

FUNCTIONAL INTEGRAL REPRESENTATION OF NONRELATIVISTIC QED

Fumio Hiroshima (九大・廣島文生)
Jozsef Lőrinczi (München 工科大学)

1 はじめに

1.1 非摂動論的スペクトル解析

量子系に現れるハミルトニアンは状態ベクトルのつくる無限次元ヒルベルト空間上の自己共役作用素として定義される. 例えばシュレディンガー作用素 $H_p = -(1/2)\Delta + V$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上に, またディラック作用素 $H_D = \alpha \cdot (-i\nabla) + m\beta + V$ は $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ 上の自己共役作用素としてそれぞれ実現される. 作用素論的に方程式

$$i\partial_t \Psi_t = H_Q \Psi_t, \quad Q = p, D, \quad (1.1)$$

を解くことはユニタリー群 $\{e^{-itH_Q}\}_{t \in \mathbb{R}}$ とベクトル $e^{-itH_Q} \Psi_0$ を調べることに帰着される.

我々がターゲットにしている量子系は光子などのボゾンと電子のようなフェルミオンが相互作用している量子系である. ただし, フェルミオンは低エネルギー状態であると仮定する. そのためフェルミオンの生成消滅は起こらず, その個数は時間によらず一定である. さらにファインマン図形的には電子・陽電子の対生成を表す泡図形が現れず, 通常の QED のくりこみ理論とは様子が異なり, log 発散が高次の項では現れず特異な発散に出くわす [Spo04].

しかし, ボゾンは生成消滅を繰り返し, フェルミオンにまわりつき, 雪だるまではなくボゾンだるまとなって動き回るという描像は描ける. このような量子系の理論物理学的な価値は定かではないが, 物性理論などではよく考察されているモデルであり, 非相対論的量子電磁力学といわれることもある. ここで「非相対論的」といわれるのはフェルミオンのエネルギーが低いことによる. このような状況を考えるわけだが, 実際には本来の QED などにも, これから解説する数学的手法は応用できると信じている.

さて物理的背景はこれくらいにして, ここから数学的な側面について説明する. 我々の考察対象はテンソル積ヒルベルト空間 $\mathcal{K}_p \otimes \mathcal{K}_f$ 上の作用素

$$K_0 = A \otimes 1_{\mathcal{K}_f} + 1_{\mathcal{K}_p} \otimes B$$

の摂動問題ととらえることができる. A, B はそれぞれ素性のよく分かっている自己共役作用素である. 具体的にいえば A は例えばシュレディンガー作用素であり, B は場の自由ハミルトニアンである. このとき K_I を $\mathcal{K}_p \otimes \mathcal{K}_f$ 上の対称作用素として,

$$K = K_0 + \varepsilon K_I, \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

のスペクトルを決定したいわけである。一般論より K_0 のスペクトルはよく分かる。特にボゾンの質量がゼロの場合、 K_0 の固有値は全て連続スペクトルに埋め込まれて埋蔵固有値になる。図1をみよ。つまり K のスペクトル解析とは必然的に埋蔵固有値の摂動問題という側面をもつことになる。詳しい解説は例えば [Ara02, Hir05b] を参照せよ。埋蔵固有値の摂動問題

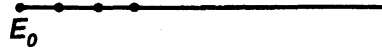


図 1: K_0 の埋蔵固有値

はシュレディンガー作用素のスペクトル解析でも起こりうる現象であるが、我々の考えている系に現れる埋蔵固有値はすべて threshold といわれる厄介な代物である。Complex dilatation により K_0 の本質的スペクトルを解析接続によって第2リーマン面上へ回転しても埋蔵固有値は離散固有値にはならず、回転軸になってしまい、埋め込まれたままなのである。図2をみよ。そのため complex dilatation の手法が直接には使えない難しさがある。もちろん K を K_0 の摂動と考えずに直接 K を解析する方法も考えられるが、具体的な問題では「解けるモデル」以外ではそのような方法を追求するのは困難である。ここで「解ける」といったのは、 K が適当な条件の下で対角化できるような場合のことである。¹

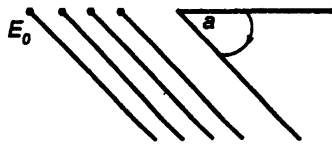


図 2: Complex dilatation した K_0 のスペクトル

近年、このような量子系のハミルトニアンが非摂動論的に解析され、目覚ましい発展を遂げている。例えば [Spo04] をみよ。そのお陰で、解けそうな問題は(寂しいことに)殆ど全て解かれてしまった感がある。ここで、「非摂動論的」と強調したのは、スペクトルを解析するとき前述の埋蔵固有値の摂動問題という摂動論的には解析しづらい問題に直面するからである。

