数理解析研究所講究録
第 1594 巻 2008 年 177-185

有限深さの二層流体におけるソリトンの弱い二次元相互作用

九大・応力研* 及川 正行 (Masayuki OIKAWA)
九大・応力研* 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)
* Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.

1 はじめに

われわれはいくつかのモデル方程式でソリトンの二次元相互作用について調べてきた [1, 2, 3, 4]. それらのモデル方程式は一次元の可積分方程式を弱二次元化したもので，二次元化することで可積分性が失われるようなものであった．従って，数値計算によって相互作用の性質を調べた．特に，前回のこの研究会では，いわゆる Intermediate Long Wave (ILW) 方程式あるいは Finite-depth(FD) 方程式と呼ばれる方程式を弱二次元化したモデルの研究について報告した [5]. ILW 方程式は，有限深さの成層流体における弱非線形の内部長波の伝播を記述し，次の形に書ける [6, 7].

$$\frac{\partial u}{\partial T}+u\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{\partial^2}{\partial X^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}G(X'-X)u(X',t)dX'=0, \tag{1}$$

$$G(X):=\frac{1}{2\chi}[\coth\left(\frac{\pi X}{2\chi}\right)-\mathrm{sgn}(X)],$$

ここで，χ は定数であり，$\mathcal{P}$ は主値を表す．この方程式はソリトン方程式の一種であり，Chen & Lee[8] は N-ソリトン解を与え，Satsuma ら [9, 10, 11] は Bäcklund 変換，保存則，逆散乱問題などを考察するとともに，KdV 方程式および Benjamin-Ono(BO) 方程式への極限の問題を考察した．前回の研究会で調べた方程式

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial T}+u\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{\partial^2}{\partial X^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}G(X'-X)u(X',t)dX'\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}=0 \tag{2}$$

は X の正方向に近い方向に伝播する波も含むように (1) を一般化（弱二次元化）したもので，KdV 方程式に対する KP 方程式にあたる．

さて，2つの浅水波ソリトンの伝播方向が近くないときには，それらの相互作用は摂動法によって扱える [12]. また，二層流体モデルで，BO 方程式が導かれる場合にも，2つの伝播方向が近くないソリトンの相互作用は摂動法で扱える [13, 14, 4]. ILW 方程式 (1) は KdV 方程式と BO 方程式との中間的位置にあるので，伝播方向の近くない2つの ILW ソリトンの相互作用も摂動法で扱えるのではないかと予想される．ここでは簡単のため，二層流体モデルでこの問題について考える．

2 基礎方程式

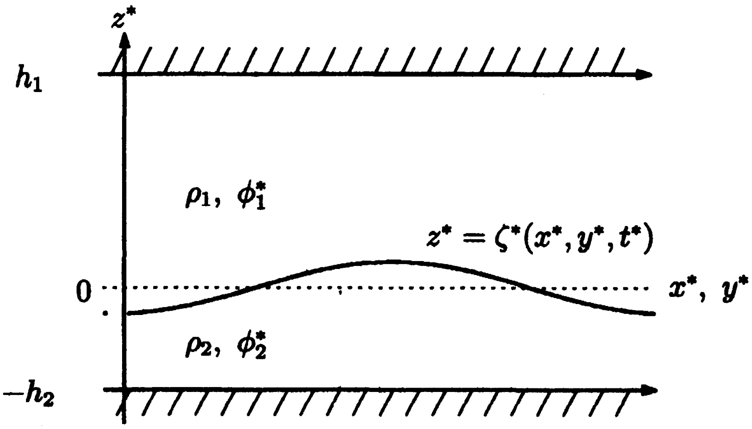

図 1: 二層流体.

