

# 短波長モデル方程式のパルス解のダイナミクス

山口大学大学院理工学研究科 松野 好雅 (Yoshimasa Matsuno)  
Division of Applied Mathematical Science  
Graduate School of Science and Engineering  
Yamaguchi University

## 概要

非線形媒質中を伝播する短パルスの時間発展を記述するモデル方程式について考察する。本研究では特に、この方程式の厳密解法、特殊解の構成、並びに解の特性について言及する。最初に基礎方程式である Maxwell 方程式に特異摂動法を適用することによりモデル方程式（以下これを、短パルス (SP) 方程式と呼ぶ）を導出する。次に SP 方程式はホドグラフ変換によりよく知られた sine-Gordon (sG) 方程式に変換できることを示す。最後に sG 方程式の種々の特殊解を用いて SP 方程式の解を導きその特性を調べる。具体的にはループソリトン解やブリーザー解のパラメータ表示や、これらの解の長時間での漸近形を求める。後者は前者と異なり特異性のない 1 価関数の解であり、光ファイバー中のソリトンの伝播や衝突などの物理現象への応用が期待される。なお、本研究の詳細に関しては参考文献 (Matsuno(2007)) を参照されたい。

## 1. 基礎方程式

### 1.1 Maxwell 方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (1.1b)$$

$x$  方向への一次元伝播を考える：

$$\mathbf{E} = E_3(x, t) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{H} = H_2(x, t) \mathbf{e}_2. \quad (1.2)$$

(1.1) 及び、(1.2) より ( $\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$ ) として

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{\partial D_3}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_3}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_2}{\partial t}. \quad (1.3)$$

(1.3), 及び  $D_3 = \epsilon_0 E_3 + P_3$  より  $H_2$  を消去すると

$$E_{xx} - \frac{1}{c^2} E_{tt} = P_{tt}, \quad (1.4)$$

が得られる。ただし,  $E = E_3, P = P_3/(\epsilon_0 c^2), c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ ,

$$P = P_{lin} + P_{nl} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau) E(x, \tau) d\tau + \chi_3 E^3, \quad (1.5a)$$

$$\chi_{tt} = \chi_0 \delta(t). \quad (1.5b)$$

(1.5) を (1.4) へ代入すると

$$E_{xx} - \frac{1}{c^2} E_{tt} = \chi_0 E + \chi_3 (E^3)_{tt}. \quad (1.6)$$

## 1.2 特異摂動法

電場  $E$  を微小パラメータ  $\epsilon$  で展開する:

$$E(x, t) = \epsilon u_0(\phi, X) + \epsilon^2 u_1(\phi, X) + \dots \quad (1.7a)$$

ここで, 新たな変数  $\phi$ , 及び  $X$  は以下で定義される

$$\phi = \frac{t - \frac{x}{c}}{\epsilon}, \quad X = \epsilon x. \quad (1.7b)$$

(1.7) を (1.6) に代入すると, 最低次  $O(\epsilon)$  において

$$-\frac{2}{c} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \phi \partial X} = \chi_0 u_0 + \chi_3 \frac{\partial^2 u_0^3}{\partial \phi^2}. \quad (1.8)$$

適当に無次元化し, 変数を  $X \rightarrow t, \phi \rightarrow x, u_0 \rightarrow u$  のように書き換えると (1.8) は

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6} (u^3)_{xx}, \quad (1.9)$$

となる (Schäfer & Wayne (2004)). (1.9) が以下の議論の出発点となる SP 方程式である.

