

# 海洋内部重力波のエネルギースペクトル形成機構

Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute  
Yuri V. Lvov  
Naoto Yokoyama (横山直人)\*

## 1 はじめに

連続的に安定成層した海洋の内部では、浮力を復元力とする内部重力波がエネルギースペクトルの慣性小領域を支配する。内部重力波のエネルギースペクトルでは、系の持つ異方性のために単純な次元解析では得られない。これまでは、Garrett–Munk スペクトル (GM スペクトル) と呼ばれる 1970 年代に北大西洋で観測されたスペクトルが、この系の“普遍”平衡スペクトルモデルとされてきた (Garrett and Munk, 1979)。しかしながら、数多く観測がなされるようになると GM スペクトルとは異なる多様なスペクトル形が得られるようになった (Lvov *et al.*, 2004)。

エネルギースペクトルを決定する波数間の非線形相互作用は、他の波動乱流系と同様に、弱非線形性を仮定した弱乱流理論に基づいて得られる運動論的方程式によって記述される。内部重力波系の運動論的方程式は、3 波共鳴相互作用によって実質的なエネルギー輸送が起こることを示している。

観測されたスペクトルの多様性は、誘導拡散型の共鳴相互作用を通して系の最大スケールの波動が慣性小領域を支配することによって形成される準定常状態という運動論的方程式に基づく説明がなされてきた (McComas, 1977; McComas and Müller, 1981a,b)。しかしながら、McComas and Müller (1981b) の理論はエネルギースペクトルの多様性は説明するものの、観測結果との一致はあまりよくない。

本研究では、McComas らと同様に、弱乱流理論によって得られる運動論的方程式に基づいて波数間の共鳴相互作用を考える。エネルギースペクトルの自己相似性を仮定して、系の持つ最大スケールとともに最小スケールも考慮し、自己相似形の持つ各べき指数に対して運動論的方程式に現れる衝突積分の収束・発散性を調べた。衝突積分が大小のスケールでともに収束するとき、新しい定常解を数値的に得た。一方で、衝突積分が大小のスケールでともに発散するとき、それらのスケールの波動と慣性小領域内の波動の非局所的な共鳴相互作用の準平衡状態を考えることによって、観測結果とよく一致する運動論的方程式の準定常解の存在するべき指数領域を示した。

## 2 弱乱流理論

### 2.1 運動論的方程式の導出

鉛直座標,  $z$ , に代わり海水の密度,  $\rho$ , を独立変数とする半 Lagrangian 座標系である密度座標系を用いる。密度座標系で静水圧平衡を仮定すると、非圧縮・連続成層流体の運

\*e-mail: yokoyan@rpi.edu

動方程式は、鉛直位置,  $z$ , 等密度面内の水平速度,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ , この座標系での圧力に相当する Montgomery ポテンシャル,  $M = P + \rho g z$ , を用いて,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{u} \right) = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \mathbf{u}^\perp + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\nabla M}{\rho_0} = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \rho} - g z = 0 \quad (1c)$$

と表される. ここで,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  は水平勾配演算子であり,  $f, \rho_0, g$  はそれぞれコリオリパラメタ, 平均密度, 重力加速度である.

成層関数を

$$\Pi = \rho \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2}$$

とすると, Lagrangian 保存量であるポテンシャル渦度は次のように表される.

$$q = \frac{f + \nabla^\perp \times \mathbf{u}}{\Pi}. \quad (2)$$

ここで,  $\nabla^\perp = (-\partial/\partial y, \partial/\partial x)$  は 2次元回転演算子である. ポテンシャル渦度の初期条件として,

$$q = q_0(\rho) = \frac{f}{\Pi_0(\rho)} \quad (3)$$

を用いる. ここで,  $\Pi_0(\rho) = -g/N(\rho)^2$  は平均成層であり, 浮力 (Brunt-Väisälä) 振動数,  $N(\rho)$ , は  $N_0$  で一定とする. 等密度面内速度場は, ポテンシャル,  $\phi$ , と流線関数,  $\psi$ , を用いて  $\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla^\perp \psi$  と書くことができる. このとき, 流線関数は, ポテンシャル渦度の定義 (2) より  $f + \nabla^2 \psi = q_0 \Pi$  を満足するように決定される. そうすると, 支配方程式 (1) は,

$$\mathcal{H} = \int \left( -\frac{1}{2} \Pi |\nabla \phi + \nabla^\perp \nabla^{-2} (q_0 \Pi - f)|^2 + \frac{g}{2} \left| \int^\rho \frac{\Pi - \Pi_0}{\rho'} d\rho' \right|^2 \right) dx d\rho \quad (4)$$

を Hamiltonian として, 成層関数のゆらぎ,  $\Pi' (= \Pi - \Pi_0)$ , と水平速度ポテンシャル,  $\phi$ , を正準変数とする正準方程式,

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi'}, \quad (5)$$

と書き換えることができる. ここで,  $\delta/\delta \phi, \delta/\delta \Pi'$  は, それぞれ,  $\phi, \Pi'$  による汎関数微分を表す.