図 1 のような二層流体を考える．流体は非粘性，非圧縮とし，運動は渦無しと仮定する．水平面内に x^*y* 平面を，鉛直上向きに z^* を取る．$z^* = h_1$，$z^* = -h_2$ に固定壁があるとする．時刻 t^* における界面変位は $z^* = \zeta^*(x^*, y^*, t^*)$ で，また平均の界面の位置は $z^* = 0$ で表されるとする．上層の厚さ，密度，速度ポテンシャルをそれぞれ h_1，ρ_1，ϕ_1^* で，下層の厚さ，密度，速度ポテンシャルを h_2，ρ_2，ϕ_2^* で表す．

次のように無次元化する．

$$\zeta = \frac{\zeta^*}{a},\ \boldsymbol{x} = (x, y) = \frac{\boldsymbol{x}^*}{\ell} = \left(\frac{x^*}{\ell}, \frac{y^*}{\ell}\right),\ t = \frac{V}{\ell}t^*,\ \phi_1 = \frac{h_1}{aV\ell}\phi_1^*,\ \phi_2 = \frac{h_2}{aV\ell}\phi_2^*. \tag{3}$$

ここで a は振幅，ℓ は水平方向の代表スケール（例えば波長）である．V は両層が浅い場合の線形波の位相速度

$$V := \sqrt{\frac{g\Delta h_2}{1 + \Delta + h_2/h_1}}, \quad \Delta := \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \tag{4}$$

である．ただし，g は重力加速度である．また，鉛直座標は上層については h_1 で，下層については h_2 で無次元化する．すなわち

$$\hat{z} = \frac{z^*}{h_1},\ z = \frac{z^*}{h_2}. \tag{5}$$

このとき，基礎方程式と境界条件は次のようになる．

$$\chi^2\nabla^2\phi_1 + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial\hat{z}^2} = 0, \quad \epsilon\frac{\delta}{\chi}\zeta < \hat{z} < 1, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}} = 0, \qquad \hat{z} = 1, \tag{6b}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon\frac{\delta}{\chi}\nabla\zeta\cdot\nabla\phi_1 = \frac{1}{\chi^2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}}, \qquad \hat{z} = \epsilon\frac{\delta}{\chi}\zeta, \tag{6c}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\Delta}\left[\frac{\delta}{\chi}\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{\delta}{\chi}\right)^2(\nabla\phi_1)^2 + \frac{1}{2}\epsilon\frac{\delta^2}{\chi^4}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right)^2\right]_{\hat{z}=\epsilon\frac{\delta}{\chi}\zeta} \\
&= \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\epsilon(\nabla\phi_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{\delta^2}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)^2\right]_{z=\epsilon\zeta} + \left(1 + \frac{1}{1+\Delta}\frac{\delta}{\chi}\right)\zeta,
\end{aligned} \tag{6d}$$

$$\delta^2\nabla^2\phi_2 + \frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2} = 0, \qquad -1 < z < \epsilon\zeta, \tag{6e}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon\nabla\zeta\cdot\nabla\phi_2 = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \qquad z = \epsilon\zeta, \tag{6f}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0, \qquad z = -1. \tag{6g}$$

ここで

$$\epsilon := \frac{a}{h_2}, \ \ \delta := \frac{h_2}{\ell}, \ \ \chi := \frac{h_1}{\ell} \tag{7}$$

である．さらに

$$\epsilon \ll 1, \ \ \delta \ll 1, \ \ \delta = O(\epsilon), \ \ \chi = O(1) \tag{8}$$

と仮定する．

(6e) と (6g) から，下層の速度ポテンシャル ϕ_2 は，底面でのその値 $f(\boldsymbol{x},t)$ を用いて

$$\phi_2(x,y,z,t) = f(\boldsymbol{x},t) - \frac{\delta^2}{2!}(\nabla^2 f)(z+1)^2 + \frac{\delta^4}{4!}(\nabla^4 f)(z+1)^4 - \cdots \tag{9}$$