### 注意

- SP 方程式は非線形 Schrödinger 方程式と異なりパルスの波形に対する時間発展を記述する.
- SP 方程式は可積分方程式の数学的議論により以前に導かれていた (Robelo (1989)).
- 類似の可積分方程式 (Matsuno (2006))

$$u_{xt} = \alpha u + \frac{1}{2} (1 - \beta) u_x^2 - u u_{xx}$$

$\beta = 2$ : Camassa-Holm 方程式の短波長モデル方程式

$\beta = 3$ : Degasperis-Procesi 方程式の短波長モデル方程式, Vakhnenko 方程式

$\alpha = 0, \beta = 2$ : Hunter-Saxton 方程式

## 2. 解のパラメータ表示

### 2.1 sine-Gordon 方程式

新たな変数  $r$  を導入する：

$$r^2 = 1 + u_x^2, \quad (2.1)$$

これにより SP 方程式 (1.9) は

$$r_t = \left( \frac{1}{2} u^2 r \right)_x, \quad (2.2)$$

となる。さらに、座標変換 (ホドグラフ変換)  $(x, t) \rightarrow (y, \tau)$

$$dy = r dx + \frac{1}{2} u^2 r dt, \quad d\tau = dt, \quad (2.3)$$

により (2.1), (2.2) は以下のように変換される：

$$r^2 = 1 + r^2 u_y^2, \quad r_\tau = r^2 u u_y. \quad (2.4)$$

変数変換

$$u_y = \sin \phi, \quad \phi = \phi(y, \tau). \quad (2.5)$$

により (2.4) は

$$\frac{1}{r} = \cos \phi. \quad (2.6)$$

のように書き換えられる。(2.4)-(2.6) より  $u = \phi_\tau$  となるが、これを (2.5) へ代入すると次の sine-Gordon(sG) 方程式が得られる：

$$\phi_{y\tau} = \sin \phi. \quad (2.7)$$

(2.3) により  $x = x(y, \tau)$  は以下の線形偏微分方程式を満たす

$$x_y = \frac{1}{r}, \quad x_\tau = -\frac{1}{2} u^2. \quad (2.8)$$

これを積分すると (可積分性は (2.4) で保障される)

$$x(y, \tau) = \int^y \cos \phi dy + d. \quad (2.9)$$

**注意**

- SP 方程式の解は sG 方程式の解  $\phi$  を用いて、 $u = \phi_\tau$ 、及び (2.9) によるパラメータ表示で与えられる。
- 解析解の有用性は、(2.9) の右辺の積分が実行できるか否かにかかっている。

## 2.2 ソリトン解

sG 方程式の  $N$ -ソリトン解は以下で与えられる：

$$\phi = 2i \ln \frac{f'}{f}, \quad (2.10)$$

$$f = \sum_{\mu=0,1} \exp \left[ \sum_{j=1}^N \mu_j \left( \xi_j + \frac{\pi}{2}i \right) + \sum_{1 \leq j < k \leq N} \mu_j \mu_k \gamma_{jk} \right], \quad (2.11a)$$

$$f' = \sum_{\mu=0,1} \exp \left[ \sum_{j=1}^N \mu_j \left( \xi_j - \frac{\pi}{2}i \right) + \sum_{1 \leq j < k \leq N} \mu_j \mu_k \gamma_{jk} \right], \quad (2.11b)$$

$$\xi_j = p_j y + \frac{1}{p_j} t + \xi_{j0}, \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (2.11c)$$

$$e^{\gamma_{jk}} = \left( \frac{p_j - p_k}{p_j + p_k} \right)^2, \quad (j, k = 1, 2, \dots, N; j \neq k). \quad (2.11d)$$

ここで  $f$ , 及び  $f'$  は以下の双線形方程式を満たす

$$f f_{yt} - f_y f_t = \frac{1}{4} (f^2 - f'^2), \quad (2.12a)$$

$$f' f'_{yt} - f'_y f'_t = \frac{1}{4} (f'^2 - f^2). \quad (2.12b)$$

(2.10), (2.12) より

$$\cos \phi = 1 - 2(\ln f' f)_{yt}, \quad (2.13)$$

が導かれる。これを (2.9) へ代入し、 $y$  に関して積分すると

$$x(y, t) = y - 2(\ln f' f)_t + d. \quad (2.14)$$

$u = \phi_\tau$  へ (2.10) を代入すると

$$u(y, t) = 2i \left( \ln \frac{f'}{f} \right)_t. \quad (2.15)$$

(2.14), (2.15) が SP 方程式のソリトン解のパラメータ表示を与える。

## 3. ループソリトン解

### 3.1 1-ループソリトン解

解のパラメータ表示は以下で与えられる：

$$f = 1 + i e^{\xi_1}, \quad \xi_1 = p_1 y + \frac{1}{p_1} t + \xi_{10}, \quad f' = f^*, \quad (3.1)$$

