

Xia spectrum について

神奈川大学 長 宗雄 (Muneo Chō)
新潟大学 古谷 正 (Tadasi Huruya)
東北薬科大学 棚橋浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)

1. Xia スペクトル

Xia スペクトルは, 作用素 $T = H + iK = U|T|$ の 2 つの分解に応じて定義される. 初めに Cartesian 分解のときについて述べる. ここでの作用素はヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の有界線形作用素である. その全体は $B(\mathcal{H})$ と書き, $T \in B(\mathcal{H})$ のスペクトルを $\sigma(T)$ と書く.

(1) $T = H + iK$ を Cartesian 分解とする. このとき

$$S^+(K) = s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH} K e^{-itH}, \quad S^-(K) = s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itH} K e^{itH}$$

として, $k \in [0, 1]$ に対して,

$$K_k = kS^+(K) + (1 - k)S^-(K)$$

と書く ($s - \lim$ の存在性などは Xia [11]). このとき, e^{itH}, e^{-itH} は unitary であるので,

$$\|K_k\| \leq k\|K\| + (1 - k)\|K\| = \|K\|, \quad HS^\pm(K) = S^\pm(K)H$$

を満たす. 従って $T_k = H + iK_k$ は normal 作用素である. よって (H, K_k) の joint approximate point spectrum $\sigma_{ja}(H, K_k)$ は non-empty である. そこで Xia スペクトルを次のように定義する.

[Def.1] $\sigma_X(T) = \bigcup_{0 \leq k \leq 1} \sigma_{ja}(H, K_k)$ を T の Xia スペクトルと呼ぶ.

このとき, 次の 2 つの定理が基本となる.

Theorem 1 (Xia, [11]). $T = H + iK$ が hyponormal ならば $\sigma(T) = \bigcup_{0 \leq k \leq 1} \sigma(T_k)$.

Theorem 2 (Xia, [10]). $T = H + iK$ が hyponormal ならば $\sigma(T) = \{a + ib : (a, b) \in \sigma_X(T)\}$.

n -tuple に対しては, 次のように定義する.

(1') $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ を doubly commuting n -tuple で $T_j = H_j + iK_j$ ($n = 1, 2, \dots, n$) とする. $Y = K_1 \cdots K_n$ として

$$S_j^+(Y) = s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_j} Y e^{-itH_j}, \quad S_j^-(Y) = s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itH_j} Y e^{itH_j}$$

とする. $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in [0, 1]^n$ に対して $Y_{\mathbf{k}} = \left[\prod_{j=1}^n (k_j S_j^+ + (1 - k_j) S_j^-) \right] (Y)$ と書くと, $(\mathbf{H}, Y_{\mathbf{k}})$ は可換な $(n+1)$ -tuple より joint approximate point spectrum $\sigma_{ja}(\mathbf{H}, Y_{\mathbf{k}})$ は non-empty である. そこで, 次のように定義する.

[Def.2] $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$ を commuting n -tuple of hermitian operators で Y を hermitian とするとき $\sigma_X(\mathbf{H}, Y) = \bigcup_{\mathbf{k} \in [0, 1]^n} \sigma_{ja}(\mathbf{H}, Y_{\mathbf{k}})$ と書き $\sigma_X(\mathbf{H}, Y)$ を (\mathbf{H}, Y) の Xia spectrum と呼ぶ.

$\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$ を commuting n -tuple of hermitian operators, $R \in B(\mathcal{H})$ に対して, 作用素 $\mathcal{D}_j : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ を次のように定義する.

$$\mathcal{D}_j(R) = i(H_j R - R H_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

このとき $\mathcal{D}_j(\mathcal{D}_k(R)) = \mathcal{D}_k(\mathcal{D}_j(R))$ が成り立つ. 従って, $\mathcal{D}_j \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k \mathcal{D}_j$ を満たす.

[Def.3] $(n+1)$ -tuple $(\mathbf{H}, Y) = (H_1, \dots, H_n, Y)$ が hyponormal とは

$$\mathcal{D}_{j_1} \cdots \mathcal{D}_{j_m} \geq 0 \quad \text{for all } 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$$

を満たすときとする. そして, 次の定理が成立する.

