

反応拡散系におけるパターンダイナミクス

栄 伸一郎
九州大学大学院数理学研究院

1. 序.

反応拡散方程式系はさまざまな現象に見られる時・空間パターンの形成に関する問題を研究するために、これまで広く扱われてきたモデル方程式の一つである。特に空間次元が 1 次元の問題に対しては既に多くの研究結果があり、その成果を通して種々の重要な解のタイプが提出され解析されてきた。その中でもパルス状、またはフロント状に局在したパターンは一つの典型的な解のタイプであり多くの重要な例を含んでいる。

この講義録では特に空間 1 次元の反応拡散方程式系

$$u_t = Du_{xx} + F(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

を考え、(1.1) に現れるパルス状またはフロント状局在解の運動を考えることにする。ここで $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ($d_j \geq 0$) であり F は \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n へのなめらかな関数とする。以降の議論の便宜のためにここで幾つかの定義を与えておく。

$S(x) \in \mathbb{R}^n$ が定常解であるとは $S(x)$ が (1.1) の右辺を 0 として満たすとき、すなわち

$$0 = DS_{xx} + F(S), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

を満たすときいう。この講義録では定常解の中でも特に $x \rightarrow \pm\infty$ における極限が存在するような $S(x)$ について考え、 $S(x) \rightarrow S_{\pm}$ ($x \rightarrow \pm\infty$) とする。 $S_- = S_+$ のとき $S(x)$ をパルス状定常解、 $S_- \neq S_+$ のときフロント状定常解と呼ぶことにする (図 1)。

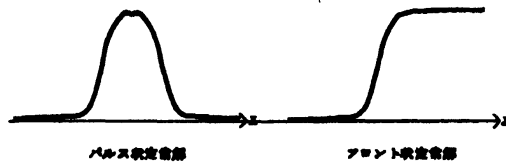


FIG. 1. パルス状局在解とフロント状局在解:

パルス状定常解のときは、解に適当に定数を加減することによって一般性を失うことなく $S_- = S_+ = 0$ としてよいことに注意しておく。

注 1.1. 定常解以外にも進行波解と呼ばれる解があるが、これは一定波形、一定スピードで進むような局在解のことで、ほぼ定常解に近い性質を持っており、その取り扱い方もほとんど変わらない。しかし議論が煩雑になるので、この講義録では扱わないことにする。興味のある読者は [3]などを参照のこと。それでは、実際にパルス状またはフロント状に局在した定常解を有するモデル方程式の例をいくつか挙げてみよう。いずれの例も、係数がある特定の条件を満たすときにその存在が確認されているわけであるが、ここでは簡単な紹介にとどめ、条件等については特に述べない。詳しくは参考文献を参照されたい。

1) Allen-Cahn 方程式 ([12]);

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^1. \tag{1.3}$$

ここで $f(u) = \frac{1}{2}u(1-u^2)$ とする. また, 以降この講義録を通して ε は正の微小パラメータとする. (1.3) においては $S(x) = \tanh \frac{x}{2\varepsilon}$ は右辺をちょうど 0 に, すなわち

$$\varepsilon^2 S_{xx} + f(S) = 0$$

を満たすことが容易に分かり, 定常解である. また $S(x) \rightarrow \pm 1$ ($x \rightarrow \pm\infty$) であるから $S(x)$ はフロント状定常解である.

2) Gray-Scott 方程式 ([14], [19]);

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - uv^2 + A(1-u), \\ v_t = D_v v_{xx} - Bv + uv^2, \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (1.4)$$

ここで A, B, D は正定数である. この方程式に対しては [2] などにより, 定数の適当な条件のもとで $S(x) \rightarrow (1, 0)$ ($|x| \rightarrow \infty$) を満たすパルス状定常解 $S(x) = (u(x), v(x))$ が存在することがその安定性ととも考察されており, その形は図 2 のようなものである.

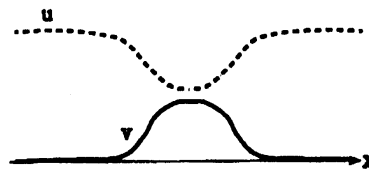


FIG. 2. Gray-Scott モデルにおけるパルス状定常解.