と表すことができる．これを代入し，$O(\delta^2), O(\epsilon\delta)$ を小さいとする近似を行うと，次の方程式系を得る．

$$\chi^2\nabla^2\phi_1 + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial \hat{z}^2} = 0, \qquad 0 < \hat{z} < 1, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}} = 0, \qquad \hat{z} = 1, \tag{10b}$$

$$\frac{1}{\chi^2}\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}}\right]_{\hat{z}=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{10c}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon\nabla\zeta\cdot\nabla f = -(1+\epsilon\zeta)\nabla^2 f, \tag{10d}$$

$$\frac{1}{1+\Delta}\frac{\delta}{\chi}\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right]_{\hat{z}=0} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\epsilon(\nabla f)^2 + \left(1 + \frac{1}{1+\Delta}\frac{\delta}{\chi}\right)\zeta. \tag{10e}$$

3 ソリトンの弱い相互作用

ここで，$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$（$\boldsymbol{n}_j = (\cos\theta_j, \sin\theta_j), j = 1, 2$ であって，θ_j は x 軸の正方向と $\boldsymbol{n}_j$ とがなす角度）方向に伝播する２つの波の相互作用を考える．そのために，次の座標を導入する．

$$\xi_1 = \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{x} - t + \epsilon\psi_1(\boldsymbol{x}, t) + \cdots, \quad \xi_2 = \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{x} - t + \epsilon\psi_2(\boldsymbol{x}, t) + \cdots, \quad \tau = \epsilon t. \tag{11}$$

ψ_1, ψ_2 は phase shift を考慮したものである [15]．さらに

$$\zeta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \zeta^{(0)} + \epsilon\zeta^{(1)} + \cdots, \tag{12a}$$

$$f(\xi_1, \xi_2, \tau) = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \cdots, \tag{12b}$$

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2, \hat{z}, \tau) = \phi_1^{(0)} + \epsilon\phi_1^{(1)} + \cdots \tag{12c}$$

と展開する．これらを (10) に代入して整理すれば，以下のようになる．

$O(1)$ において，$\zeta^{(0)}, f^{(0)}$ に対しては

$$\zeta^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi_2}, \quad 2(1-p)\frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0, \quad p := \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2. \tag{13}$$

したがって，$1 - p \neq 0$, すなわち，$\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$ が平行でないとき

$$f^{(0)} = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau), \tag{14a}$$

$$\zeta^{(0)} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} = \zeta_1(\xi_1, \tau) + \zeta_2(\xi_2, \tau), \quad \zeta_j := \frac{\partial F_j}{\partial \xi_j}, \ (j = 1, 2) \tag{14b}$$

を得る．ここで，$F_1(\xi_1, \tau)$（$F_2(\xi_2, \tau)$）は ξ_1, τ（ξ_2, τ）の任意関数である．一方，$\phi_1^{(0)}$ に対しては

$$\chi^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + 2p\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \phi_1^{(0)} + \frac{\partial^2 \phi_1^{(0)}}{\partial \hat{z}^2} = 0, \ 0 < \hat{z} < 1 \tag{15a}$$

$$\frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial \hat{z}} = 0, \ \hat{z} = 1 \tag{15b}$$

$$\frac{1}{\chi^2} \left[\frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial \hat{z}} \right]_{\hat{z}=0} = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi_2} \tag{15c}$$

が成り立つ．さて，$\phi_1^{(0)}$ の形を

$$\phi_1^{(0)} = \Phi_1(\xi_1, \hat{z}, \tau) + \Phi_2(\xi_2, \hat{z}, \tau) \tag{16}$$

と仮定してよいであろう．もっぱら境界条件 (15c) に伴う流れがほしいからである．(15) を解くことによって，この形が得られればよいが，いまのところそれには成功していな

い．そこで，以下では，この形を仮定する．このとき，一般性を失うことなく，$j=1,2$ に対して

$$\chi^2\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\xi_j^2}+\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial\hat{z}^2}=0,\ 0<\hat{z}<1 \tag{17a}$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial\hat{z}}=0,\ \hat{z}=1 \tag{17b}$$

$$\frac{1}{\chi^2}\left[\frac{\partial\Phi_j}{\partial\hat{z}}\right]_{\hat{z}=0}=-\frac{\partial\zeta_j}{\partial\xi_j} \tag{17c}$$