海水の密度変化は平均密度  $\rho_0$  と比べて十分小さいとし, Boussinesq 近似を用いる. 成層関数のゆらぎと水平速度ポテンシャルの Fourier 成分の線形結合

$$a(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega}{2g}} \frac{N_0}{|\mathbf{k}|} \tilde{\Pi}'(\mathbf{p}) - i \sqrt{\frac{g}{2\omega}} \frac{|\mathbf{k}|}{N_0} \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \quad (6)$$

で変数  $a(\mathbf{p})$  を定義する. ここで波数  $\mathbf{p}$  は, 等密度面内 2 次元波数,  $\mathbf{k}$ , と密度方向の波数,  $m$ , からなる 3 次元ベクトルである. 振動数,  $\omega(\mathbf{p})$ , は線形分散関係,

$$\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{f^2 + \frac{g^2}{\rho_0^2 N_0^2} |\mathbf{k}|^2}, \quad (7)$$

で与えられる. デカルト座標の鉛直波数,  $k_z$ , と密度座標の密度波数,  $m$ , は  $m = -g/(\rho_0 N_0^2) k_z$  の関係にある. このとき, Hamiltonian (4) は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \int \omega(\mathbf{p}) |a(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} \\ & + \int ((V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}} a(\mathbf{p}) a^*(\mathbf{p}_1) a^*(\mathbf{p}_2) + \text{c.c.}) + (U_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} a(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_2) + \text{c.c.})) d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \end{aligned} \quad (8)$$

と書くことができ, 支配方程式は正準方程式,

$$i \frac{\partial a(\mathbf{p})}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*(\mathbf{p})}, \quad (9)$$

で表される (Lvov and Tabak, 2004). また, 行列要素は以下のように与えられる.

$$V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N_0}{4\sqrt{2g}} \frac{1}{|\mathbf{k}| |\mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2|} (I_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} + J_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}} + K_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}), \quad (10a)$$

$$U_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N_0}{4\sqrt{2g}} \frac{1}{|\mathbf{k}| |\mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2|} (I_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} + J_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{-\mathbf{p}} + K_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}), \quad (10b)$$

$$I_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = -\sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega}} |\mathbf{k}|^2 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - ((0, 1, 2) \rightarrow (1, 2, 0)) - ((0, 1, 2) \rightarrow (2, 0, 1)), \quad (10c)$$

$$J_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}} = \frac{f^2}{\sqrt{\omega \omega_1 \omega_2}} (|\mathbf{k}|^2 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - ((0, 1, 2) \rightarrow (1, 2, 0)) - ((0, 1, 2) \rightarrow (2, 0, 1))), \quad (10d)$$

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = & -if \left( \sqrt{\frac{\omega}{\omega_1 \omega_2}} (|\mathbf{k}_1|^2 - |\mathbf{k}_2|^2) \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2^\perp \right. \\ & \left. + ((0, 1, 2) \rightarrow (1, 2, 0)) + ((0, 1, 2) \rightarrow (2, 0, 1)) \right). \end{aligned} \quad (10e)$$

アクション密度関数,  $n(\mathbf{p})$ , は系の一様性により  $\langle a(\mathbf{p}_i) a^*(\mathbf{p}_j) \rangle = n(\mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$  で定義される. ここで  $\langle \cdot \rangle$  はアンサンブル平均を表す. また, アクション密度関数とエネルギースペクトル密度関数は  $n(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p})/\omega(\mathbf{p})$  と関係づけられている.

非線形性は十分弱いと仮定して乱雑位相近似を行いと、内部重力波のエネルギー輸送を記述する運動論的方程式、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial t} = 2\pi \int d\mathbf{p}_{12} & (|V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}}|^2 (n(\mathbf{p}_1)n(\mathbf{p}_2) - n(\mathbf{p})(n(\mathbf{p}_1) + n(\mathbf{p}_2))) \delta_{0-1-2}^{\mathbf{p}} \delta_{0-1-2}^{\omega} \\ & - |V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}}^{\mathbf{p}_2}|^2 (n(\mathbf{p}_2)n(\mathbf{p}) - n(\mathbf{p}_1)(n(\mathbf{p}_2) + n(\mathbf{p}))) \delta_{0-1+2}^{\mathbf{p}} \delta_{0-1+2}^{\omega} \\ & - |V_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2}|^2 (n(\mathbf{p})n(\mathbf{p}_1) - n(\mathbf{p}_2)(n(\mathbf{p}) + n(\mathbf{p}_1))) \delta_{0+1-2}^{\mathbf{p}} \delta_{0+1-2}^{\omega}), \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。このような運動論的方程式の導出は弱乱流理論と呼ばれ、Navier-Stokes 乱流の修正 0-4 次キュムラント近似に相当する。

運動論的方程式 (11) は、実質的な波数間のエネルギー輸送が 3 波共鳴、

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \omega = \omega_1 + \omega_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{p} = -\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \omega = -\omega_1 + \omega_2 \end{cases}, \quad \text{または} \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \\ \omega = \omega_1 - \omega_2 \end{cases} \quad (12)$$

を満たす波数間でのみ行われることを表す。

### 3 内部重力波乱流の自己相似的挙動

#### 3.1 運動論的方程式の縮約

内部重力波乱流の自己相似的なスペクトルの性質を調べるために、振動数はコリオリパラメタよりも十分大きいとする。すなわち、

$$\omega = \frac{g}{\rho_0 N_0} \frac{|k|}{|m|} \quad (13)$$

とし、コリオリ力を無視する。

このとき、共鳴条件 (12) により、 $m_1$  と  $m_2$  は  $k = |k|$ ,  $k_1 = |k_1|$ ,  $k_2 = |k_2|$ , および  $m$  の関数として、

$$\begin{cases} m_1 = \frac{m}{2k} \left( k + k_1 + k_2 + \sqrt{(k + k_1 + k_2)^2 - 4kk_1} \right) \\ m_2 = m - m_1 \end{cases}, \quad (14a)$$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{m}{2k} \left( k - k_1 - k_2 - \sqrt{(k - k_1 - k_2)^2 + 4kk_1} \right) \\ m_2 = m - m_1 \end{cases}, \quad (14b)$$