3) 2種競合モデル ([15]);

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1-u-av), \\ v_t = dv_{xx} + v(c-bu-v), \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (1.5)$$

ここで a, b, c, d はすべて正定数である. [15] により適当な条件下で $S(x) \rightarrow S_- := (0, c)$ ($x \rightarrow -\infty$), $S(x) \rightarrow S_+ := (1, 0)$ ($x \rightarrow +\infty$) を満たすフロント状定常解 $S(x) = (u(x), v(x))$ が存在することがその安定性ととも考察されており, その形は図 3 のようなものである.

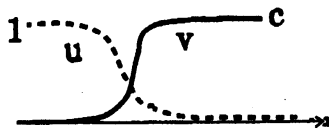


FIG. 3. 2種競合モデルにおけるフロント状定常解.

これ以外にもさまざまなパルス状定常解やフロント状定常解の例があるが, 紙面の都合上これ以上は挙げない. 興味のある読者はいろいろな参考文献に当たってみることをお勧めする.

さて, この講義録の目的は, 上で述べたようなパルス状定常解やフロント状定常解が x -軸上に複数存在した場合, どのように振る舞うかということを開くことである. そうした問題の典型例として, 例 1) で述べた Allen-Cahn 方程式 (1.3) のフロント状定常解同士の相互作用の問題がある. (1.3) は方程式が平行移動や折り返しに関して不変であるから,

一つのフロント状定常解 $S(x) = \tanh \frac{x}{2\varepsilon}$ を任意に平行移動したもの $S(x-l)$ や折り返したもの $S(-x+l)$ もフロント状定常解となる. それでは x -軸上に2つのフロント状局在定常解 $S_1(x) := S(x-l_1)$ と $S_2(x) := S(-x+l_2)$ ($l_1 < l_2$) があつた場合それらはどのように振る舞うであろうか (図4). これに対して ε が十分小のときその運動を与える方程式

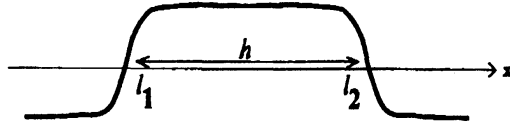


FIG. 4. 2つのフロント状局在定常解 S_1 と S_2 .

として近似的に

$$\begin{cases} \dot{l}_1 = 12\varepsilon e^{-\frac{1}{2}h}, \\ \dot{l}_2 = -12\varepsilon e^{-\frac{1}{2}h} \end{cases} \quad (1.6)$$

が導かれた ([7], [16]). ここで $h = l_2(t) - l_1(t)$ である. この結果は後に [1] や [13] によって厳密に証明された. (1.6) において辺々引くことによって

$$\dot{h} = -24\varepsilon e^{-\frac{1}{2}h} < 0$$

を得る. これは2つのフロントが引き合うことを示している. パターンの時間発展の立場から見ると, フロントが引きあい衝突消滅することによって, 最初あつた複数のフロント状定常解が徐々にその数を減らしていく, いわゆる粗視化の過程を経ていくことが分かる. このように, 局在解同士の相互作用を解析することはパターンの時間発展を考察する上で大変重要な情報を与えてくれることが期待される.

それでは次に, 一般にどのようにしてその相互作用を記述する方程式を導くことができるかを見ていくことにする.

2. 相互作用方程式の導出.

この節では局在解同士の相互作用を記述する方程式を形式的に導く方法を示す. 簡単のためパルス状定常解同士の相互作用についてのみ考えることにするが, その前に安定性の概念について述べておく.

反応拡散系 (1.1) が $S(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$) を満たすパルス状定常解 $S(x)$ を持ったとする. $S(x)$ が定常解であればそれを任意に平行移動したもの $S(x-l)$ もすべて定常解となるから安定性の概念は普通とは若干異なり以下のようなになる.

$S(x-l)$ という形の関数からなる定常解の族を

$$\mathcal{M} := \{S(x-l); l \in \mathbb{R}\}$$

と置く. 集合 \mathcal{M} の近くを初期値として出発した (1.1) の解 $u(t, x)$ が $\text{dist}\{u(t, \cdot), \mathcal{M}\} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) を満たすとき \mathcal{M} を軌道漸近安定という. また, ある $l^* \in \mathbb{R}^1$ が存在して $u(t, x) \rightarrow S(x-l^*)$ ($t \rightarrow \infty$) となるとき定常解族 \mathcal{M} は漸近安定という. 定常解族の漸近安定性に関して次の結果がある (例えば [8] などを参照).

