数理解析研究所講究録
第1597巻 2008年 83-88

双安定非一様拡散場におけるフロントダイナミクス

富山大学大学院理工学研究部（理学）　池田　榮雄（Hideo Ikeda)
Graduate School of Science and Engineering for Recerch
University of Toyama
九州大学大学院数理学研究院　栄　伸一郎（Shin-Ichro Ei）
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

反応拡散方程式系は自然界におけるパターン形成や化学反応などにおける種々の現象を記述しており，様々な角度から研究が行われている。特に双安定系における空間一様な場合は，進行波が出現し，それが様々な状態遷移の時間発展の理解に有力な情報を与えている。自然界は大抵そうであるが，少なからず非一様な摂動を受けている。また，環境などによる非一様性の中での様々な状態遷移が起こっている。ここでは，一様な系では進行波が安定に存在する状況で，非一様な摂動が拡散係数に与えられたとき，その影響はどのように発展していくかを数学的厳密性を保ちながら考察したい（[7], [8], [6])。

2 双安定非一様反応拡散方程式系

ここでは次のような双安定非一様反応拡散系を考える。

$$(1)\quad \begin{cases} \varepsilon\tau u_t &= \varepsilon^2(D(x)u_x)_x + f(u,v) \\ v_t &= (D(x)v_x)_x + g(u,v) \end{cases} ,t>0,\ x\in\mathbf{R},$$

但し，$0<\varepsilon<<1$，$D(x)=1+\lambda H(x)$，$f(u,v)=(u+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-u)(u-\frac{v}{2})$，$g(u,v)=u-v$ であり，$H(x)$ はヘヴィサイド関数である。また，$\tau>0,\lambda$ は物理パラメータである。

$\lambda=0$ とすると空間一様な反応拡散方程式系となり，$f(u,v)=0, g(u,v)=0$ は原点に関して点対称であるので，$(0,0)$ 以外の2つの平衡解は同じ安定性を持つ（図1）。このことから，動座標 $z=x-ct$ を用いて変換するると，次のような進行波解（特に，速度 $c=0$ の進行波解）が存在する。

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{zz}+\varepsilon\tau c u_z+f(u,v) = 0 \\ v_{zz}+cv_z+g(u,v) = 0,\ z\in\mathbf{R} \\ (u,v)(-\infty)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ (u,v)(\infty)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