$$u(y, t) = \frac{2}{p_1} \operatorname{sech} \xi_1, \quad (\xi_1 = p_1 y + \frac{1}{p_1} t + \xi_{10}), \quad (3.2a)$$

$$x(y, t) = y - \frac{2}{p_1} \tanh \xi_1 + d_1. \quad (3.2b)$$

(3.2) は振幅  $A = 2/p_1$ , 速度  $v = A^2/4$  のパルスを表す。

3.2  $N$ -ループソリトン解

•  $t \rightarrow \pm\infty$  での解の漸近形

以下では  $n$  番目のソリトンの速度で動く座標系で考える.

a)  $t \rightarrow -\infty$

$$u \sim \frac{2}{p_n} \operatorname{sech}(\xi_n + \delta_n^{(-)}), \quad (3.3a)$$

$$x \sim y - \frac{2}{p_n} \tanh(\xi_n + \delta_n^{(-)}) - 4 \sum_{j=n+1}^N \frac{1}{p_j} - \frac{2}{p_n} + d, \quad (3.3b)$$

$$\delta_n^{(-)} = \sum_{j=n+1}^N \ln \left( \frac{p_n - p_j}{p_n + p_j} \right)^2. \quad (3.3c)$$

b)  $t \rightarrow +\infty$

$$u \sim \frac{2}{p_n} \operatorname{sech}(\xi_n + \delta_n^{(+)}), \quad (3.4a)$$

$$x \sim y - \frac{2}{p_n} \tanh(\xi_n + \delta_n^{(+)}) - 4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{p_j} - \frac{2}{p_n} + d, \quad (3.4b)$$

$$\delta_n^{(+)} = \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left( \frac{p_n - p_j}{p_n + p_j} \right)^2. \quad (3.4c)$$

$n$  番目のループソリトンの位置座標を  $x_c$  とすると,  $t \rightarrow -\infty$  において

$$x_c + c_n t - x_{n0} \sim -\frac{\delta_n^{(-)}}{p_n} - 4 \sum_{j=n+1}^N \frac{1}{p_j} + d_n. \quad (3.5)$$

ここで,  $x_{n0} = -\xi_{n0}/p_n$ , 及び  $d_n = d - 2/p_n$  は定数. 同様に  $t \rightarrow +\infty$  では

$$x_c + c_n t - x_{n0} \sim -\frac{\delta_n^{(+)}}{p_n} - 4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{p_j} + d_n. \quad (3.6)$$

$n$  番目のループソリトンの位相のずれは以下で定義される:

$$\Delta_n = x_c(t \rightarrow -\infty) - x_c(t \rightarrow +\infty). \quad (3.7)$$

(3.5)-(3.7) より

$$\Delta_n = \frac{1}{p_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left( \frac{p_n - p_j}{p_n + p_j} \right)^2 - \sum_{j=n+1}^N \ln \left( \frac{p_n - p_j}{p_n + p_j} \right)^2 \right\}$$

$$+4 \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{p_j} - \sum_{j=n+1}^N \frac{1}{p_j} \right), \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (3.8)$$

### 3.3 2個のループソリトンの相互作用

#### a) 解のパラメータ表示

$$u(y, t) = \frac{2\sqrt{\gamma} (p_1 + p_2) \cosh \psi_1 \cosh \psi_2 + (p_1 - p_2) \sinh \psi_1 \sinh \psi_2}{p_1 p_2 \cosh^2 \psi_1 + \gamma \sinh^2 \psi_2}, \quad (3.9a)$$

$$x(y, t) = y + \frac{1}{p_1 p_2} \frac{(p_1 - p_2) \sinh 2\psi_1 - \gamma (p_1 + p_2) \sinh 2\psi_2}{\cosh^2 \psi_1 + \gamma \sinh^2 \psi_2} - \frac{2(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} + d, \quad (3.9b)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) + \frac{1}{2} \ln \gamma, \quad \gamma = \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2. \quad (3.9c)$$