微分作用素

$$Lu := Du_{xx} + F'(S(x))u, \quad x \in \mathbb{R}$$

を $S(x)$ に関する線形化作用素という。ここで $F'(S(x))$ は $S(x)$ における写像 $F : R^n \rightarrow R^n$ の微分を表し n 次の正方行列である。このとき 0 は必ず L の固有値になることに注意しておく。なぜなら $S(x)$ は (1.2) を満たすから x で微分することによって $LS_x = 0$ となり、 0 は S_x を固有関数に持つ固有値であることが分かる。

補題 2.1. 0 が L の単純固有値でそれ以外のスペクトルが虚軸から一様に離れて左半平面内にあるとする。このとき集合 \mathcal{M} は定常解族として漸近安定である。すなわち、ある正定数 C, γ があって、 \mathcal{M} の十分近くから出発した解 $u(t, x)$ に対してある $l^* \in R^1$ が存在し

$$|u(t, x) - S(x - l^*)| \leq Ce^{-\gamma t}$$

となる。

線形化作用素 L が補題 2.1 の仮定を満たすとき $S(x)$ を線形化の意味で安定と呼ぶことにする。

以上の準備をした上で、パルス状定常解の相互作用を考える。今 x -軸上に、それぞれが単独で存在した場合は線形化の意味で安定な 2 つのパルス状定常解 $S(x - l_1)$ と $S(x - l_2)$ がその距離を十分大 ($h = l_2 - l_1 \gg 1$) としてあったとする。各々のパルス状定常解は安定であるから (1.1) の解 $u(t, x)$ は近似的にその和で表されると期待される。すなわち

$$u(t, x) = S(x - l_1(t)) + S(x - l_2(t)) + v(t, x) \quad (2.1)$$

と表されると仮定する。ただし $v(t, x)$ や l_j は十分小とする。ここで l_j は $l_j = l_j(t)$ の時間微分を表す。

(2.1) を (1.1) に代入するとまず左辺は

$$u_t = -l_1 S_x^1 - l_2 S_x^2 + v_t \quad (2.2)$$

となる。ここで $S^j(x) := S(x - l_j)$ である。一方、右辺を計算するために (1.1) の右辺を $\mathcal{L}(u) := Du_{xx} + F(u)$ と置くと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= \mathcal{L}(S^1 + S^2 + v) \\ &= \mathcal{L}(S^1 + S^2) + \mathcal{L}'(S^1 + S^2)v + O(v^2) \end{aligned}$$

となる。ただし $\mathcal{L}'(S^1 + S^2)v = Dv_{xx} + F'(S^1 + S^2)v$ である。

$S^1(x) = S(x - l_1)$ の運動を考えよう。 $x = l_1$ の近傍では $S^2(x) = S(x - l_2)$ は十分小であるから近似的に $\mathcal{L}'(S^1 + S^2)v \simeq \mathcal{L}'(S^1)v$ と思ってよいであろう。また、 v に関する高次項を無視することにすれば右辺 $\mathcal{L}(u)$ は $x = l_1$ の近傍では

$$\mathcal{L}(S^1 + S^2) + \mathcal{L}'(S^1)v \quad (2.3)$$

で与えられると期待される。一方 (2.2) において $x = l_1$ の近傍ではやはり l_2 及び S_x^2 とも小さいと仮定されるから (2.2) は

$$-l_1 S_x^1 + v_t \quad (2.4)$$

となる。以上 (2.3), (2.4) より結局 $x = l_1$ の近傍において

$$v_t = \mathcal{L}'(S^1)v + \mathcal{L}(S^1 + S^2) + l_1 S_x^1 \quad (2.5)$$

を得る. $x - l_1 \rightarrow x$ と変数を変換すると

$$v_t = \mathcal{L}'(S(x))v + \mathcal{L}(S(x) + S(x-h)) + \dot{l}_1 S_x, \quad (2.6)$$

$h = l_2 - l_1$ となる. これが $x = l_1$ の近傍における剰余項 v の満たす方程式である. 微分作用素 $Lv = \mathcal{L}'(S(x))v = Dv_{xx} + F'(S(x))v$ は方程式 (1.1) の定常解 $S(x)$ に関する線形化作用素である. このとき (2.6) は

$$v_t = Lv + g, \quad (2.7)$$

$g = \mathcal{L}(S(x) + S(x-h)) + \dot{l}_1 S_x$ と表される. (2.7) において剰余項 v が t とともに大きくならないための条件はその非斉次項 g が L の共役作用素の固有関数と直交することである. すなわち $L^* := D\partial_x^2 + {}^t F'(S(x))$ に対して $L^* \phi^* = 0$ となる非自明な関数 ϕ^* を用いて $\langle g, \phi^* \rangle_{L^2} = 0$ が成立することである. ここで ${}^t F'(S(x))$ は $F'(S(x))$ の転置行列を表す. ϕ^* は定数倍の自由度があるので条件

$$\langle S_x, \phi^* \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} \langle S_x, \phi^* \rangle dx = 1 \quad (2.8)$$