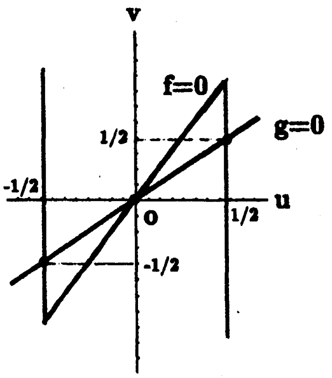


図1 $f(u,v)=0,g(u,v)=0$ のグラフ

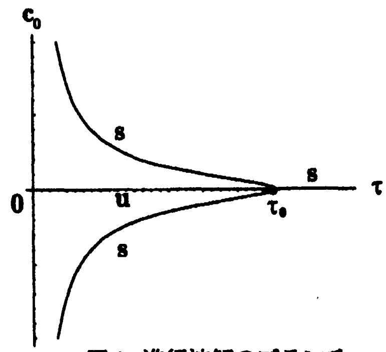
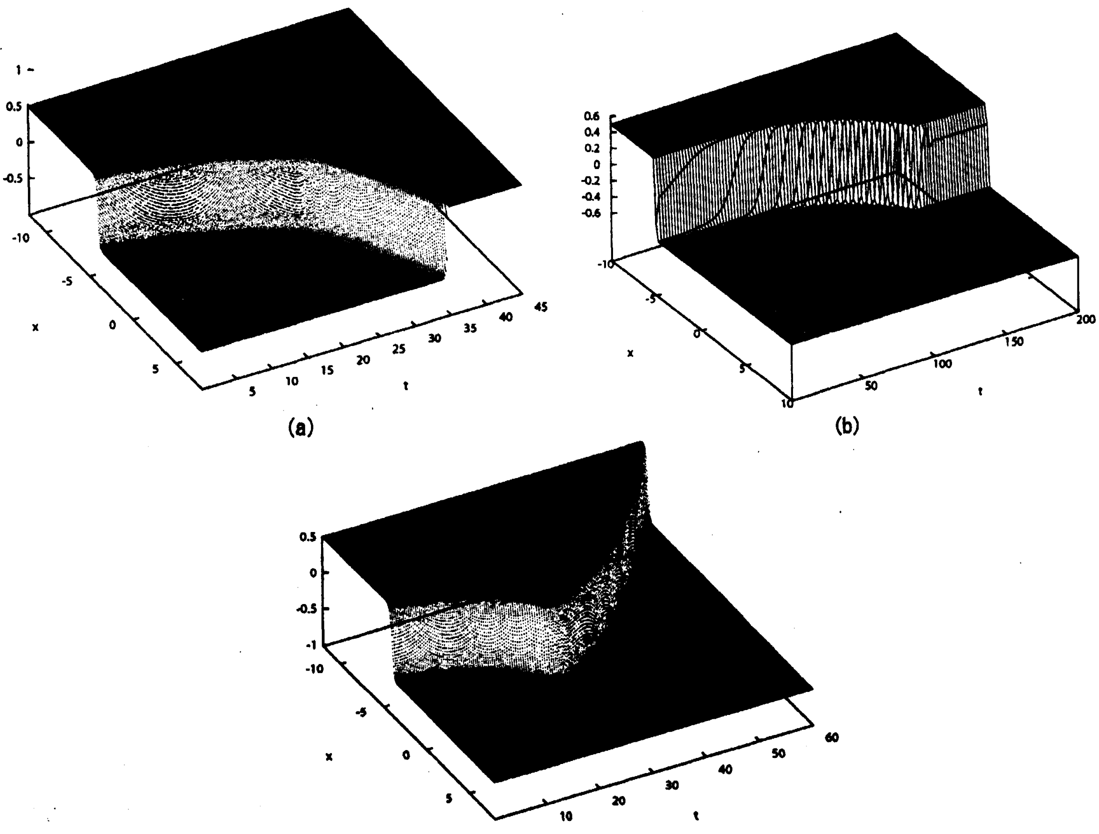


図2 進行波解のブランチ

時定数 τ を小さくすると，止まっていた $(c=0)$ 進行波解から，$\tau=\tau_0$ で速度を持った進行波解が分岐する（図2)。従って，$\tau<\tau_0$ とすると非零の速度を持った進行波解が存在し，安定であることが分かって

いる（[4], [5]）。この状態で，非一様な拡散が入る（$\lambda \neq 0$）とこの進行波解はどのような影響を受けるであろうか。まず，数値計算によると (1) の進行波解は図 3 のような 3 種類の応答を示すことがわかる。



(a) (b) (c)

図 3 進行波解のダイナミクス

(a) 通過 ($\tau = 0.17, \lambda = -0.05$) (b) 停止 ($\tau = 0.17, \lambda = -0.14$) (c) 反射 ($\tau = 0.17, \lambda = -0.2$)

3 常微分方程式系への縮約

$\tau = \tau_0 + \eta$ と置き，(1) を次のように書き換える。

$$
(2) \begin{cases}
u_t &= \frac{\varepsilon}{\tau}((1+\lambda H(x))u_x)_x + \frac{1}{\varepsilon\tau}f(u,v) \\
&= \frac{\varepsilon}{\tau}u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon\tau}f(u,v) + \lambda\{\frac{\varepsilon}{\tau}u_{xx}H(x) + \frac{\varepsilon}{\tau}u_x\delta(x)\} \\
&\equiv \frac{\varepsilon}{\tau}u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon\tau}f(u,v) + \lambda h_1(x) \\
v_t &= ((1+\lambda H(x))v_x)_x + g(u,v) \\
&= v_{xx} + g(u,v) + \lambda\{v_{xx}H(x) + v_x\delta(x)\} \\
&\equiv v_{xx} + g(u,v) + \lambda h_2(x)
\end{cases}
$$