#### b) 位相のずれ

$$\Delta_1 = -\frac{1}{p_1} \ln \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 - \frac{4}{p_2}, \quad (3.10a)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{p_2} \ln \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 + \frac{4}{p_1}. \quad (3.10b)$$

#### c) 具体例

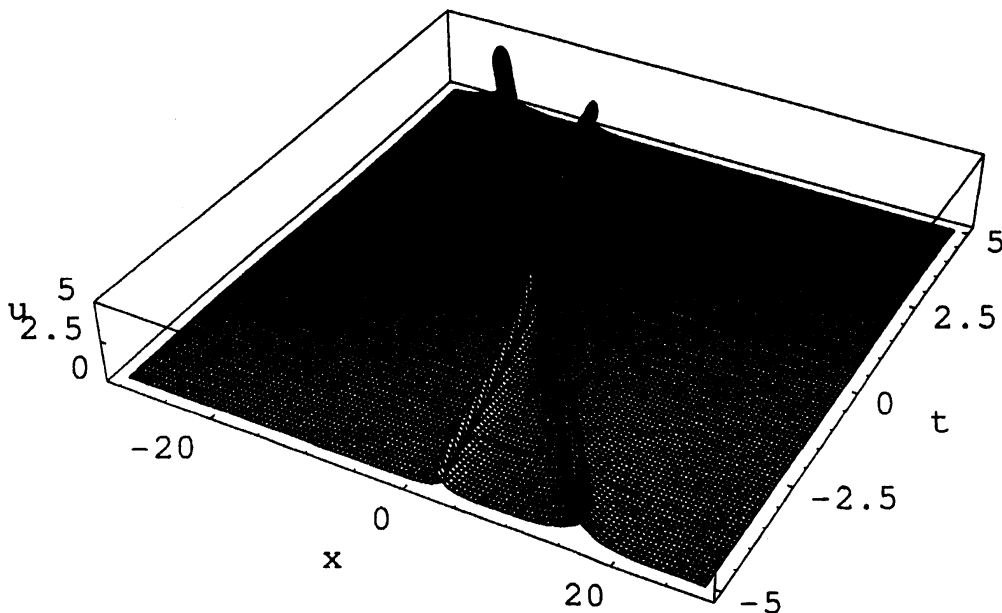


図-1: 2個のループソリトンの相互作用;  $p_1 = 0.5, p_2 = 1.0$

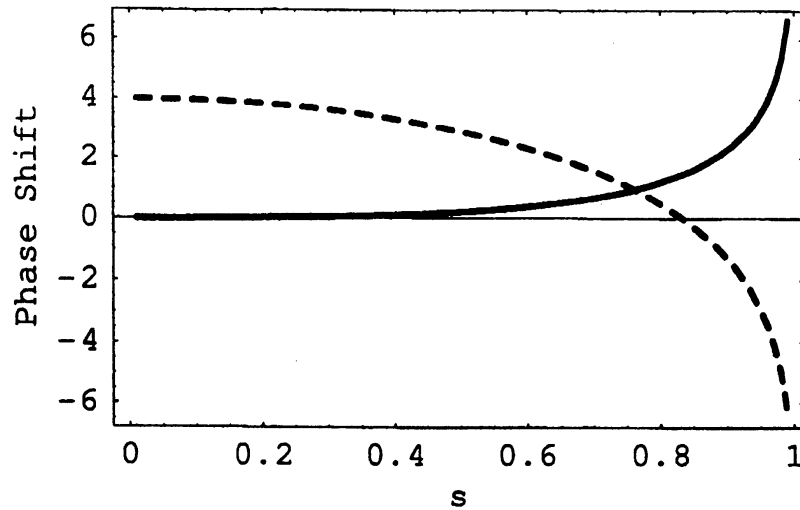


図-2: 位相のずれ; 大きいソリトン (実線), 小さいソリトン (破線),  $s = p_1/p_2$

#### 4. ブリーザー解

##### 4.1 1-ブリーザー解

##### a) ソリトンパラメータの特殊化

2-ソリトン解で以下のようにパラメータを選ぶ:

$$p_1 = a + ib, \quad p_2 = a - ib, \quad (4.1a)$$

$$\xi_{10} = \lambda + i\mu, \quad \xi_{20} = \lambda - i\mu. \quad (4.1b)$$

これに対応する  $f$ , 及び  $f'$  は

$$f = 1 + ie^{\xi_1} + ie^{\xi_1^*} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 e^{\xi_1 + \xi_1^*}, \quad f' = f^*. \quad (4.2a)$$