$$\begin{cases} m_2 = -\frac{m}{2k} \left( k - k_1 - k_2 + \sqrt{(k - k_1 - k_2)^2 + 4kk_2} \right) \\ m_1 = m + m_2 \end{cases}, \quad (14c)$$

$$\begin{cases} m_2 = -\frac{m}{2k} \left( k + k_1 - k_2 + \sqrt{(k + k_1 - k_2)^2 + 4kk_2} \right) \\ m_1 = m + m_2 \end{cases}, \quad (14d)$$

$$\begin{cases} m_1 = -\frac{m}{2k} \left( k - k_1 - k_2 + \sqrt{(k - k_1 - k_2)^2 + 4kk_1} \right) \\ m_2 = m + m_1 \end{cases}, \quad (14e)$$

$$\begin{cases} m_1 = -\frac{m}{2k} \left( k - k_1 + k_2 + \sqrt{(k - k_1 + k_2)^2 + 4kk_1} \right) \\ m_2 = m + m_1 \end{cases} \quad (14f)$$

と表すことが出来る。

等密度面 (水平) 方向は統計的に等方とし、運動論的方程式 (11) を等密度面内の方向について積分すると、

$$2\pi k \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial t} = \int T_3(k_1, k_2; k, m) dk_1 dk_2 \quad (15)$$

と書ける。輸送関数  $T_3(k_1, k_2; k, m)$  は式 (14) の 6 種の共鳴に対応する 6 項  $R_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}(a)}$ ,  $R_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}(b)}$ ,  $R_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}}^{\mathbf{p}(c)}$ ,  $R_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}}^{\mathbf{p}(d)}$ ,  $R_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}(e)}$ ,  $R_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}(f)}$  を用いて

$$T_3(k_1, k_2; k, m) = R_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}(a)} + R_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}(b)} - R_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}}^{\mathbf{p}(c)} - R_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}}^{\mathbf{p}(d)} - R_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}(e)} - R_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}(f)}$$

と表される。例えば、

$$R_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}} = 2\pi \frac{kk_1k_2}{S(k, k_1, k_2)} \frac{|V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}}|^2}{|\Omega_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}}|} (n(\mathbf{p}_1)n(\mathbf{p}_2) - n(\mathbf{p})(n(\mathbf{p}_1) + n(\mathbf{p}_2)))$$

である。 $S(k, k_1, k_2)$  は  $k, k_1, k_2$  によって構成される三角形の面積である。また、

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}}(m_1) &= \frac{k}{m} - \frac{k_1}{|m_1|} - \frac{k_2}{|m - m_1|}, \\ \Omega_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}'} &= \left. \frac{\partial \Omega_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}}(m_1)}{\partial m_1} \right|_{m_1 = m_1^\dagger(k_1, k_2)} \end{aligned}$$

であり、 $m_1^\dagger(k_1, k_2)$  は式 (14) の共鳴条件によって決定される。

アクシオン密度関数が自己相似的、 $n(\mathbf{p}) \propto |k|^{-a}|m|^{-b}$ 、であると仮定すると、式 (15) の右辺の衝突積分  $I(\mathbf{p})$  は次のような自己相似性を持つ。

$$I(\alpha k, \beta m) = \alpha^{-2a+4} \beta^{-2b+1} I(k, m).$$

海洋内部重力波の普遍スペクトルと考えられている GM スペクトルは、

$$E(\omega, m) \propto \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2 - f^2}} \frac{1}{m^2 + m_0^2}$$

の形を持つ (Garrett and Munk, 1979)。ここで、 $m_0$  は海洋の鉛直方向の境界条件によって決定される大きな波長に対応する波数である。GM スペクトルは高水平・高密度波数領域で  $a = 4, b = 0$  に相当する。GM スペクトルの高波数漸近形、 $n(\mathbf{p}) \propto |k|^{-4}$ 、は図 1 のような輸送関数を持つ。この輸送関数は、 $k_1, k_2$  が小さい領域で正、逆に大きい領域で負となっている。すなわち、スペクトルが GM スペクトルの高波数漸近形を持つとき、エネルギーは大きなスケールから小さなスケールへと輸送される。

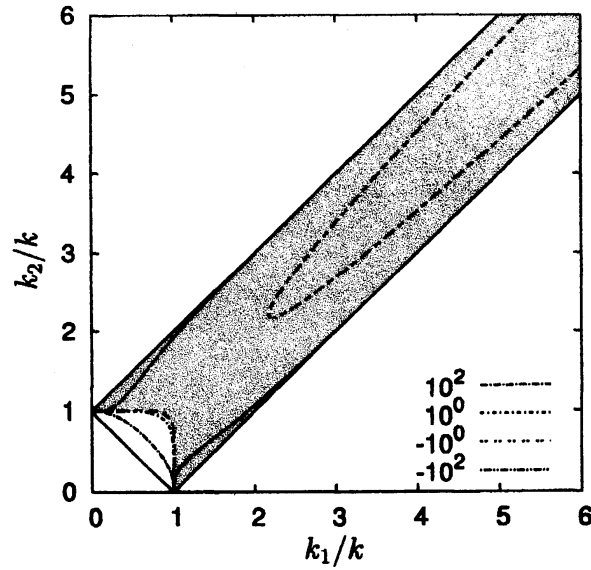


図 1:  $n(p) \propto |k|^{-4}$  (GM スペクトルの高波数漸近形) に対する輸送関数. 白の領域が正, 網掛けの領域が負の領域を表す. 三角不等式によって輸送関数は短冊状領域の内部でのみ定義される.