さらに (2) を

$$(3)\ \mathbf{u}_t = \mathcal{L}(\mathbf{u};\eta) + \lambda H(x,\mathbf{u};\eta)$$

と簡略記する。ここで，$\lambda = 0$ とする。このとき，任意の $\tau > 0$ に対して，(3) は定常フロント解 $S(x)$ を持つ（図 2）。また，$\eta = 0$ ($\tau = \tau_0$) のとき，$\mathcal{L}(\mathbf{u};\eta)$ の $\mathbf{u} = S(x)$ での線形化作用素を $L = \mathcal{L}'(S(x);0)$ とする。(i) $LS'(x) = 0$, $L\Psi(x) = -S'(x)$ を満たす関数 $\Psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が存在し（L は Jordan 型の退化を持つ），L の 0 以外の固有値は複素平面の左側にあることも分かる。L の共役作用素を L^* とするとき，(ii) $L^*\Phi^*(x) = 0, L^*\Psi^*(x) = -\Phi^*(x)$ を満たす関数 $\Phi^*(x), \Psi^*(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が存在する。ここで，これら

の固有関数を正規化：$<\Psi, S'>_{L^2}=0, <S', \Psi^*>_{L^2}=1, <\Psi, \Psi^*>_{L^2}=0$ すると，Ψ, Φ^*, Ψ^* は一意に定まる。$<\cdot,\cdot>_{L^2}$ は $\mathbf{R}$ 上の L^2 内積である。このとき，次が成り立つ。

定理 ([1]) (2) あるいは (3) の解 $\mathbf{u}(t,x)$ は $\eta, r(t), \lambda$ が小さいとき，$S(x-\ell(t))+r(t)\Psi(x-\ell(t))$ で近似することが出来る。ここで，$\ell(t)$ は遷移層の位置を表している。さらに，$\ell(t), r(t)$ のダイナミクスは

$$(4)\quad \begin{cases} \ell_t(t) &= r(t) - \frac{\lambda}{\varepsilon(\tau_0+\eta)} < h_1(x+\ell), \psi_1^* >_{L^2} -\lambda < h_2(x+\ell), \psi_2^* >_{L^2} \\ & \quad +O(|r|^3+|\eta|^{\frac{3}{2}}) \equiv P_1(\ell, r) \\ r_t(t) &= K(r;\eta) + \frac{\lambda}{\varepsilon(\tau_0+\eta)} < h_1(x+\ell), \phi_1^* >_{L^2} +\lambda < h_2(x+\ell), \phi_2^* >_{L^2} \\ & \quad +O(|r|^4+|\eta|^2) \equiv P_2(\ell, r) \end{cases}$$

に従う。但し，$\Phi^*(x)=(\phi_1^*(x), \phi_2^*(x))$，$\Psi^*(x)=(\psi_1^*(x), \psi_2^*(x))$，$K(r;\eta)=M_1r^3+M_2\eta r$ で，$M_1=-\frac{1}{6}+O(\varepsilon), M_2=-\frac{4}{3\tau_0}+O(\varepsilon), \tau_0=\frac{1}{4\sqrt{2}}$ と計算出来る。

証明など詳しいことは [1] を参照下さい。ここで特記したいことは，$f(u,v), g(u,v)$ にかなり特殊なもの（と言っても双安定のプロットタイプであるが）を使ったので，上記の固有関数 $S'(x), \Psi(x), \Phi^*(x), \Psi^*(x)$ は特異摂動法を利用して計算出来ることである。そのお陰で非一様性の応答によるデリケートなダイナミクスを調べることが可能となっている（4 章参照）。