によって正規化しておく. このとき $\langle g, \phi^* \rangle_{L^2} = 0$ より

$$\dot{l}_1 = -\langle \mathcal{L}(S(x) + S(x-h)), \phi^* \rangle_{L^2} =: -H_1(h) \quad (2.9)$$

を得る. 同様に $x = l_2$ の近傍で考えることによって

$$\dot{l}_2 = -\langle \mathcal{L}(S(x) + S(x+h)), \phi^* \rangle_{L^2} =: -H_2(h) \quad (2.10)$$

を得る. (2.9), (2.10) が2つのパルス状局在解の運動を与える方程式である. 特に辺々引くことによってパルス間 $h = l_2 - l_1$ のみの方程式

$$\dot{h} = H_1(h) - H_2(h) \quad (2.11)$$

を得る.

3. 相互作用方程式の妥当性.

前節では形式的な考察によって相互作用方程式を導出したがそれらは次のように正当化される ([3]).

3.1. パルス状定常解の相互作用. $S(x)$ をパルス状定常解とする.

$$\delta(h) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(S(x) + S(x-h))|$$

と置く. $\mathcal{L}(S(x)) = \mathcal{L}(S(x-h)) = 0$ であるから $\lim_{h \rightarrow \infty} \delta(h) = 0$ が成り立つことに注意しておく. また, $\tau(l)u = u(x-l)$ と定義する (平行移動作用素). 最後に $S(x)$ は線形化の意味で安定であると仮定する. すなわち $S(x)$ に関する線形化作用素 L のスペクトルが0と残りは複素平面の上の左半分に, 虚軸から一様に離れて存在すると仮定する. 先にも注意したように $LS_x = 0$ であるから0は必ず L の固有値で対応する固有関数は S_x である.

このとき次の結果が成り立つ.

定理 3.1. (1.1)において初期値が $S(x-l_1) + S(x-l_2)$ ($l_1 \ll l_2$) に十分近いなら解 $u = u(t, x)$ はある正定数 C があって

$$|u(t, x) - \tau(l(t))\{S(x) + S(x-h(t))\}| \leq C\delta(h(t))$$

となる。また,

$$\dot{h} = H_1(h) - H_2(h) + O(\delta^2), \quad (3.1)$$

$$\dot{i} = -H_1(h) + O(\delta^2) \quad (3.2)$$

が成立する。ここで $\delta = \delta(h(t))$ である。

注 3.1. $H_j(h) = O(\delta(h))$ であるから (3.1), (3.2) において h が十分大である限り常に $H_j(h)$ が $O(\delta^2)$ に比べて支配的である。

h の運動が本質的に (2.11) で与えられることが分かったが、その具体的な運動を見るためには $H_j(h)$ の関数形が分かる必要がある。しかし、 $H_j(h)$ は共役作用素の固有関数 $\phi^*(x)$ などを含んでおり、一般には求めるのが困難である。次の結果はある場合には大変単純な形で $H_j(h)$ が与えられることを主張する。

パルス状定常解 $S(x)$ が対称で $|x| \rightarrow \infty$ で指数的に 0 に近づくものとする。すなわち、ある正定数 α とあるベクトル $a \in R^n$ があって

$$S(x) \rightarrow e^{-\alpha|x|} a \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

が成立するとする。またこのとき、 $\phi^*(x)$ は奇関数に取ることができるが、 $\phi^*(x)$ の漸近形に関しても同様の性質

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{-\alpha x} a^* \quad (x \rightarrow \infty)$$

がある $a^* \in R^n$ について成り立つと仮定する。このとき

定理 3.2. ある $\gamma > 0$ があって

$$H_1(h) = M_0 e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma h})),$$

$$H_2(h) = -M_0 e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma h}))$$

が成り立つ。 M_0 は

$$M_0 = 2\alpha \langle Da, a^* \rangle$$

で与えられる定数である。従って特に

$$\dot{h} = 2M_0 e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma h}))$$

を得る。

この定理より、パルス状定常解の相互作用は M_0 の符号でほぼ決まることが分かる。すなわち $M_0 > 0$ ならば反発的であり、 $M_0 < 0$ ならば互いに引きあうことになる。