ここで,  $\xi_1 = \theta + i\chi$ ,

$$\theta = a \left( y + \frac{1}{a^2 + b^2} t \right) + \lambda, \quad (4.2b)$$

$$\chi = b \left( y - \frac{1}{a^2 + b^2} t \right) + \mu. \quad (4.2c)$$

上記解は, sG 方程式のキंक解と反キंक解の束縛状態を表す.

##### b) 解のパラメータ表示

$$u(y, t) = \frac{4ab}{a^2 + b^2} \frac{b \sin \chi \cosh \left( \theta + \ln \frac{b}{a} \right) - a \cos \chi \sinh \left( \theta + \ln \frac{b}{a} \right)}{b^2 \cosh^2 \left( \theta + \ln \frac{b}{a} \right) + a^2 \cos^2 \chi}, \quad (4.3a)$$

$$x(y, t) = y - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \frac{a \sin 2\chi + b \sinh 2 \left( \theta + \ln \frac{b}{a} \right)}{b^2 \cosh^2 \left( \theta + \ln \frac{b}{a} \right) + a^2 \cos^2 \chi} - \frac{4a}{a^2 + b^2} + d. \quad (4.3b)$$

c) 解が 1 価関数となるための条件

$$-\sqrt{2} + 1 < \frac{a}{b} \frac{\cos \chi}{\cosh \left( \theta + \ln \frac{b}{a} \right)} < \sqrt{2} - 1. \quad (4.4)$$

$a, b > 0$  の場合この条件は,  $0 < a/b < \sqrt{2} - 1$  となる.

#### 4.2 $M$ -ブリーザー解

a) ソリトンパラメータの特殊化

$N$ -ソリトン解で  $N = 2M$  とし,  $M$  個のキंक, 反キंक対をつくる:

$$p_{2j-1} = p_{2j}^* \equiv a_j + ib_j, \quad a_j > 0, \quad b_j > 0, \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (4.5a)$$

$$\xi_{2j-1,0} = \xi_{2j,0}^* \equiv \lambda_j + i\mu_j, \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (4.5b)$$

$$\xi_{2j-1} = \theta_j + i\chi_j, \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (4.6a)$$

$$\xi_{2j} = \theta_j - i\chi_j, \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (4.6b)$$

$$\theta_j = a_j(y + c_j t) + \lambda_j, \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (4.6c)$$

$$\chi_j = b_j(y - c_j t) + \mu_j, \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (4.6d)$$

$$c_j = \frac{1}{a_j^2 + b_j^2}, \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (4.6e)$$

b) 解の漸近形

i)  $t \rightarrow -\infty$ :

$$u(y, t) \sim \frac{4a_n b_n}{a_n^2 + b_n^2} \frac{G_n}{F_n}, \quad (4.7a)$$

$$x(y, t) \sim y - \frac{2a_n b_n}{a_n^2 + b_n^2} \frac{H_n}{F_n} - \frac{4a_n}{a_n^2 + b_n^2} + d, \quad (4.7b)$$

$$F_n = b_n^2 \cosh^2 \left( \theta_n + \alpha_n^{(-)} + \ln \frac{b_n}{a_n} \right) + a_n^2 \cos^2 (\chi_n + \beta_n^{(-)}), \quad (4.7c)$$

$$G_n = b_n \sin (\chi_n + \beta_n^{(-)}) \cosh \left( \theta_n + \alpha_n^{(-)} + \ln \frac{b_n}{a_n} \right) - a_n \cos (\chi_n + \beta_n^{(-)}) \sinh \left( \theta_n + \alpha_n^{(-)} + \ln \frac{b_n}{a_n} \right), \quad (4.7d)$$

$$H_n = a_n \sin 2 (\chi_n + \beta_n^{(-)}) + b_n \sinh 2 \left( \theta_n + \alpha_n^{(-)} + \ln \frac{b_n}{a_n} \right). \quad (4.7e)$$