Theorem 3 (Xia, [10]). $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$ を commuting n -tuple of hermitian operators とする. もし, Y が hermitian で (\mathbf{H}, Y) が hyponormal のとき

$$\|\mathcal{D}_1 \cdots \mathcal{D}_n(Y)\| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot m_{n+1}(\sigma_X(\mathbf{H}, Y)),$$

ここで, m_{n+1} は \mathbf{R}^{n+1} 上のルベグ測度である. そこで, これを利用するために, 次の補題を用意する. (m_n は \mathbf{R}^n 上のルベグ測度である.)

Lemma 1. $(H_1 + iK_1, \dots, H_n + iK_n)$ を doubly commuting n -tuple of hyponormal operators とし $Y = K_1 \cdots K_n$ とする, このとき $\forall K_j \geq 0$ ならば (\mathbf{H}, Y) は hyponormal である.

証明. $\mathcal{D}_j(Y) = i(H_j Y - Y H_j) = i(H_j K_j - K_j H_j) \prod_{\ell \neq j} K_\ell$ であるので,

$$(\mathcal{D}_{j_1} \cdots \mathcal{D}_{j_m})(Y) = i[H_{j_1}, K_{j_1}] \cdots i[H_{j_m}, K_{j_m}] \prod_{\ell \neq j_1, \dots, j_m} K_\ell \geq 0 \quad (\forall 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n). \clubsuit$$

Theorem 4. $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ を doubly commuting n -tuple of hyponormal operators ($T_j = H_j + iK_j$ ($j = 1, \dots, n$)) とする, このとき, 次が成立する.

$$\|\prod_{j=1}^n (T_j^* T_j - T_j T_j^*)\| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \|K_1\| \cdots \|K_n\| \cdot m_n(\sigma_{ja}(\mathbf{H})).$$

証明. $a_j = \|K_j\|$ とし, $K_j + a_j (\geq 0)$ とおく. $Y(a) = (K_1 + a_1) \cdots (K_n + a_n)$ とおくと, このとき $(\mathbf{H}, Y(a))$ は hyponormal であり, かつ

$$\mathcal{D}_1 \cdots \mathcal{D}_n(Y(a)) = \Pi i[H_j, (K_j + a_j)] = \Pi i[H_j, K_j] = \frac{1}{2^n} \Pi(T_j^* T_j - T_j T_j^*).$$

次に, $\sigma_{ja}(\mathbf{H}, Y(a)_k) \subset \sigma_{ja}(\mathbf{H}) \times \sigma(Y(a)_k)$ かつ

$$Y(a)_k = \left[\Pi(k_j \mathcal{S}_j^+ + (1 - k_j) \mathcal{S}_j^-) \right](Y(a)) = \Pi \left(k_j \mathcal{S}_j^+(K_j) + (1 - k_j) \mathcal{S}_j^-(K_j) + a_j \right),$$

であるので, $\|Y(a)_k\| \leq 2^n \cdot \|K_1\| \cdots \|K_n\|$.
従って

$$\|\Pi_{j=1}^n (T_j^* T_j - T_j T_j^*)\| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \|K_1\| \cdots \|K_n\| \cdot m_n(\sigma_{ja}(\mathbf{H})). \clubsuit$$

この不等式は不満足である. 本当は次のようにしたい:

$$\|\Pi_{j=1}^n (T_j^* T_j - T_j T_j^*)\| \leq (\text{定数}) \cdot m(\sigma_T(\mathbf{T})),$$

ここで $\sigma_T(\mathbf{T})$ は \mathbf{T} の Taylor スペクトルである. Xia スペクトルと Taylor スペクトルの関係を述べるために写像 $f: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$f(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n) = (a_1, \dots, a_n, b_1 \cdots b_n).$$

と定義する. このとき次のスペクトル写像定理が成り立つ.

Theorem 5. $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ を doubly commuting n -tuple of hyponormal operators with $T_j = H_j + iK_j$ ($j = 1, \dots, n$) とする. このとき

$$f(\sigma_T(\mathbf{T})) = \sigma_X(\mathbf{T}),$$

ここで $\sigma_X(\mathbf{T}) = \sigma_X(\mathbf{H}, Y)$, $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$ で $Y = K_1 \cdots K_n$ である.

次に polar 分解のときについて述べる.