## 3.2 衝突積分の収束・発散

### 3.2.1 赤外波数の寄与

赤外波数  $k_1 \rightarrow 0$  からの積分への寄与を考える. そのとき, 式 (14) の共鳴条件は,

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow 2m, m_2 \rightarrow -m \\ \omega_1 \ll \omega, \omega_2 \sim \omega \end{cases}, \quad (16a)$$

$$\begin{cases} -m_1 \ll m, m_2 \sim m \\ \omega_1 \ll \omega, \omega_2 \sim \omega \end{cases}, \quad (16b)$$

$$\begin{cases} m_1 \ll m, m_2 \sim -m \\ \omega_1 \sim 2\omega, \omega_2 \sim \omega \end{cases}, \quad (16c)$$

$$\begin{cases} -m_1 \ll m, m_2 \sim -m \\ \omega_1 \sim 2\omega, \omega_2 \sim \omega \end{cases}, \quad (16d)$$

$$\begin{cases} -m_1 \ll m, m_2 \sim m \\ \omega_1 \ll \omega, \omega_2 \sim \omega \end{cases}, \quad (16e)$$

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow -2m, m_2 \rightarrow -m \\ \omega_1 \ll \omega, \omega_2 \sim \omega \end{cases} \quad (16f)$$

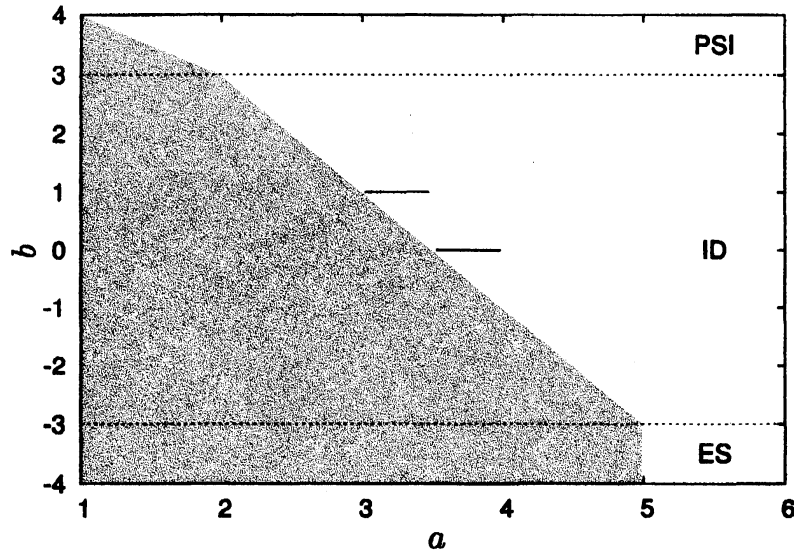


図 2: 赤外波数の寄与による衝突積分の収束性. 衝突積分は白の指数領域で発散し, 網掛けの指数領域および  $b = 0, 1$  上の線分で収束する.  $-3 < b < 3$  の指数のとき誘導拡散 (ID) が支配的であり,  $b < -3, b > 3$  のとき, それぞれ, 弾性散乱 (ES), 低調波不安定 (PSI) が支配的である.

となる. 式 (16b, 16e) は誘導拡散 (Induced Diffusion, ID), 式 (16c, 16d) は低調波不安定 (Parametric Subharmonic Instability, PSI), 式 (16a, 16f) は弾性散乱 (Elastic Scattering, ES) といった McComas and Bretherton (1977) による分類に合致する.

輸送関数を  $k_1 \rightarrow 0$  近傍で,

$$k_1 = kx, \quad k_2 = k(1+y)$$

と変数変換する. ここで,  $x > 0, -x < y < x$  であり, 微小量  $\epsilon$  を用いて  $x, y = O(\epsilon)$  とする. スペクトルが全波数領域で自己相似的,  $n(p) \propto k^{-a}|m|^{-b}$ , であるとし,  $\epsilon$  の次数で展開すると,  $-3 < b < 3$  のとき, 誘導拡散 (16b, 16e) が衝突積分の最低次を与える. 輸送関数は,

$$\begin{aligned} T_3(k_1, k_2; k, m) &\sim R_{p_1, p_2}^p - R_{p, p_1}^{p_2} \\ &\propto k^{-2a+2}|m|^{-2b+1} \frac{x^{-a-(b+1)/2}y}{\sqrt{(x+y)(x-y)}} \\ &\quad \times (-2ay^2 - b((1-b)y(x+y) - 2x(x-y)) + b(b+1)xy). \end{aligned}$$

と書くことができる. このとき  $T_3(k_1, k_2; k, m) = O(\epsilon^{-a-(b-3)/2})$  である. 輸送関数を  $y$  について  $-x$  から  $x$  まで積分することによって, 衝突積分,

$$I_{IR} \propto -b(1-b)k^{-2a+4}|m|^{-2b+1} \int_0^x x^{-a-(b-5)/2} dx, \quad (17)$$

が得られる.  $b \neq 0, 1$  のとき, この衝突積分は  $I_{IR} = O(\epsilon^{-a-(b-7)/2})$  である. したがって, 衝突積分は,

$$a + (b - 7)/2 < 0, \quad b \neq 0, 1$$

のときに収束する. また,  $b = 0$  または  $1$  のときは, 次の次数で決定され,

$$a + (b - 8)/2 < 0, \quad b = 0, 1$$

のとき衝突積分は収束する.

運動論的方程式 (15) の定常解である Pelinovsky–Raevsky スペクトル (PR スペクトル) の場合, 衝突積分は  $O(\epsilon^{-1/4})$  となり, 赤外波数からの寄与が発散する. 一方で, GM スペクトルの高波数漸近形では,  $b = 0$  であるため, 赤外波数からの寄与は次の次数の  $O(1)$  となり収束する.