が成り立つとしてよい．(17) をフーリエ変換を用いて解けば

$$\hat{\Phi}_j(\kappa_j,\hat{z},\tau)=i\chi\mathrm{sgn}(\kappa_j)\frac{\cosh(\chi|\kappa_j|(\hat{z}-1))}{\sinh(\chi|\kappa_j|)}\hat{\zeta}_j(\kappa_j,\tau) \tag{18}$$

を得る．ここで，$\hat{\Phi}_j$ および $\hat{\zeta}_j$ はそれぞれ Φ_j および ζ_j のフーリエ変換である．さらに逆変換して

$$\Phi_j(\xi_j,0,\tau)=\chi\mathcal{T}[\zeta_j],\quad \mathcal{T}[\zeta_j]:=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\chi}\coth\left(\frac{\pi(\xi_j'-\xi_j)}{2\chi}\right)\zeta_j(\xi_j')d\xi_j'. \tag{19}$$

これを次のオーダーで用いる．

$O(\epsilon)$ においては

$$\begin{aligned}2(1-p)\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial\xi_1\partial\xi_2} &= \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left[2\frac{\partial F_1}{\partial\tau}+\frac{2q}{\chi}\frac{\partial F_1}{\partial\xi_1}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\xi_1}\right)^2+2q\frac{\partial}{\partial\xi_1}\mathcal{T}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\xi_1}\right)\right]\\ &+ \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left[2\frac{\partial F_2}{\partial\tau}+\frac{2q}{\chi}\frac{\partial F_2}{\partial\xi_2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial\xi_2}\right)^2+2q\frac{\partial}{\partial\xi_2}\mathcal{T}\left(\frac{\partial F_2}{\partial\xi_2}\right)\right]\\ &+ \frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\left[((1+2p)F_2-2(1-p)\psi_1)\frac{\partial F_1}{\partial\xi_1}\right.\\ &+ \left.((1+2p)F_1-2(1-p)\psi_2)\frac{\partial F_2}{\partial\xi_2}\right]\end{aligned} \tag{20}$$

が成り立つ．ここで

$$q=\frac{\delta}{2(1+\Delta)\epsilon} \tag{21}$$

ψ_1,ψ_2 を

$$\psi_1=\frac{1+2p}{2(1-p)}F_2,\quad \psi_2=\frac{1+2p}{2(1-p)}F_1 \tag{22}$$

のように選ぶ．また，$f^{(1)}$ が永年項を含まない条件から

$$2\frac{\partial F_j}{\partial\tau}+\frac{2q}{\chi}\frac{\partial F_j}{\partial\xi_j}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial F_j}{\partial\xi_j}\right)^2+2q\frac{\partial}{\partial\xi_j}\mathcal{T}\left(\frac{\partial F_j}{\partial\xi_j}\right)=0,\quad (j=1,2). \tag{23}$$

あるいは ξ_j で微分して

$$\frac{\partial\zeta_j}{\partial\tau}+\frac{q}{\chi}\frac{\partial\zeta_j}{\partial\xi_j}+\frac{3}{2}\zeta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial\xi_j}+q\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\mathcal{T}[\zeta_j]=0\ \ (j=1,2). \tag{24}$$

が成り立つ．このとき，

$$f^{(1)} = G_1(\xi_1, \tau) + G_2(\xi_2, \tau)$$

と書ける．ただし，$G_1(\xi_1, \tau)$ （$G_2(\xi_2, \tau)$）は ξ_1, τ （ξ_2, τ）の任意関数である．従って，

$$f = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau) + \epsilon[G_1(\xi_1, \tau) + G_2(\xi_2, \tau)] + \cdots, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1(\xi_1, \tau) + \zeta_2(\xi_2, \tau) + \epsilon \left[\frac{\partial G_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial G_2}{\partial \xi_2} - \frac{q}{\chi}\zeta_1 + \frac{1}{4}\zeta_1^2 - q\frac{\partial}{\partial \xi_1}\mathcal{T}[\zeta_1] \right. \\ &- \left. \frac{q}{\chi}\zeta_2 + \frac{1}{4}\zeta_2^2 - q\frac{\partial}{\partial \xi_2}\mathcal{T}[\zeta_2] + \frac{1+p+p^2}{1-p}\zeta_1\zeta_2 \right] + \cdots \end{aligned} \tag{26}$$