ここで

$$\alpha_n^{(-)} = \sum_{j=n+1}^M \ln \frac{\{(a_n - a_j)^2 + (b_n - b_j)^2\} \{(a_n - a_j)^2 + (b_n + b_j)^2\}}{\{(a_n + a_j)^2 + (b_n + b_j)^2\} \{(a_n + a_j)^2 + (b_n - b_j)^2\}}, \quad (4.8a)$$



$$\beta_n^{(-)} = 2 \sum_{j=n+1}^M \left( \tan^{-1} \frac{b_n - b_j}{a_n - a_j} + \tan^{-1} \frac{b_n + b_j}{a_n - a_j} - \tan^{-1} \frac{b_n + b_j}{a_n + a_j} - \tan^{-1} \frac{b_n - b_j}{a_n + a_j} \right). \quad (4.8b)$$

ii)  $t \rightarrow +\infty$

位相のずれを以外は  $t \rightarrow -\infty$  と同じ漸近形.

c) 小振幅の極限での解の漸近形

$$u(y, t) \sim \frac{4a_n}{b_n^2} \frac{\sin(\chi_n + \beta_n^{(-)})}{\cosh(\theta_n + \alpha_n^{(-)} + \ln \frac{b_n}{a_n})}, \quad (4.9a)$$

$$x(y, t) \sim y - \frac{4a_n}{b_n^2} \tanh\left(\theta_n + \alpha_n^{(-)} + \ln \frac{b_n}{a_n}\right) - \frac{4a_n}{b_n^2} + d, \quad (4.9b)$$

$$\alpha_n^{(-)} \sim - \sum_{j=n+1}^M \frac{8(b_n^2 + b_j^2)a_j a_n}{(b_n^2 - b_j^2)^2}, \quad (4.9c)$$

$$\beta_n^{(-)} \sim \sum_{j=n+1}^M \frac{8a_j b_n}{b_n^2 - b_j^2}. \quad (4.9d)$$

**注意**

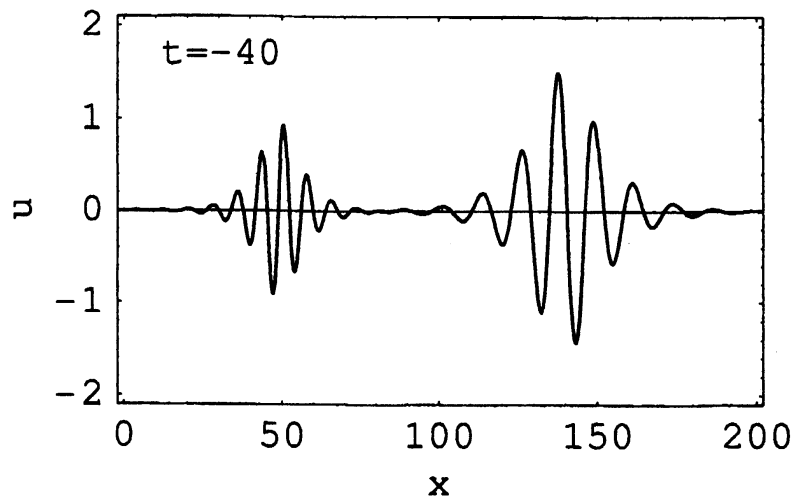
- 小振幅極限では包絡線とキャリアーの部分が分離される.