同様に, 弾性散乱が与える衝突積分は  $O(\epsilon^{-a+5})$ , 低調波不安定が与える衝突積分は  $O(\epsilon^{-a-b+5})$  を持つ. これらをまとめると, 図 2 のように,

$$a < 5, \quad b < -3, \quad (18a)$$

$$a + (b - 7)/2 < 0, \quad -3 < b < 3, b \neq 0, 1, \quad (18b)$$

$$a + (b - 8)/2 < 0, \quad b = 0, 1, \quad (18c)$$

$$a + b - 5 < 0, \quad b > 3 \quad (18d)$$

の指数領域で衝突積分は収束する.

### 3.2.2 紫外波数の寄与

赤外波数と同様に, 紫外波数  $k_1 \rightarrow \infty$  からの衝突積分への寄与を考える. この場合も, 式 (14) の共鳴条件は, 誘導拡散, 低調波不安定, 弾性散乱の 3 種類に分類される.

紫外領域は

$$k_1 = k/2(1 + 1/x + y), \quad k_2 = k/2(1 + 1/x - y)$$

で表される. ここで,  $x > 0$ ,  $-1 < y < 1$  であり,  $x = O(\epsilon)$  である.  $\epsilon$  の次数で展開すると,  $-2 < b < 2$  のとき, 誘導拡散が与える衝突積分の最低次は

$$I_{UV} \propto k^{-2a+4} m^{-2b+1} b \int_0^1 x^{a+b/2-5} dx \quad (19)$$

となる. すなわち, 衝突積分は  $O(\epsilon^{a+b/2-4})$  である. したがって,  $a + b/2 - 4 > 0$  かつ  $-2 < b < 2, b \neq 0$  のとき積分は収束する.  $b = 0$  のときは, 衝突積分は次の  $O(\epsilon^{a-7/2})$  が最低次となり,  $a > 7/2$  のとき収束する.

PR スペクトルでは, 紫外領域で衝突積分が  $O(\epsilon^{-1/4})$  となり発散する. 一方, GM スペクトルの高波数漸近形では, 衝突積分は  $O(1)$  となり収束する.



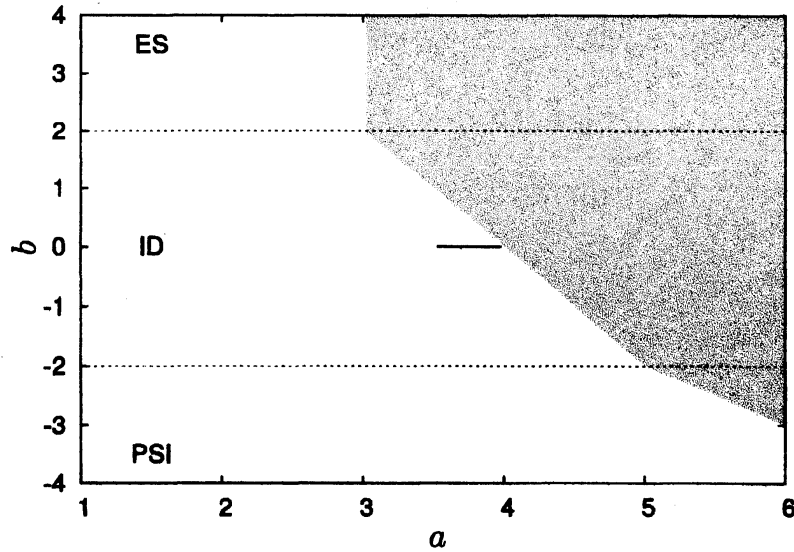


図 3: 紫外波数の寄与による衝突積分の収束性. 詳細は図 2 参照.

また,  $b > 2$  の指数領域では, 弾性散乱が支配的となり, 衝突積分は

$$I_{UV} \propto -k^{-2a+4} m^{-2b+1} b \int_0^{\infty} x^{a-4} dx \quad (20)$$

で与えられ, これは  $O(\epsilon^{a-3})$  である. さらに,  $b < -2$  の指数領域では低調波不安定が支配的で  $I_{UV} = O(\epsilon^{a+b-3})$  である.

これらをまとめると, 図 3 に示すように,

$$a + b - 3 > 0, \quad b > 2, \quad (21a)$$

$$a + (b - 8)/2 > 0, \quad -2 < b < 2, b \neq 0, \quad (21b)$$

$$a - 7/2 > 0, \quad b = 0, \quad (21c)$$

$$a > 3, \quad b < -2 \quad (21d)$$

の指数領域で衝突積分は収束する.

このような運動論的方程式の衝突積分における赤外と紫外の発散は, 異方性のある波動乱流系一般にしばしば現れる (Balk *et al.*, 1990, など).

### 3.3 運動論的方程式の定常解: 衝突積分が収束する場合

3.2 節で示されたように, スペクトルの自己相似性を仮定すると, ほとんどすべての指数領域で赤外または紫外波数の寄与によって, 衝突積分が発散する. 両極限からの寄与がともに収束する唯一の例外は,

