

摂動と不動点

山形大・大学院理工学研究科 高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
山形大・大学院理工学研究科 三浦 毅 (Takeshi Miura)

始めに

古田不等式 20 周年を記念したこの RIMS 研究とご本人にお祝いを申し上げます。思えば 1986 年、芳賀義則先生の主催する日立関数解析学セミナーにおいて、藤井正俊さんが、所謂「古田不等式」を紹介し、古田先生の開発された例の連続的帰納法を用いてその証明を見せて頂いた事が、昨日のように思い出されます。あれから 20 余年、歳月の流れを感じずにはられません。

ところで、
どうでも良い事は流行に従う
大事な事は道徳に従う
芸術の事は自分に従う
は小津安二郎の座右の銘ですが、ここで芸術を数学に変換しても立派な銘になると思っています。古田先生は正にこの
「数学の事はご自分に従った」

つまりご自分を信じた信念の人であります。私達は本当に尊敬の念を禁じ得ません。さて本論の内容は Kim-Jun-Rassias の最近の論文に inspire され、それに従った感のあるものです。摂動と不動点は全く相反するものですが、これをうまく調和させると、素晴らしい世界が開けます。実際、浅田真央に代表されるスケートの世界があります。スケーターの回転の妙技は常にある一点を見つめる事に依ってなされると聞いた事があります。これは正に摂動と不動点の調和であります。これと同じ事が数学の世界でも起こると言うのが、本論の主題であります。

1. 概念

1940 年 S. M. Ulam は「距離群の ϵ -準同型の近くに真の準同型が存在するか？」という問題を提出した (cf. [9], [10]). これは

「近似解の近くに真の解があるか？」
と言う精神である。所で、数学の世界を支えるものは可換性であると信じている。例えば前出の準同型とは群演算と可換な写像の事である。この傳で行けば、Ulam の問題は

「近似可換図の近くに真の可換図 (commutative diagram) が存在するか？」
と一般化される。この問題を解決するとき、何故か摂動と不動点の相性の良さが問題となる。実際 1941 年 D. H. Hyers [4] は

「2つの Banach 空間 X, Y の間の近似加法的写像 $f: X \rightarrow Y$ の近くには
唯一の加法的写像 T が存在する」

事を示し、Ulam の問題の部分的肯定解を与えている。彼は $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x)$ ($x \in X$) と定義することにより、摂動と不動点の相性の良さから上の定理を証明している。しかし、これが Picard の逐次近似法の一つであると看破し、この種の問題に不動点定理が関与することを明確に述べたのは、Kim-Jun-Rassias [5] による最近の論文であろう。彼等はある種の 2 項演算と写像の可換性を謳った Euler-Lagrange 関数方程式： $f(ax + by) + f(ax - by) + 2af(-x) = 0$ に関する Hyers-Ulam-Rassias 安定性を考察した際、Margolis-Diaz [6] による一般化された完備距離空間上の不動点定理を用いている。

さて我々は次のような 2 つの可換図を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma & & \circ \\
 X \rightarrow X & & X \times X \rightarrow X \\
 \\
 \text{(I)} \quad g \downarrow & \downarrow f & \text{(II)} \quad g \times g \downarrow \quad \downarrow f \\
 \\
 Y \rightarrow Y & & Y \times Y \rightarrow Y \\
 \tau & & \Delta
 \end{array}$$

もし Y が距離空間であれば、これ等に対する近似可換図が考えられるが、このとき、これ等の近似可換図の近くに真の可換図が存在するかという Ulam の精神にのっとりた問題を考える。勿論 Hyers [4] や Kim-Jun-Rassias [5] 等の論文は (II) 型に属するが、もっと一般的に扱ったものとしては G.-L. Forti [1, 2] 等がある。

ここでは我々は直接 (I) 型を考察するのではなく、(II) 型を考察し、その特別な場合として (I) 型の部分的肯定解を得ると言う形を取る。

以下 X を集合、 (Y, d_Y) を完備距離空間、 f, g を X から Y への写像とする。また σ, τ をそれぞれ X, Y 上の自己写像とする。更に \circ, Δ をそれぞれ X, Y 上の 2 項演算とする。