$n$  番目のブリーザーの包絡線の中心座標の位相のずれを  $\bar{\Delta}_n$  とすると

$$\bar{\Delta}_n = \sum_{j=n+1}^M \frac{8(b_n^2 + b_j^2)a_j}{(b_n^2 - b_j^2)^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{8(b_n^2 + b_j^2)a_j}{(b_n^2 - b_j^2)^2}, \quad (n = 1, 2, \dots, M). \quad (4.10)$$

### 4.3 2個のブリーザーの相互作用

具体例 :  $a_1 = 0.1, b_1 = 0.5, a_2 = 0.16, b_2 = 0.8, \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \mu_1 = \mu_2 = 0$



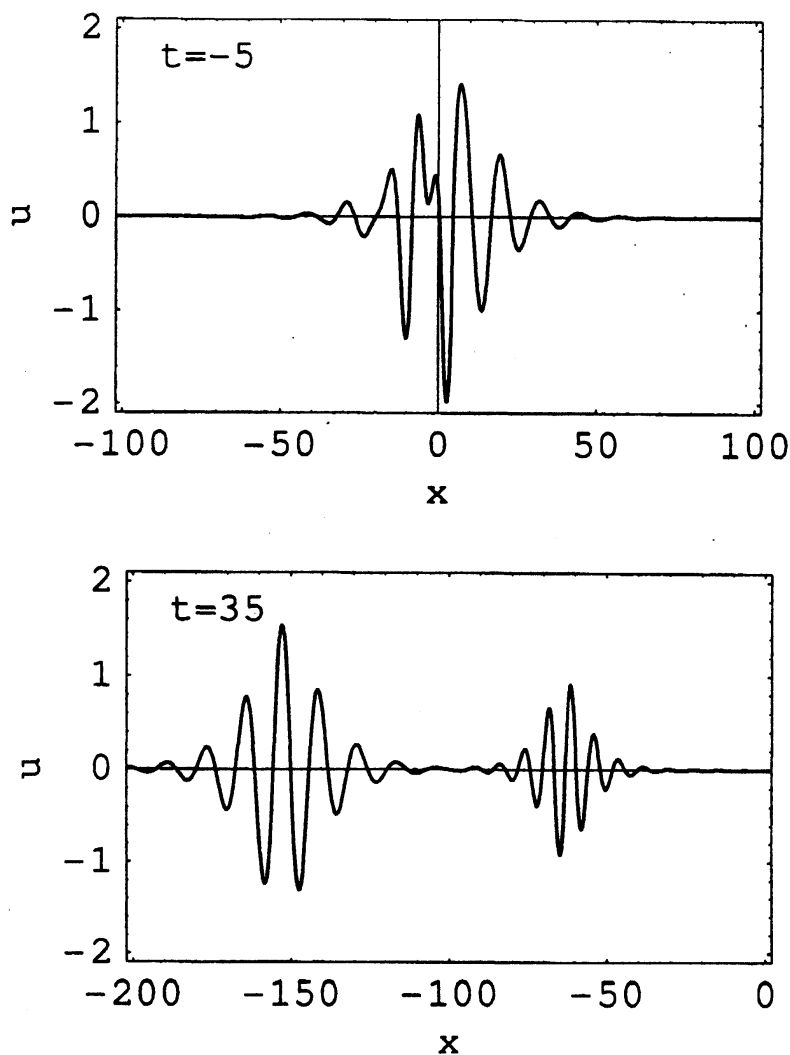


図-3 2個のプリーザーの相互作用; (a) $t = -40$ , (b) $t = -5$ , (c) $t = 35$

## 5. まとめ

- a) SP 方程式にホドグラフ変換を施すことにより, 可積分な sG 方程式に還元することができた.
- b) SP 方程式のソリトン解のパラメータ表示を得た. パラメータの特殊化によりループソリトン解や, プリーザー解を導き, これらの解の性質を明らかにした.
- c) ここで得た解析解と光ファイバー系でのソリトン伝播実験との比較は今後の課題である.

## 参考文献

- [1] T. Schäfer and C.E. Wayne, *Physica D* **196** (2004) 90.
- [2] M.L. Robelo, *Stud. Appl. Math.* **81** (1989) 221.
- [3] Y. Matsuno, *Phys. Lett.* **A359** (2006) 451.
- [4] Y. Matsuno, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 084003.