$$7/2 < a < 4 \text{ かつ } b = 0 \quad (22)$$

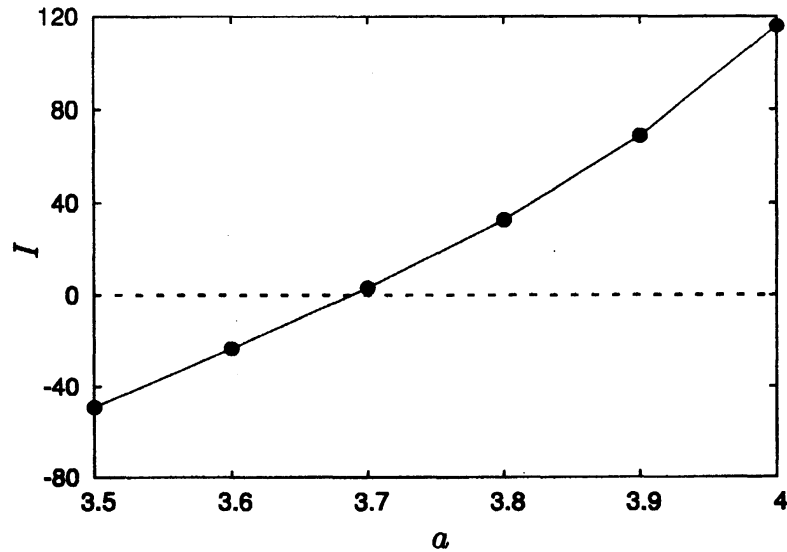


図 4: 衝突積分が収束する  $7/2 < a < 4$ ,  $b = 0$  上での衝突積分の値.

の線分上である.

衝突積分が収束するので, 衝突積分は  $a$  の連続関数となる. スペクトルの自己相似性のために, 一般性を失うことなく, 衝突積分で  $|k| = m = 1$  とし, 数値積分によって得られる衝突積分を図 4 に示す. 図 4 より,  $a \sim 7/2$  近傍で衝突積分は負となり,  $a \sim 4$  近傍で正となることがわかる. さらに, 関数の連続性のために衝突積分が 0 となる  $a$  の存在が保証され, それは  $a \sim 3.7$  近傍であることがわかる. すなわち, 運動論的方程式 (15) の定常解として,

$$n(p) \propto |k|^{-a}, \quad a \sim 3.7 \quad (23)$$

があることがわかった.

### 3.4 運動論的方程式の定常解: 衝突積分が発散する場合

衝突積分が赤外および紫外の両極限でともに発散する場合を考える.  $b$  が 0 付近の値を持つとき赤外発散は誘導拡散によって決定され, 式 (17) により, 赤外発散の正負の符号は,

$$-b(1-b) \quad -3 < b < 3 \text{ のとき} \quad (24)$$

と同じ符号を持つ. 同様に, 紫外発散は  $b = 0$  付近で誘導拡散,  $b > 2$  で弾性散乱によって決定される. 式 (19) および式 (20) より紫外発散の符号は,

$$b \quad -2 < b < 2 \text{ のとき} \quad (25a)$$

$$-b \quad b > 2 \text{ のとき} \quad (25b)$$

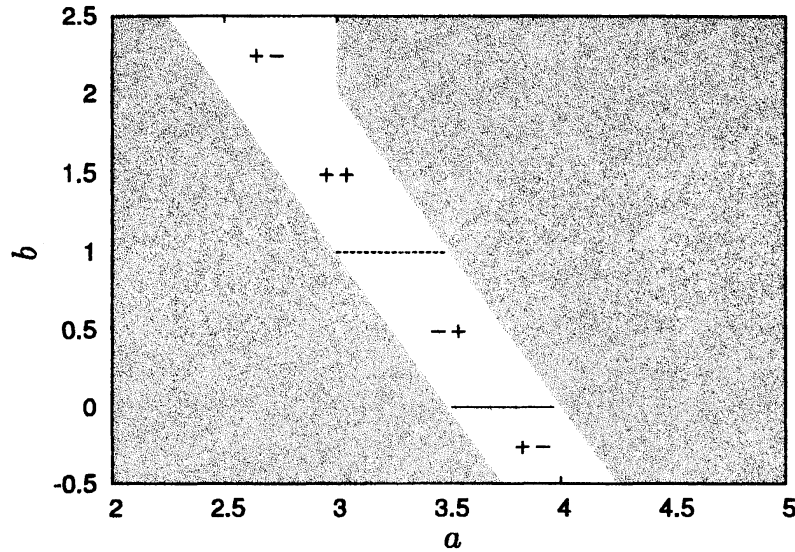


図 5: 衝突積分が赤外および紫外で発散する場合の正負性. 白の領域で赤外および紫外で衝突積分が発散する. 正負の符号は左が赤外発散, 右が紫外発散の正負を表す.

と同じものである. 赤外と紫外での発散の正負の符号を図 5 に示す.

衝突積分が赤外または紫外の極限の一方で発散する場合や, 発散の符号が同じ場合は, 衝突積分は全体としてもやはり発散する. 現実の海洋スペクトルの自己相似領域の有限性を考慮すると, 衝突積分の発散は, これらの指数領域で衝突積分が非常に大きな値を持ち強く非定常であることを意味する.

一方で, 赤外と紫外での発散の正負の符号が異なる場合, 赤外と紫外の発散が相殺され得る. その例が  $a = 7/2$ ,  $b = 1/2$  の指数を持つ PR スペクトルである. PR スペクトルは赤外と紫外の発散が各点でつり合うことで, 運動論的方程式 (15) の厳密定常解となっている. これは, Zakharov-Kuznetsov 変換を用いて波数空間を写すことで示すことができる (Lvov and Tabak, 2001).

PR スペクトルは図 6 のような輸送関数を持つ. PR スペクトルの輸送関数は,  $k_1$ ,  $k_2$  が  $k$  と同程度の大きさを持つとき GM スペクトルと同様の振る舞いをする. すなわち, エネルギーは大きなスケールから小さなスケールへと輸送される. 一方で, GM スペクトルとは異なり,  $k_1$  または  $k_2$  が  $k/10$  程度より小さい領域で負となり, 逆に  $10k$  より大きい領域で正の値を持つ. この輸送関数は, エネルギーは小さなスケールから大きなスケールへと輸送される. この符号の反転は, 波数空間内の同程度の大きさを持つ波数間でなされる局所相互作用と, まったく異なる大きさを持つ波数間の非局所相互作用とでエネルギー輸送の向きが異なることを示している. また, 輸送関数の積分量である衝突積分にこれらの符号の反転は, さらに非局所的な波数領域で現れる.