と書ける．すなわち，最低次ではILW方程式で記述される波の重ね合わせであり，相互作用による効果は ψ_1, ψ_2 で記述される位相のずれと ζ の最後の項，$\zeta_1\zeta_2$ に比例する項で表される．$\zeta_1\zeta_2$ の係数は正であるから，相互作用によって振幅は重ね合わせよりも少し増加する．これは水面波ソリトンの相互作用と同様である．

ILW方程式 (24) は

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial \tau} + \frac{3}{2}\zeta_j\frac{\partial \zeta_j}{\partial \xi_j} + q\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - \xi_j)\zeta_j(\xi, \tau)d\xi = 0, \tag{27}$$

$$G(x) = \frac{1}{2\chi}[\coth\left(\frac{\pi x}{2\chi}\right) - \mathrm{sgn}(x)] \tag{28}$$

とも書ける．

ソリトン解は

$$\zeta_j = \frac{4qk_j}{3}\frac{\sin(k_j\chi)}{\cosh[k_j(\xi - c_j q\tau)] + \cos(k_j\chi)}, \quad (0 < k_j\chi < \pi), \tag{29a}$$

$$c_j = \frac{1}{\chi} - k_j\cot(k_j\chi) \tag{29b}$$

で与えられる．振幅は

$$\frac{4qk_j}{3}\tan(k_j\chi/2) \tag{30}$$

である．(29a) を積分すると

$$F_j(\xi_j, \tau) = \frac{4\delta}{3(1+\Delta)\epsilon}\arctan\left(\tan\left(\frac{k_j\chi}{2}\right)\tanh\frac{1}{2}(\xi_j - c_j q\tau)\right) \tag{31}$$

であるから，2つのILWソリトンの相互作用における位相のずれは

$$[\epsilon\psi_1]_{\xi_2=\infty} - [\epsilon\psi_1]_{\xi_2=-\infty} = \frac{1+2p}{1-p}\frac{2\delta k_2\chi}{3(1+\Delta)}, \tag{32a}$$

$$[\epsilon\psi_2]_{\xi_1=\infty} - [\epsilon\psi_2]_{\xi_1=-\infty} = \frac{1+2p}{1-p}\frac{2\delta k_1\chi}{3(1+\Delta)} \tag{32b}$$

で与えられる.

$\chi \to 0$ および $\chi \to \infty$ の極限を考えよう. $\chi \to 0$ に対しては, 展開

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi-\xi_j)\zeta_j(\xi,\tau)d\xi = \frac{\chi}{3}\frac{\partial\zeta_j}{\partial\xi_j} + \frac{\chi^3}{45}\frac{\partial^3\zeta_j}{\partial\xi_j^3} + O(\chi^5)$$

を使えば, (27) および (29) から, KdV 方程式

$$\frac{\partial\zeta_j}{\partial\tau} + \frac{3}{2}\zeta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial\xi_j} + \frac{q\chi}{3}\frac{\partial^3\zeta_j}{\partial\xi_j^3} = 0 \tag{33}$$

およびそのソリトン解

$$\zeta_j = \frac{2}{3}q\chi k_j^2 \mathrm{sech}^2\frac{k_j}{2}(\xi_j - \frac{1}{3}q\chi k_j^2\tau) \tag{34}$$

を得る. さらに, このソリトン解から計算される位相のずれも, (32) と完全に一致することが分かる. しかし, KdV 方程式 (33) は二層全体が浅いと仮定して導かれる KdV 方程式とは当然異なる. (33) はそのようにして得られる KdV 方程式において $h_1 \gg h_2$ とした極限になっている.