これらの定理の証明や進行波まで含めた一般解については [3] を参照されたい。

3.2. フロント状定常解の相互作用. $S(x)$ をフロント状定常解とし $S(x) \rightarrow S_{\pm}$ ($x \rightarrow \pm\infty$) を満たすとする. 2つのフロント解 $S(x-l_1)$ と $S(-x+l_2)$ の相互作用を考えるが, パルス解の相互作用のときとほぼ同じ結論が成り立つ.

$$\delta(h) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(S(x) + S(-x+h) - S_+)|,$$

$$H_1(h) := \langle \mathcal{L}(S(x) + S(-x+h) - S_+), \phi^*(x) \rangle_{L^2},$$

$$H_2(h) := \langle \mathcal{L}(S(x) + S(-x+h) - S_+), \phi^*(-x) \rangle_{L^2}$$

とそれぞれ置く. このとき

定理 3.3. (1.1) において初期値が $S(x-l_1) + S(-x+l_2) - S_+$ ($l_1 \ll l_2$) に十分近いなら解 $u = u(t, x)$ はある正定数 C があって

$$|u(t, x) - \tau(l(t))\{S(x) + S(-x+h(t)) - S_+\}| \leq C\delta(h(t))$$

となる. また,

$$\dot{h} = H_1(h) + H_2(h) + O(\delta^2), \quad (3.3)$$

$$\dot{i} = -H_1(h) + O(\delta^2) \quad (3.4)$$

が成立する. ここで $\delta = \delta(h(t))$ である.

$H_j(h)$ の具体的な関数形は次のように求めることができる.

ある正定数 α_{\pm} とベクトル $a_{\pm} \in \mathbb{R}^n$ があって

$$S(x) - S_{\pm} \rightarrow e^{-\alpha_{\pm}|x|} a_{\pm} \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

が成立するとする. またこのとき, $\phi^*(x)$ の漸近形についても同様の性質

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{-\alpha_{\pm}x} a_{\pm}^* \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

がある $a_{\pm}^* \in \mathbb{R}^n$ について成り立つと仮定する. このとき

定理 3.4. ある $\gamma > 0$ があって

$$H_1(h) = M_+ e^{-\alpha_+ h} (1 + O(e^{-\gamma h})),$$

$$H_2(h) = M_+ e^{-\alpha_+ h} (1 + O(e^{-\gamma h}))$$

が成り立つ. M_+ は

$$M_+ = 2\alpha_+ \langle Da_+, a_+^* \rangle$$

で与えられる定数である. 従って特に

$$\dot{h} = 2M_+ e^{-\alpha_+ h} (1 + O(e^{-\gamma h}))$$

を得る.

4. 応用例.

ここでは応用例として Allen-Cahn 方程式 (1.3) におけるフロント解 $S(x) = \tanh \frac{x}{2\varepsilon}$ の相互作用方程式を 3 節の結果を用いて導出してみよう.

まず $S(x) \rightarrow \pm 1$ ($x \rightarrow \pm\infty$) より $S_{\pm} = \pm 1$ である. このとき

$$S(x) - 1 \rightarrow -2e^{-\frac{x}{2\varepsilon}} \quad (x \rightarrow \infty)$$

であるから

$$\delta(h) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(S(x) + S(-x+h) - S_{\pm})| = O(e^{-\frac{h}{2\varepsilon}})$$

である. また線形化作用素は $Lv = \varepsilon^2 v_{xx} + f'(S(x))v$ よりその共役作用素は L と一致する; $L^* = L$. 従って (2.8) により正規化された $L^* = L$ の固有関数 $\phi^*(x)$ は

$$\phi^*(x) = \frac{3\varepsilon}{2} S_x(x)$$

と求めることができる. 従って

$$\phi^*(x) \rightarrow 3e^{-\frac{x}{2\varepsilon}} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (4.1)$$

である. こうして 3 節の結果を用いるために必要な各定数が

$$D = \varepsilon^2, \quad \alpha_+ = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \mathbf{a}_+ = -2, \quad \mathbf{a}_+^* = 3$$