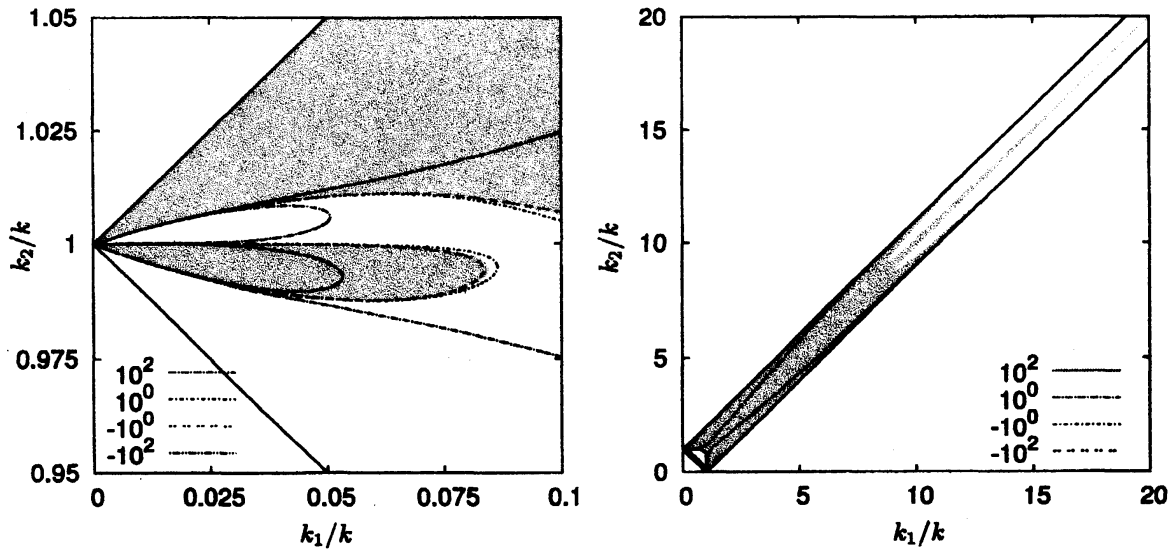


図 6: PR スペクトルに対する輸送関数. 詳細については図 1 参照.

では, 赤外と紫外での発散の正負の符号が異なる指数領域,

$$7/2 < a + b/2 < 4 \text{ かつ } -2 < b < 1 \text{ かつ } b \neq 0, \quad (26a)$$

$$a + b/2 > 7/2 \text{ かつ } a < 2 \text{ かつ } b > 2, \quad (26b)$$

でアクション密度関数の振る舞いはどのようなものになるだろうか? このとき, 衝突積分が赤外または紫外の極限の一方で発散する場合や, 発散が同符号を持つ場合と比べ, 衝突積分の値は 0 ではないものの, その発散の強さは弱くなる. 海洋のエネルギースペクトルのべき指数領域の有限性を考慮すると, 赤外と紫外での発散が異符号を持つ指数領域では, 衝突積分の値が小さくなることを意味する. したがって, これらの指数領域では, 定常状態ではなくとも, 定常状態に非常に近い準定常状態が観測され得る.

海洋観測および理論的に得られたアクション密度関数のべき指数を表 7 に示す. 一般に, 時系列と鉛直データから互いに独立に振動数スペクトルと鉛直波数スペクトルが得られる. ここで, エネルギースペクトルの分離性,

$$E(\omega, m) \propto E_{\text{time}}(\omega) E_{\text{vertical}}(m),$$

を仮定し, エネルギースペクトルをそれらの積として構成されたものを 1 次元観測と呼ぶことにする. 一方で, 2 次元観測は時系列と鉛直データの同時観測から, 直接, エネルギースペクトル,  $E(\omega, m)$ , を構成したことを表す.

表 1 に列挙された海洋観測および理論的に得られたアクション密度関数のべき指数を図 7 に図示する. 赤外と紫外での発散が異なる正負の符号を持ち, 準定常状態が形成され得る指数領域内もしくはその近傍に, 海洋観測で得られたべき指数が存在することが

表 1: 観測データおよび理論解の持つべき指数 (Lvov *et al.*, 2004). 1次元は時系列と鉛直データからエネルギースペクトルを別々に構成したことを表し, 2次元は時系列と鉛直データの同時観測からエネルギースペクトルを構成したことを表す.

	$a$	$b$	
Site-D	4.0	0.0	1次元
IWEX	3.75	0.65	
AIWEX	3.2	0.95	
FASINEX	3.75	0.55	
NATRE1	2.55	2.20	
NATRE2	3.5	1.25	
PATCHEX	4.0	-0.10	2次元
SWAPP	3.825	-0.075	
GM	4.0	0.0	理論
PR	3.5	0.5	
本稿	3.7	0.0	

わかる. この赤外・紫外での異符号発散は, McComas and Müller (1981b) による赤外の誘導拡散のみを考慮した準定常解の族と比べ観測結果とよりよく一致する.