K のスペクトルの下限が点スペクトルになるとき「 K の基底状態が存在する」という。しかし、我々の考察する自己共役作用素 K は一般には本質的スペクトルの下限がスペクトルの下限と一致するので基底状態の存在は自明なことではない。図1でみたように、 K_0 のスペクトルの下限 E_0 が連続スペクトルに埋め込まれているので、摂動を加えた後にその固有値が生き残るかどうかは全く自明ではない。さらに基底状態の存在が示せてもその重複度の評価は全く自明ではない。具体的に言えば離散固有値の摂動問題で威力を発揮する Kato regular perturbation theory が直接には使えないのである。

この10年で多くの重要なモデルでこの基底状態の存在が示されてきた。² しかし、その証明を詳細にみてもそれは構成的なものではない。基底状態を具体的に作ったり、近似的なベクトルを構成するといった類のものではない。まして、基底状態の性質はハミルトニアンの対称性などから伝播してくる性質以外は我々の知る限り、あまりよく調べられていないようである。

¹ $K \cong A' \otimes 1 + 1 \otimes B'$ となるユニタリ変換が存在すること。

² 詳しくは [Spo04] の参考文献を参照せよ。

1.2 なぜ汎関数積分表示？

我々の目標は汎関数積分表示を駆使して、基底状態の性質を非摂動的に調べることにあ
る。もう少し正確に言おう。

定義 1.1 自己共役作用素 K のスペクトルを $\sigma(K)$ であらわす。 $E(K) = \inf \sigma(K)$ を基底
状態エネルギーという。 $\dim \text{Ker}(K - E(K)) \geq 1$ のとき K の基底状態が存在するといひ、
 $\varphi_g \in \text{Ker}(K - E(K))$ を基底状態とよぶ。

T を適当な有界作用素とし、期待値 $(\varphi_g, T\varphi_g)$ を知りたい。基底状態 φ_g がベクトル F に対し
て $(F, \varphi_g) > 0$ となるとき、

$$(\varphi_g, T\varphi_g) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(e^{-tK}F, Te^{-tK}F)}{\|e^{-tK}F\|^2} \quad (1.2)$$

が成立する。 $e^{-tK}F$ の汎関数積分表示があれば (1.2) の右辺の収束はパス空間上の適当な測
度の収束の問題に帰着される。上手くいけば T の期待値を

$$(\varphi_g, T\varphi_g) = \int_{\mathcal{X}} F_T(w) \mu_{\infty}(dw)$$

のように連続パスの空間 $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ 上の確率測度 μ_{∞} で表すことができるのである。こ
の表示を通して基底状態の様々な性質を調べるのが我々の目標である。

さらにスペクトル解析の手段としての側面のほかに、我々は汎関数積分表示そのものにも
興味がある。それは量子場の効果を汎関数積分表示を通してみたいからである。例えば K の
有効ハミルトニアン (effective Hamiltonian) を得る方法として、量子場の真空への射影が考
えられる。量子場の真空を 1 で表そう。 $(f \otimes 1, e^{-tK}g \otimes 1)$ から有効ハミルトニアンを取り出
そうというわけだ。 $\varepsilon = 0$ の場合は

$$(f \otimes 1, e^{-tK_0}g \otimes 1)_{\mathcal{K}_p \otimes \mathcal{K}_f} = (f, e^{-tA}g)_{\mathcal{K}_p} (1, e^{-tB}1)_{\mathcal{K}_f} = (f, e^{-tA}g)_{\mathcal{K}_p}$$

であるが、 $\varepsilon \neq 0$ の場合には

$$(f \otimes 1, e^{-tK}g \otimes 1)_{\mathcal{K}_p \otimes \mathcal{K}_f} = (f, e^{-tK_{\text{eff}}}g)_{\mathcal{K}_p} \quad (1.3)$$

となる \mathcal{K}_p 上の自己共役作用素 K_{eff} は一般には存在しない。その様子を汎関数積分でみるこ
とができる。4章で説明するように、(1.3) の左辺に量子場の影響からくる非マルコフ的な効
果が入っていることがわかる。マルコフ性を回復する一つの方法がスケーリング極限である。
例えば弱結合極限 (weak coupling limit) をとれば非自明な、量子場の効果を取り込んだ有効ハ
ミルトニアン K_{eff} を導き出すことが出来る。また (1.3) の左辺にはギブス測度的な一面があ
ることも最近分かってきた [LHBG07]。ブラウン運動に相対的なギブス測度といわれる。ギ
ブス測度の存在は基底状態の存在よりも広い概念であり、最近注目されている。このように
汎関数積分表示自体にも様々な興味深い側面がある。

今回、ここで汎関数積分表示の概略を述べる。実際にはその表示を通してスペクトル解析
が見事に成功した例もあれば、表示はあるものの、どのように応用すればいいのか手探りな物
もある。いずれにしても話題は豊富である。興味を持っていただける読者が存在すれば幸い
である。