4 縮約系の解析

文献 [2], [3] の結果を考慮すると，$P_1(\ell,0)=0=P_2(\ell,0)$ を満たす $\ell_1^*<0<\ell_2^*$ が存在することがわかる。ここで，(4) において高次の項を無視し，変数変換 $\lambda=\alpha\tau|\eta|$, $r=\sqrt{|\eta|}R$, $T=\sqrt{|\eta|}t$ を行うと

$$(5)\quad \begin{cases} \ell_T(T) = R - \alpha\sqrt{|\eta|}H_1(\ell;\varepsilon) \\ R_T(T) = \sqrt{|\eta|}(M_1R^2+\mathrm{sgn}(\eta)M_2)R + \alpha H_2(\ell;\varepsilon) \end{cases}$$

が得られる。但し，$\mathrm{sgn}(\eta)=-1\ (\eta<0),\ =0\ (\eta=0),\ =1\ (\eta>0)$，$H_1(\ell;\varepsilon)=<h_1(x+\ell),\psi_1^*>_{L^2}/\varepsilon+\tau_0<h_2(x+\ell),\psi_2^*>_{L^2}$，$H_2(\ell;\varepsilon)=<h_1(x+\ell),\phi_1^*>_{L^2}/\varepsilon+\tau_0<h_2(x+\ell),\phi_2^*>_{L^2}$ である。

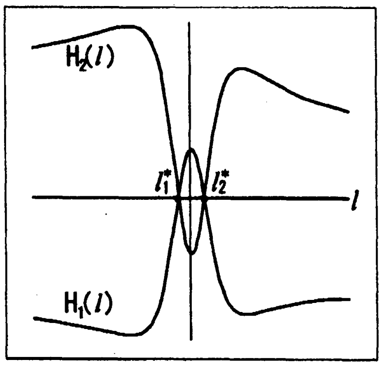


図 4 $H_1(\ell)=H_1(\ell;\varepsilon), H_2(\ell)=H_2(\ell;\varepsilon)$ のグラフ

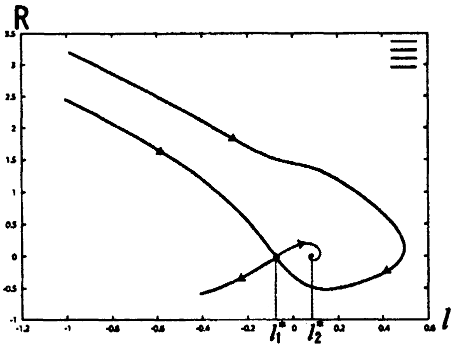


図 5 $\eta>0$ の時の (5) の解の挙動

図 4 より，(5) は 2 つの平衡解 $(\ell_1^*,0), (\ell_2^*,0)$ を持つ。平衡解の周りでの線形化解析より以下のことがわかる。今後，簡単の為に $\alpha<0\ (\lambda<0)$ の場合のみ扱う。$\alpha>0\ (\lambda>0)$ の場合も全く同様である。

(i) $\eta>0$ の時

$(\ell_1^*,0)$ は鞍状点であり，$(\ell_2^*,0)$ は安定結節点である。この時の (5) の解の挙動は図 5 のようになる。この場合は，一様な系のときは速度 0 の進行波解しか存在しない場合，すなわち，図 2 において $\tau>\tau_0$ の場合に対応している。

(ii) $\eta<0$ の時，$\alpha^*=-M_2/H_1'(\ell_2^*)<0$ とすると
$(\ell_1^*,0)$ は常に鞍状点であり，(a) $0>\alpha>\alpha^*$ ならば，$(\ell_2^*,0)$ は不安定結節点であり（図 6,7），(b) $\alpha<\alpha^*$ ならば，$(\ell_2^*,0)$ は安定結節点となる（図 9〜11）。そして (c) $\alpha=\alpha^*$ のとき，$(\ell_2^*,0)$ から周期解が亜臨界型に Hopf 分岐することが確かめられる（図 8）。この時，分岐した周期解は不安定であり，もとの偏微分方程式系の時空周期振動解に対応している。