赤外と紫外での衝突積分の発散がアクション密度関数の形成に関して支配的であることは, アクション密度関数の多様性とも合致する. 赤外領域では, スペクトルは一般に普遍的ではなく, 境界条件や本研究では無視したコリオリ力や水平方向に一樣な剪断流などに強く依存する. 同様に紫外領域でも, 平均成層の強さなどのためスペクトルは普遍的にはなり得ない. したがって, これらの赤外・紫外領域との波数空間内の非局所相互作用によって決定されるスペクトルは普遍的になり得ないのである.

## 4 まとめ

本研究では, 弱乱流理論によって得られる運動論的方程式に現れる衝突積分の性質を調べた. コリオリ力を無視し系の自己相似性を仮定し, スペクトルも自己相似的,  $n(\mathbf{p}) \propto |k|^{-a}|m|^{-b}$ , であるとする. ほとんどすべての自己相似的なべき指数に対して, 衝突積分は赤外または紫外の少なくとも一方の極限で発散する.

衝突積分が赤外と紫外の両極限で収束する唯一の例外が  $7/2 < a < 4, b = 0$  上の線分である. これまで, 海洋内部重力波の普遍平衡スペクトルとされていた Garrett–Munk スペクトルはこの収束する線分の端に存在する. また, 両極限で収束するため, 衝突積分を数値的に得ることができる. この数値積分によって,  $a \sim 3.7$  にも衝突積分が 0 となる定常解が存在することが明らかになった.

一方で, 運動論的方程式の厳密解である Pelinovsky–Raevsky スペクトルのように, 赤外・紫外の両極限での発散の平衡状態も存在する. 系の持つ最大および最小スケール

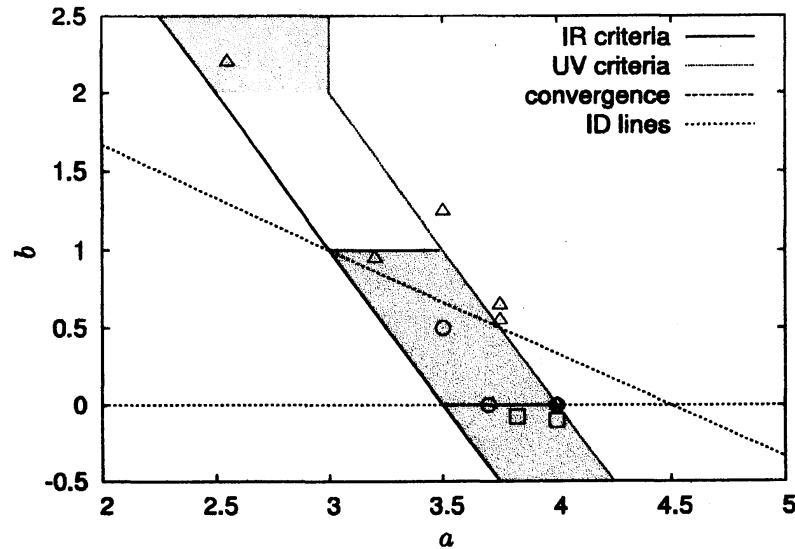


図 7: 赤外と紫外での発散に対する準定常状態をなし得る指数領域と観測によるアクション密度関数の持つ指数. 網掛けの指数領域で, 赤外と紫外での発散が異なる正負の符号を持ち, 準定常状態が形成され得る.  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\circ$  は, それぞれ, 表 1 に列挙された 1 次元観測, 2 次元観測, 理論解の持つべき指数である. また, ID lines は McComas and Müller (1981b) による赤外の誘導拡散のみを考慮した準定常解を示す.

を考慮すると, 赤外と紫外での発散が異符号を持つ指数領域では衝突積分の値が小さくなり, スペクトルの準定常状態が形成され得る. さらに, 観測結果はこのスペクトルの準定常状態の集合の内部またはごく近傍に存在することが明らかになった. むしろ, Pelinovsky–Raevsky スペクトルは, この衝突積分の赤外と紫外での発散が異符号を持つ場合の特殊な例であると言える. また, 観測されるべき指数の多様性は, 普遍的でない赤外・紫外領域との波数空間の非局所相互作用によって説明される.

本研究はアメリカ国立科学財団 (NSF CMG grant 0417724) の支援を受けた. また, 京都大学基礎物理学研究所の計算設備を用いた.

## 参考文献

- Andrews, D. G. and McIntyre, M. E. (1978). On wave-action and its relatives. *J. Fluid Mech.* **89**, 647–664.
- Balk, A. M., Nazarenko, S. V., and Zakharov, V. E. (1990). On the nonlocal turbulence of drift type waves. *Phys. Lett. A* **146**, 217–221.
- Garrett, C. J. R. and Munk, W. H. (1979). Internal waves in the ocean. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **11**, 339–369.

- Lvov, Y. V., Polzin, K. L., and Tabak, E. G. (2004). Energy spectra of the ocean's internal wave field: theory and observations. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 128501.
- Lvov, Y. V. and Tabak, E. G. (2001). Hamiltonian formalism and the Garrett–Munk spectrum of internal waves in the ocean. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 168501.
- Lvov, Y. V. and Tabak, E. G. (2004). A Hamiltonian formulation for long internal waves. *Physica D* **195**, 106–122.
- McComas, C. H. (1977). Equilibrium mechanisms within the oceanic internal wave field. *J. Phys. Oceanogr.* **7**, 836–845.
- McComas, C. H. and Bretherton, F. P. (1977). Resonant interaction of oceanic internal waves. *J. Geophys. Res.* **82**, 1397–1412.
- McComas, C. H. and Müller, P. (1981a). The dynamic balance of internal waves. *J. Phys. Oceanogr.* **11**, 970–986.
- McComas, C. H. and Müller, P. (1981b). Time scales of resonant interactions among oceanic internal waves. *J. Phys. Oceanogr.* **11**, 139–147.