Pub, 1995.

[5] H. Mizukawa, Zonal polynomials for wreath products, J. Alg. Comb. 25, pp. 189-215, 2007.

[6] J.R.Stembridge, On Schur's Q-functions and the primitive idempotents of a commutative Hecke algebra", J. Alg. Comb. 1 pp.71-95 ,1992.