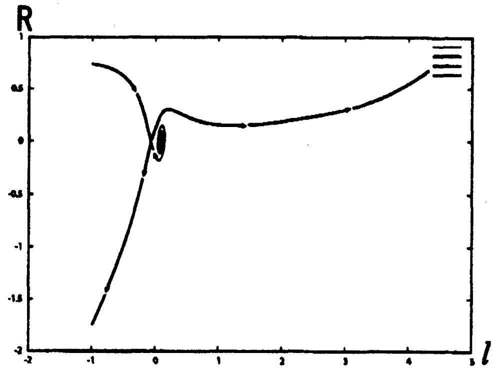


図 6 $\eta<0\ (a) 0>\alpha>\alpha^*$ の時の解のダイナミクス

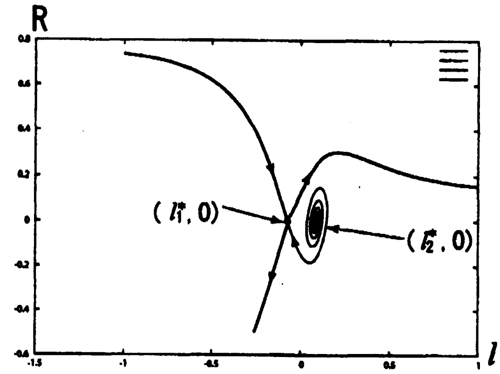


図 7 $\eta<0\ (a) 0>\alpha>\alpha^*$ の時の解のダイナミクス（拡大）

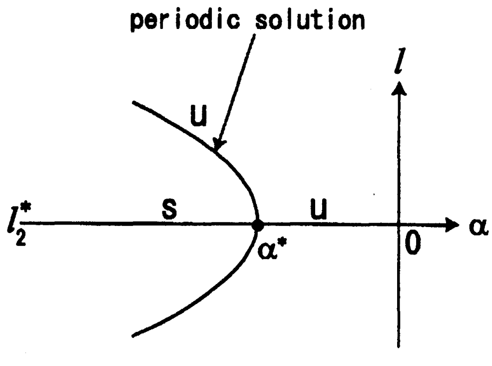


図 8 $\eta<0\ (b) \alpha<\alpha^*$ の時の分岐図

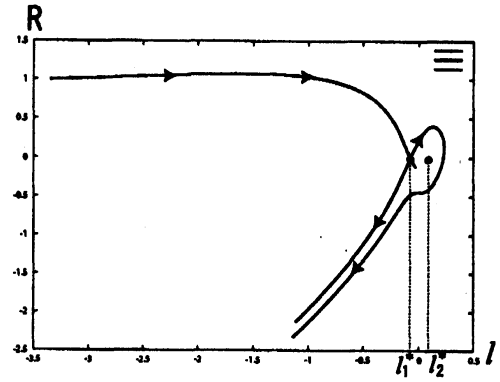


図 9 $\eta<0\ (b)\ \alpha<\alpha^*$ の時の解のダイナミクス

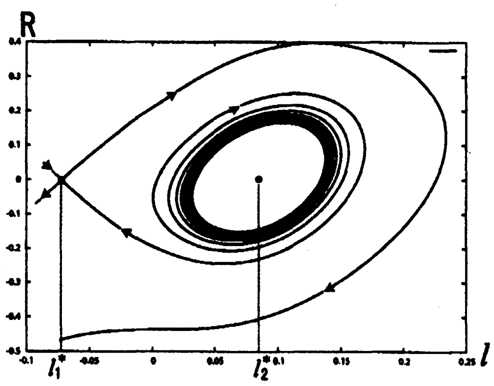


図 10 $\eta<0\ (b)\ \alpha<\alpha^*$ の時の解のダイナミクス (拡大)

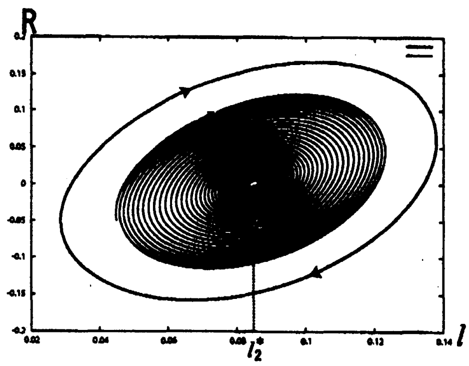


図 11 $\eta<0\ (b)\ \alpha<\alpha^*$ の時の解のダイナミクス (拡大)