次に, $\chi \to \infty$ を考える. 単純に $\chi \to \infty$ としても, 方程式 (27) から BO 方程式は得られるが, (29) から BO ソリトン解は得られないことはよく知られている. それを得るためには

$$k_j\chi = \pi - \frac{k_j}{\lambda_j}$$

とおいて, $\lambda_j > 0$ を一定に保って, $\chi \to \infty$ と同時に $k_j \to +0$ とすればよい [11]. このような極限をとれば, (29) は BO ソリトン解

$$\zeta_j = \frac{8}{3}\frac{\lambda_j q}{\lambda_j^2(\xi_j - \lambda_j q\tau)^2 + 1} \tag{35}$$

に帰着し, 位相のずれ (32) も $k_j\chi \to \pi$ とすれば, BO ソリトンの弱い相互作用で得られる位相のずれと完全に一致する [4].

4 まとめ

本論文では, 二層流体モデルを用いて, ILW ソリトンの弱い相互作用を調べた. 摂動法の $O(1)$ において上層の速度ポテンシャルを得るために, 物理的には合理的と考えられる仮定を行って, 解を求めた. また, 得られた結果について, 上層の深さが浅い極限と深い極限を調べ, それぞれ KdV ソリトンの相互作用, BO ソリトンの相互作用の場合に帰

着することを見出した．しかし，この場合のKdV方程式は，二層全体が浅いとしたときのKdV方程式とはことなることに注意する必要がある．上層が浅い極限で二層全体が浅いとしたときのKdV方程式を得るためには展開を工夫するなり，Sugurら[16]がやったように高次まで進む必要があるかもしれない．

参考文献

[1] Tsuji, H. and Oikawa, M.: "Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth", Fluid Dyn. Res. **29** (2001) 251-267.

[2] Tsuji, H. and Oikawa, M.: "Two-dimensional interaction of solitary waves in a modified Kadomtsev-Petviashvili equation", J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 3034-3043.

[3] Tsuji, H. and Oikawa, M.: "Oblique interaction of solitons in an extended Kadomtsev-Petviashvili equation", J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 084401.

[4] Oikawa, M. and Tsuji, H.: "Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems", Fluid Dyn. Res. **38** (2006) 868-898.

[5] 辻　英一，及川正行："深さ依存性を考慮した二層流体中の孤立波の二次元相互作用の解析", 数理解析研究所講究録 No.1543 (2007) 86-96.

[6] Joseph, R.I.: "Solitary waves in a finite depth fluid", J. Phys. A:Math. Gen. **10** (1977) L225-227.

[7] Kubota,T., Ko, D.R.S. and Dobbs, L.D.: "Weakly-nonlinear, long internal gravity waves in stratified fluids of finite depth" , J. Hydronautics **12** (1978) 157-165.

[8] Chen, H.H. and Lee, Y.C.: "Internal-wave solitons of fluid with finite depth", Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 264-266.

[9] Satsuma, J., Ablowitz, M.J. and Kodama, Y.: "On an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth", Phys. Lett. A **73** (1979) 283-286.

[10] Kodama, Y., Ablowitz, M.J. and Satsuma, J.: "Direct and inverse scattering problems of the nonlinear intermediate lomg wave equation", J. Math. Phys. **23** (1982) 564-576.

[11] 薩摩順吉："ソリトンが油井をこわす—海水中の内部波ソリトン", 科学 **56** (1986) 332-338.

[12] Miles, J.W.: "Obliquely interacting solitary waves", J. Fluid Mech. **79** (1977) 157-169.

[13] 及川正行："Benjamin-Onoソリトンの弱い相互作用について", 九州大学応用力学研究所所報　第60号 (1984) 467-472.

[14] Matsuno, Y.: "Oblique interaction of interfacial solitary waves in a two-layer deep fluid", Proc. Roy. Soc. Lond. A **454** (1998) 835-856.

[15] Oikawa, M. and Yajima, N.: "Interactions of solitary waves — a perturbation approach to nonlinear systems —". J. Phys. Soc. Jpn. **34** (1973) 1093-1099.

[16] Segur, H. and Hammack, J.L.: "Soliton models of long internal waves", J. Fluid Mech. **118** (1982) 285-304.