2. Banach の不動点定理の例

集合 X 上の非負実数値関数 φ を考え、

$$\Delta_{f, \varphi} = \{g : X \rightarrow Y \mid d_Y(f(x), g(x)) \leq K_g \varphi(x) \text{ for all } x \in X \text{ and some } K_g \geq 0\}$$

と置く。このとき距離

$$d_{f, \varphi}(g, h) = \inf \{K \geq 0 : d_Y(g(x), h(x)) \leq K \varphi(x) (\forall x \in X)\}$$

のもとで、 $(\Delta_{f, \varphi}, d_{f, \varphi})$ は完備距離空間を作る。次に各 $h : X \rightarrow Y, x \in X$ に対して、 $(Th)(x) = \tau h(\sigma x)$ と置くと、条件

$$\beta_\tau := \sup_{y_1 \neq y_2} \frac{d_Y(\tau y_1, \tau y_2)}{d_Y(y_1, y_2)} < \infty, \beta_\varphi := \sup_{\varphi(x) \neq 0} \frac{\varphi(\sigma x)}{\varphi(x)} < \infty \text{ and } \tau f \sigma \in \Delta_{f, \varphi}$$

のもとで、

$$T(\Delta_{f, \varphi}) \subseteq \Delta_{f, \varphi}, d_{f, \varphi}(Tg, Th) \leq \beta_\tau \beta_\varphi d_{f, \varphi}(g, h) (\forall g, h \in \Delta_{f, \varphi})$$

が成り立つ。このとき、仮定 $\beta_\tau \beta_\varphi < 1$ のもとで、Banach の不動点定理から、 T は唯一の不動点 $f_\infty \in \Delta_{f, \varphi}$ を持つ。更に

$$d_{f, \varphi}(f, f_\infty) \leq \frac{d_{f, \varphi}(f, Tf)}{1 - \beta_\tau \beta_\varphi} \text{ and } \lim_n d_Y((T^n f)(x), f_\infty(x)) = 0 (\forall x \in X)$$

が成り立つ。

我々はこの不動点定理を用いて次の節の安定定理を証明することができる。

3. Hyers-Ulam Rassias 型安定定理

先ず (II) 型の安定定理の概略を述べる。 $X \times X$ 上の非負実数値関数 ε 及び X 上の非負実数値関数 δ を与えると、2 項演算 \circ, Δ 及び関数 ε, δ に関する適当な条件のもとで、次の安定性定理が成り立つ：

If $d_Y(f(x_1 \circ x_2), g(x_1) \Delta g(x_2)) \leq \varepsilon(x_1, x_2)$ and $d_Y(f(x), g(x)) \leq \delta(x)$ for all $x_1, x_2, x \in X$, then there exists a unique mapping $f_\infty : X \rightarrow Y$ such that $f_\infty(x_1 \circ x_2) = f_\infty(x_1) \Delta f_\infty(x_2)$, $d_Y(f(x), f_\infty(x)) \leq A\varepsilon(x, x) + B\delta(x)$ and $d_Y(g(x), f_\infty(x)) \leq A\varepsilon(x, x) + C\delta(x)$ for all $x_1, x_2, x \in X$ and for some positive constants A, B and C .

次に (I) 型の安定定理の概略を述べる。先ず各 $x_1, x_2 \in X$ に対して、 $x_1 \circ x_2 = \sigma(x_1)$ と定義する。また各 $y_1, y_2 \in Y$ に対して、 $y_1 \Delta y_2 = \tau(y_1)$ と定義する。次に σ は全単射と仮定し、 σ^{-1} を上の定理の σ だと思い、 X 上の非負実数値関数 ε, δ を与えると、

やはり適当な条件のもとで、上の定理は次の (I) 型安定定理を導く :

If $d_Y(f(\sigma x), \tau g(x)) \leq \varepsilon(x)$ and $d_Y(f(x), g(x)) \leq \delta(x)$ for all $x \in X$, then there exists a unique mapping $f_\infty : X \rightarrow Y$ such that $f_\infty(\sigma x) = \tau f_\infty(x)$, $d_Y(f(x), f_\infty(x)) \leq A\varepsilon(x) + B\delta(x)$ and $d_Y(g(x), f_\infty(x)) \leq A\varepsilon(x) + C\delta(x)$ for all $x_1, x_2, x \in X$ and for some positive constants A, B and C .