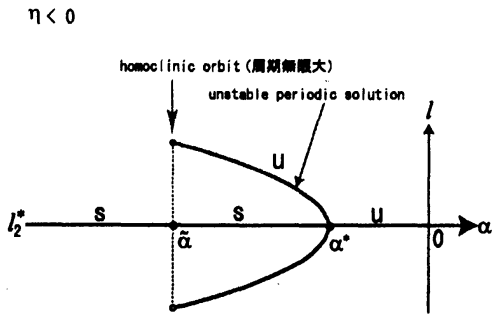


図 12 $\eta<0$ の時の解の分岐図（詳細）

α を α^* より小さくすると，図 13 のように $(\ell_1^*,0)$ の不安定多様体は $(\ell_1^*,0)$ の安定多様体の外側に回り込み，ある $\tilde{\alpha}(<\alpha^*)$ に対して，$\alpha=\tilde{\alpha}$ でホモクリニック軌道となり，$\alpha<\tilde{\alpha}$ で $(\ell_1^*,0)$ の不安定多様体は $(\ell_2^*,0)$ に振動しながら収束することがわかる。この様子の分岐図は図 12 に示されている。

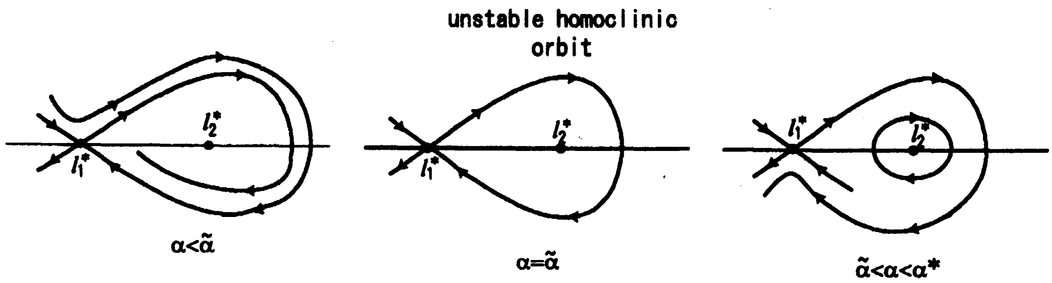


図 13 $\eta<0$ の時の解のダイナミクス

図 6,7 の場合が図 3(a) に，図 13 の $\alpha<\tilde{\alpha}$ の場合が図 3(b),(c) に，それぞれ対応しており，後者の場合，λ の大きさに依存して異なる軌道が選ばれている。

参考文献

[1] S.-I. Ei, H. Ikeda and T. Kawana, *Dynamics of front solutions in a specific reaction-diffusion system in one dimension*, to appear in Japan J. Indust. Appl. Math.

[2] H. Ikeda and M. Mimura, *Wave-blocking phenomena in bistable reaction-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math., 49 (1989), 515-538.

[3] H. Ikeda and M. Mimura, *Stability analysis of stationary solutions of bistable reaction-variable diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., 22(1991), 1651-1678.

[4] H. Ikeda, M. Mimura and Y. Nishiura, *Global bifurcation phenomena of travelling wave solutions for some bistable reaction-diffusion systems*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 507-526.

[5] Y. Nishiura, M. Mimura, H. Ikeda and H. Fujii, *Singular limit analysis of stability of travelling wave solutions in bistable reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. 21 (1990), 85-122.

[6] Y. Nishiura, Y. Oyama and K.-I. Ueda *Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media of jump type*, Hokkaido Math. J. 36 (2007), 207-242.

[7] J.P. Pauwelussen *Nerve impulse propagation in a branching nerve system: a simple model*, Physica D 4 (1981), 67-88.

[8] J.P. Pauwelussen *One way traffic pulses in a neuron*, J. Math. Biology 15 (1982), 151-171.