(2) $T = U|T|$ を polar 分解とし, U は unitary と仮定する.

$$S^+(|T|) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} U^{*n} |T| U^n, \quad S^- (|T|) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} U^n |T| U^{*n}$$

と記す. 一般には, U は partial isometry である. もし U が isometry なら,

$$V = \begin{pmatrix} U & I - UU^* \\ 0 & U^* \end{pmatrix}, |S| = \begin{pmatrix} |T| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S = V|S| = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば, このとき V は unitary であり

$$V^n |S| V^{*n} = \begin{pmatrix} U^n |T| U^{*n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. しかし

$$V^* |S| V = \begin{pmatrix} U^* |T| U & U^* |T| (I - UU^*) \\ (I - UU^*) |T| U & (I - UU^*) |T| (I - UU^*) \end{pmatrix},$$

なので

$$V^{*n} |S| V^n \neq \begin{pmatrix} U^{*n} |T| U^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

従って, isometry での Xia スペクトルの導入については open problem である.

$0 \leq k \leq 1$ に対して, $|T|_k = kS^+(|T|) + (1-k)S^-(|T|)$ とおく.

このとき, $U|T|_k = |T|_k U$ であるので, 作用素 $T_k = U|T|_k$ は normal である. 作用素 T の polar 分解による Xia スペクトル $\sigma_X(T)$ は $\sigma_X(T) = \bigcup_{k \in [0,1]} \sigma_{ja}(U, |T|_k)$ と定義する.

次に n -tuple について述べる.

(2') n -tuple $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ で polar 分解 $T_j = U_j |T_j|$ (U_j : unitary) のとき. まず, $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ を commuting n -tuple of unitary operators とし, $A \in B(\mathcal{H})$ に対して, 作用素 $\mathbf{Q}_j : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ を次のように定義する.

$$\mathbf{Q}_j(A) = A - U_j A U_j^*.$$

[Def.4] $A \geq 0$. (\mathbf{U}, R) が semi-hyponormal tuple とは次が成り立つときとする.

$$\mathbf{Q}_{j_1} \cdots \mathbf{Q}_{j_m}(A) \geq 0 \text{ for all } 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n.$$

上と同様に $0 \leq k \leq 1$ に対して, $A_k = kS^+(A) + (1-k)S^-(A)$ と書くことにすると, (\mathbf{U}, A_k) は可換な $(n+1)$ -tuple である. 従って, この joint approximate point spectrum $\sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_k)$ は non-empty である. そこで (\mathbf{U}, A) の Xia スペクトルは次のように定義する.

$$\sigma_X(\mathbf{U}, A) = \bigcup_{0 \leq k \leq 1} \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_k).$$

Theorem 6 (Xia, [10]). (\mathbf{U}, A) を semi-hyponormal tuple とする. このとき

$$\| \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_n(A) \| \leq \mu(\sigma_X(\mathbf{U}, A)) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{\sigma_X(\mathbf{U}, A)} d\theta_1 \cdots d\theta_n dr,$$

ここで μ は単位円周 \mathbf{T} の n 乗上の Haar 測度と \mathbf{R} 上のルベーグ測度の積である。

次に, $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ be a doubly commuting n -tuple of semi-hyponormal operators with unitary U_j ($T_j = U_j|T_j|$: polar decomposition) とする. $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ かつ $A = |T_1| \cdots |T_n|$ とすると, このとき

$$\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_n(A) = \Pi_j(|T_j| - |T_j^*|).$$

従って, 次の結果を持つ.

Theorem 7. $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ を doubly commuting n -tuple of semi-hyponormal operators with unitary U_j ($T_j = U_j|T_j|$: polar decomposition) とする. $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ とし $A = |T_1| \cdots |T_n|$ とおく. このとき

$$\| \Pi(|T_j| - |T_j^*|) \| \leq \mu(\sigma_X(\mathbf{U}, A)) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{\sigma_X(\mathbf{U}, A)} d\theta_1 \cdots d\theta_n dr.$$

Theorem 8. $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ を doubly commuting n -tuple of semi-hyponormal operators with unitary U_j ($T_j = U_j|T_j|$: polar decomposition) とする. $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ とし $A = |T_1| \cdots |T_n|$ とおく. このとき

(1) $(z_1, \dots, z_n, a) \in \sigma_X(\mathbf{U}, A) \implies \exists a_1, \dots, a_n \geq 0 : a = a_1 \cdots a_n$, かつ $(z_1 a_1, \dots, z_n a_n) \in \sigma_T(\mathbf{T})$.

(2) $(z_1 a_1, \dots, z_n a_n) \in \sigma_T(\mathbf{T}); |z_j| = 1, a_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) $\implies (z_1, \dots, z_n, a_1 \cdots a_n) \in \sigma_X(\mathbf{U}, A)$.