4. 応用

A, B を可換 Banach 環, X, Y をそれぞれ Banach A -module, Banach B -module とする。また $p, q \in \mathbf{R}$, $a, b \in A, c, d \in B$ を任意に固定し, θ を正の定数とする。このとき次の系を得る。

系 1. 元 $a+b$ は可逆かつ $|c+d| \max\{|(a+b)^{-1}|^p, |(a+b)^{-1}|^q\} < 1$ と仮定する。もし

$$\left| f(ax_1 + bx_2) - cf(x_1) - df(x_2) \right| \leq \theta(|x_1|^p + |x_2|^q) \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

であれば, 次の性質を持つ唯一の写像 $f_\infty : X \rightarrow Y$ が存在する :

$$f_\infty(ax_1 + bx_2) = cf_\infty(x_1) + df_\infty(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

and

$$\left| f(x) - f_\infty(x) \right| \leq \frac{\theta \max\{|(a+b)^{-1}|^p, |(a+b)^{-1}|^q\} (|x|^p + |x|^q)}{1 - |c+d| \max\{|(a+b)^{-1}|^p, |(a+b)^{-1}|^q\}} \quad (\forall x \in X).$$

系 2. 元 $c+d$ は可逆かつ $|(c+d)^{-1}| \max\{|a+b|^p, |a+b|^q\} < 1$ と仮定する。もし

$$\left| f(ax_1 + bx_2) - cf(x_1) - df(x_2) \right| \leq \theta(|x_1|^p + |x_2|^q) \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

であれば, 次の性質を持つ唯一の写像 $f_\infty : X \rightarrow Y$ が存在する :

$$f_\infty(ax_1 + bx_2) = cf_\infty(x_1) + df_\infty(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

and

$$\left| f(x) - f_\infty(x) \right| \leq \frac{\theta |(c+d)^{-1}| (|x|^p + |x|^q)}{1 - |(c+d)^{-1}| \max\{|a+b|^p, |a+b|^q\}} \quad (\forall x \in X).$$

注意。 $A=B=C, a=b=c=d=1, p=q$ とする。このとき系 1 は Z. Gajda の結果 [3] :

$$p > 1 \text{ and } \left| f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) \right| \leq \theta(|x_1|^p + |x_2|^p) \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

$$\Rightarrow \exists! f_\infty : X \rightarrow Y : \left| f(x) - f_\infty(x) \right| \leq \frac{2\theta}{2^p - 2} |x|^p \quad (\forall x \in X)$$

を導く。

また系 2 は D. H. Hyers [4] ($p=0$ の case), Th. M. Rassias の結果 [8] ($0 < p < 1$ の case) 及び Miura-Hirasawa-Takahasi の結果 [7] ($p < 0$ の case) :

$$p < 1 \text{ and } \left| f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) \right| \leq \theta(|x_1|^p + |x_2|^p) \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

$$\Rightarrow \exists! f_\infty : X \rightarrow Y : \left| f(x) - f_\infty(x) \right| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p \quad (\forall x \in X)$$

を導く。

References

1. G.-L. Forti, An existence and stability theorem for a class of functional equations, *Stochastica*, 4(1980), 23-30.
2. G.-L. Forti, Comments on the core of the direct method for proving Hyers-Ulam stability of functional equations, *J. Math. Anal. Appl.* 295(2004), 127-133.
3. Z. Gajda, On stability of additive mappings, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 14(1991), 431-434.
4. D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 27(1941), 222-224.
5. H. M. Kim, K. W Jun and J. M. Rassias, Extended stability problem for alternative Cauchy-Jensen mappings, submitted.
6. B. Margolis and J. B. Diaz, A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74(1968), 305-309.
7. T. Miura, G. Hirasawa and S.-E. Takahasi, Stability of multipliers on Banach algebras, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 45-48(2004), 2377-2381.
8. Th. M. Rassias, On the stability of the linear mapping in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 72(1978), 297-300.
9. S. M. Ulam, A collection of mathematical problems, *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*, no. 8, Interscience, New York-London, 1960.
10. S. M. Ulam, *Sets, Numbers, and Selected Works*, Mit Press, Cambridge, MA, 1974.