と計算され, $H_j(h)$ が

$$\begin{aligned} H_1(h), H_2(h) &\sim M^+ e^{-\alpha_+ h} = 2\alpha_+ \langle \mathbf{a}_+, D\mathbf{a}_+^* \rangle e^{-\alpha_+ h} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (-2) \cdot \varepsilon^2 \cdot 3 \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon} h} \\ &= -12\varepsilon e^{-\frac{1}{2\varepsilon} h} \end{aligned}$$

と求められる. 結局 l_1 と $h (= l_2 - l_1)$ の方程式は

$$\begin{cases} \dot{l} = -H_1(h) + O(\delta^2(h)) \sim 12\varepsilon e^{-\frac{1}{2\varepsilon} h}, \\ \dot{h} = (H_1(h) + H_2(h)) + O(\delta^2(h)) \sim -24\varepsilon e^{-\frac{1}{2\varepsilon} h}. \end{cases} \quad (4.2)$$

となり (1.6) で述べた結果と一致する.

同様にして Gray-Scott 方程式 (1.4) におけるパルス状定常解は反発的に作用することや 2 種競合モデル (1.5) におけるフロント状定常解が互いに吸引的に作用することなどが分かっている. いずれも定理 3.2 や 3.4 における定数 M_0 や M_{\pm} の値を具体的に求めることによって示される. この講義録を読んで興味を持たれた読者は [3] を参照されたい.

また, ここでは反発的か吸引的かといった, 単純な場合の解析についてしか紹介しなかったが, より複雑な挙動も分岐点近傍を考察することによって解析できる場合がある. そのような場合に関しては, [4], [5], [6] などが論文として出ているが, 日本語の解説として [17], [18] が出版されているので参考にされたい.

REFERENCES

- [1] J. Carr and R. L. Pego, Metastable patterns in solutions of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u)$, *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 (1989), 523-576.

- [2] A. Doelman, R.A. Gardner and T.J. Kaper, Stability analysis of singular patterns in 1-D Gray-Scott model: A matched asymptotic approach, *Physica D* 122, 1-36 (1998).
- [3] S.-I. Ei, *The motion of weakly interacting pulses in reaction diffusion systems*, *J. Dynam. Diff. Eq.* 14(1), (2002), 85-137.
- [4] S.-I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems, *Physica D* 165 (2002), 176-198.
- [5] M. Mimura and M. Nagayama, Interacting Spots in reaction diffusion systems, *DCDS* 14 (2006), 31-62.
- [6] S.-I. Ei, Y. Nishiura and K. Ueda, 2^n -splitting or Edge-splitting, *Japan J. Ind. Appl. Math.* 18(2) (2001), 181-205.
- [7] S.-I. Ei and T. Ohta, The motion of interacting pulses, *Physical Review E*, 50 No. 6 (1994), 4672-4678.
- [8] J.W. Evans, Nerve axon equations: I Linear approximations, *Indiana Univ. Math. J.*, 21 (1972), 877-955.
- [9] J.W. Evans, Nerve axon equations: II Stability at rest, *Indiana Univ. Math. J.*, 22 (1972), 75-90.
- [10] J.W. Evans, Nerve axon equations: III Stability of the nerve impulse, *Indiana Univ. Math. J.*, 22 (1972), 577-593.
- [11] J.W. Evans, Nerve axon equations: IV The stable and unstable impulses, *Indiana Univ. Math. J.*, 24 (1975), 1169-1190.
- [12] P. C. Fife and J. B. McLeod, The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 65 (1977), 335-361.
- [13] G. Fusco and J. Hale, Slow motion manifold, dormant instability and singular perturbations, *J. Dynamics and Differential Equations*, 1 (1989), 75-94.
- [14] P. Gray and S. K. Scott, *Autocatalytic reaction in the isothermal continuous stirred tank reactor*, *Chem. Engng. Sci.* 39, 1087-1097 (1984).
- [15] Y. Kan-on, Parameter dependence of propagation speed of travelling waves for competition-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math.* 26 (1995), 340-363.
- [16] K. Kawasaki and T. Ohta, Kink dynamics in one-dimensional nonlinear systems, *Physica* 116A (1982), 573-593.
- [17] 三村, 上山, 西浦, 長山, 栄, *パターン形成とダイナミクス*, 東大出版会, 2006, 149p.
- [18] 西浦 康政, *自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス*, 岩波書店, 2003, 81p.
- [19] Y. Nishiura and D. Ueyama, A skeleton structure of self-replicating dynamics, *Physica D*, 130 (1999), 73-104.