2. 新しい class の作用素の Xia スペクトル

もし $T = U|T|$ が $T^2 \neq 0$ の作用素で $|T^2| \geq U|T^2|U^*$ を満たすなら, このとき $S = U|T^2|$ とおくと, S は semi-hyponormal である. この条件を満たすとき, この作用素 T を power pusedu-semihyponormal と呼ぶことにする.

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ が doubly commuting n -tuple of operators $T_j = U_j|T_j|$ with unitary U_j で $|T_j^2| \geq U_j|T_j^2|U_j^* \quad \forall j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) とする. また $A = |T_1^2| \cdots |T_n^2|$ とおく. このとき $(|T_1^2|, \dots, |T_n^2|)$ は commuting n -tuple of positive operators であるので, $A \geq 0$ である.

$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ とおく. $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ は commuting n -tuple of unitary operators であ

$$\mathbf{Q}_j A = \left(\prod_{i \neq j} |T_i^2| \right) (|T_j^2| - U_j|T_j^2|U_j^*),$$

より,

$$Q_{j_1} \cdots Q_{j_m} A = \left(\prod_{i \neq j_1, \dots, j_m} |T_i^2| \right) \left(\prod_{i=j_1, \dots, j_m} (|T_i^2| - U_i |T_i^2| U_i^*) \right) \geq 0$$

for all $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$. 従って, (\mathbf{U}, A) は semi-hyponormal tuple であり, かつ

$$Q_1 \cdots Q_n A = \prod_{j=1}^n (|T_j^2| - U_j |T_j^2| U_j^*).$$

その結果, 次の2つの定理を得る.

Theorem 9. $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ を doubly commuting n -tuple of power pusedu-semihyponormal operators $T_j = U_j |T_j|$ with unitary U_j ($j = 1, \dots, n$) とする. $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ とし, $A = |T_1^2| \cdots |T_n^2|$ とおく. このとき

$$\sigma_X(\mathbf{U}, A) = \bigcup_{\mathbf{k} \in [0,1]^n} \sigma_{j_a}(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}}),$$

ただし, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in [0, 1]^n$ で $A_{\mathbf{k}} = \left[\prod_{j=1}^n (k_j \mathcal{S}_j^+ + (1 - k_j) \mathcal{S}_j^-) \right] (A)$.

Theorem 10. $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ を doubly commuting n -tuple of power pusedu-semihyponormal operators $T_j = U_j |T_j|$ with unitary U_j ($j = 1, \dots, n$) とする. $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ とし, $A = |T_1^2| \cdots |T_n^2|$ とおく. このとき

$$\| \prod_{j=1}^n (|T_j^2| - U_j |T_j^2| U_j^*) \| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{\sigma_X(\mathbf{U}, A)} d\theta_1 \cdots d\theta_n dr.$$

3. Examples

ここでは, 作用素 $T = U|T| \in B(\mathcal{H})$ で $|T^2| \geq U|T^2|U^*$ を満たす例を示し, 他のクラスとの関連について述べる.

$A, B, C \geq 0$ を 2×2 -行列とする. 作用素 T を $(\oplus_0^\infty \mathbb{C}^2) \oplus (\oplus_0^\infty \mathbb{C}^2)$ 上で, 次のように定義する

$$T = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ B & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & A & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \ddots \end{array} \right).$$

このとき

$$|T^2| = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{BA^2B} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{CB^2C} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right),$$

$$|T| = \left(\begin{array}{cccc|cccc} B & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right),$$

$$|T^*| = \left(\begin{array}{cccc|cccc} C & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right).$$

そこで,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = bQ \quad \text{かつ} \quad C = cQ \quad (0 < b, c)$$

とおく. このとき,

(1) $|T^2| \geq |T^*|^2$ からは

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}bQ = \sqrt{BA^2B} \geq C^2 = c^2Q \quad \text{かつ} \quad A^2 \geq B^2 = b^2Q$$

より $0 < b \leq 1$ かつ $0 < c^2 \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}b$ を得る.

(2) $|T| \geq |T^*|$ からは

$$A \geq B = bQ \geq C = cQ.$$

従って $0 < c \leq b \leq \sqrt{6}(\sqrt{2} - 1) = 1.0146\dots$.

$$(|T^*||T|^2|T^*|)^{\frac{1}{2}} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{CB^2C} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{BA^2B} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \end{array} \right),$$

(3) $|T^2| \geq (|T^*||T|^2|T^*|)^{\frac{1}{2}}$ からは

$$A^2 \geq \sqrt{BA^2B} = \frac{3\sqrt{2}}{4}bQ \geq \sqrt{CB^2C} = bcQ.$$

従って $0 < b \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.943\dots$ かつ $0 < c \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

この例は (1), (2), (3) について次のことが言える. 例えば, $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ とおく. このとき $\frac{2\sqrt{2}}{3} < c \leq 1$ とすれば, T は (1), (3) を満たし (2) を満たさない.

もし $1 < c \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ とすれば T は (3) を満たし, (1), (2) を満たさない. 次に, 2つのベクトル $\vec{0}, \vec{x}$ を次のものとする.

$$\vec{0} = (0, 0, \dots) \text{ そして } \vec{x} = (x_1, 0, 0, \dots),$$

ここで $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. このとき, $\|\vec{0} \oplus \vec{x}\| = \sqrt{2}$ かつ

$T(\vec{0} \oplus \vec{x}) = (Cx_1, 0, 0, \dots) \oplus (0, 0, 0, \dots)$ である. 次に

$$T^2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & BC & 0 & 0 & 0 & \dots \\ AB & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \end{array} \right),$$

であるので

$$T^2(\vec{0} \oplus \vec{x}) = (0, BCx_1, 0, 0, \dots) \oplus (0, 0, 0, \dots).$$

また

$$Cx_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad BCx_1 = bc \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

であるので,

$$2c^2 = \|T(\vec{0} \oplus \vec{x})\|^2 \leq \|T^2(\vec{0} \oplus \vec{x})\| \cdot \|\vec{0} \oplus \vec{x}\| = 2bc$$

は $c \leq b$ を導く. 従って, $b < c$. そこで $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ かつ $c = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ とおくと T は paranormal でないが, このとき $b < c$ であるので, 作用素 T は power pusedo-semihyponormal operator であり paranormal でない.

次に, $T^2 \neq 0$ で $|T^2| \geq U|T^2|U^*$ を満たす作用素 T のスペクトルなどの性質の研究に進むことになる. 手始めに, 「この作用素は normaloid か?」であるが, まだ証明できない. そこで, paranormal でない例 $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ で $c = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ のとき, 作用素 T は $|T^2| \geq U|T^2|U^*$ を満たすので調べると, これについては

$$r(T) = \|T\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

となって normaloid である. 従って, $\|T^n\| = \|T\|^n$ であるが, T^n の作用素を見ることから, $\|T^n\| = \|T\|^n$ が成り立つことも分かる.

References

- [1] M. Chō, Relations between the Taylor spectrum and the Xia spectrum, Proc. Amer. Math. Soc. 128(2000), 2357-2363.
- [2] M. Chō and T. Huruya, Putnam's inequality for p -hyponormal n -tuples, Glasgow Math. J. 41(1999), 13-17.
- [3] M. Chō, T. Huruya and K. Tanahashi, Xia spectrum for some class of operators, to appear in Integral Equations and Operator Theory.
- [4] M. Chō, R. Curto, T. Huruya and W. Zelazko, Cartesian form of Putnam's inequality for doubly commuting hyponormal n -tuples, Indiana Univ. Math. J. 49(2000), 1437-1447.
- [5] R. Curto, On the connectedness of invertible n -tuples, Indiana Univ. Math. J. 29(1980), 393-406.

- [6] R. Curto, P. Muhly and D. Xia, A trace estimate for p -hyponormal operators, *Integral Equations and Operator Theory* 6(1983), 507-514.
- [7] T. Furuta, *Invitation to linear operators*, Taylor and Francis, 2001.
- [8] C. R. Putnam, *Commutation properties of Hilbert space operators*, Springer-Verlag, 1967.
- [9] J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, *J. Funct. Anal.* 6(1970), 172-191.
- [10] D. Xia, On the semi-hyponormal n -tuple of operators, *Integral Equations and Operator Theory* 6(1983), 879-898.
- [11] D. Xia, *Spectral Theory of Hyponormal Operators*, Birkhäuser 1983.

Muneo Chō

Department of Mathematics, Kanagawa University, Yokohama, 221-8686 JAPAN
chiyom01@kanagawa-u.ac.jp

Tadasi Huruya

Department of Mathematics, Faculty of Education and Human Sciences, Niigata University, Niigata, 950-2181 JAPAN
huruya@ed.niigata-u.ac.jp

Kōtarō Tanahashi

Department of Mathematics, Tohoku College of Pharmacy, Sendai 981-8558, JAPAN
tanahasi@tohoku-pharm.ac.jp