2 確率論的準備

2.1 ブラウン運動と確率積分

確率論の基本アイテムを復習する. \mathbb{R}^d に値をとる連続パスの空間を $\mathcal{W} = C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ で表す. \mathcal{W} に局所一様位相をいれ, そのボレルシグマ代数を \mathcal{F} で表す. \mathcal{F} は柱状集合³

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{0 \leq t_1 < \dots < t_n < \infty} \{w \in \mathcal{W} \mid (w(t_1), \dots, w(t_n)) \in A_1 \times \dots \times A_n, A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, n\}$$

から生成されるシグマ代数と一致することが示せる. d 次元の熱核を

$$\Pi_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp(-|x|^2/(2t))$$

で表す. さて, 可測空間 $(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ 上の Wiener 測度を $P^x, x = x_0 \in \mathbb{R}^d$, とかく. これは

$$\begin{aligned} & P^x(w(t_1) \in F_1, \dots, w(t_n) \in F_n) \\ &= \int_{F_1 \times \dots \times F_n} \left(\prod_{j=1}^n \Pi_{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1}) \right) dx_1 \cdots dx_n, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

で一意的に決まる確率測度である. このとき coordinate mapping 過程

$$B_t(\cdot) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{W} \ni w \mapsto w(t),$$

は $x \in \mathbb{R}^d$ から出発するブラウン運動になる. つまり (1) $P^x(B_0 = x) = 1$, (2) $B_t(w)$ は t について連続, (3) 増分 $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{1 \leq i \leq n}$ が独立で, 平均ゼロ, 分散 $t_i - t_{i-1}$ のガウス過程. $\mathbb{E}^x[\dots] = \int \dots dP^x$ と書く. B_t の分布関数は Π_t なので $\mathbb{E}^x[f(B_t)] = \int \Pi_t(x-y)f(y)dy$ となる.

次に確率積分を定義しよう. 区間 $[0, T]$ の分割を $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ とする. はじめに階段関数 $\phi(t, w) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(w) 1_{[t_j, t_{j+1})}(t)$ に対して

$$\int_0^T \phi(t, w) dB_t := \sum_{j=0}^{n-1} f_j(w) \cdot (B_{t_{j+1}}(w) - B_{t_j}(w)) \quad (2.1)$$

と定める. このとき $\mathbb{E}^x \left[\left(\int_0^T \phi(t, w) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^T |\phi(t, w)|^2 dt \right]$ が成り立つ. 一般の $f(t, w)$ については階段関数の極限で

$$I_T = \int_0^T f(t, w) dB_t \quad (2.2)$$

を以下のように定義する. $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s, 0 \leq s \leq t\})$ とする⁴. $f(t, w) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ は次を満たすとする. (1) $f(t, \cdot)$ は \mathcal{F}_t 可測, (2) $\mathbb{E}^x \left[\int_0^T |f(t, w)|^2 ds \right] < \infty$. このとき確率積分 I_T を (2.1) の $L^2(\mathcal{W}, dP^x)$ での強極限として定義できる. つまり, f に対して

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^T |f(t, w) - \phi_n(t, w)|^2 dt \right] \rightarrow 0$$

³ $\mathcal{B}(\mathcal{O})$ は位相空間 \mathcal{O} のボレルシグマ代数を表す.

⁴ $\sigma(\dots)$ とは \dots が生成する最小のシグマ代数を表す.

となる階段関数列 ϕ_n がとれるので,

$$\int_0^T f(B_s) dB_s = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n(s, \omega) dB_s$$

で定める. もちろん $(I_t)_{t \geq 0}$ は再び $(\mathcal{W}, \mathcal{F}, P^x)$ 上の確率変数で, 平均 $\mathbb{E}^x [I_t] = 0$, 分散 $\mathbb{E}^x [I_t^2] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^t |f(s, \omega)|^2 ds \right]$ である. 特に $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_\mu \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, に対して⁵

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2} (f(B_{jt/2^n}) + f(B_{(j-1)t/2^n})) \cdot (B_{jt/2^n} - B_{(j-1)t/2^n}) = \int_0^t f(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla \cdot f(B_s) ds \quad (2.3)$$

が成立する. この右辺を $\int_0^t f(B_s) \circ dB_s$ と書く.

2.2 Lévy 過程と Lévy-Khintchine 公式

Lévy 過程について簡単に復習しておこう. (S, \mathcal{S}, P) を確率空間, $(\mathcal{S}_t)_{t \geq 0}$ を S の部分シグマ代数の増大列 (filter) とする. $\mathbb{E}_P[\dots] = \int \dots dP$ とおく. 確率過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$, $\eta_t(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}^d$, が Lévy 過程とは以下の (1)-(4) を満たすことである. (1) $P(\eta_0 = 0) = 1$, (2) 増分 $\{\eta_{t_i} - \eta_{t_{i-1}}\}_{1 \leq i \leq n}$ が独立, (3) $\eta_{s+t} - \eta_s$ の分布が s によらない, (4) $\eta_t(\omega)$ は t に関して右連続で, 左極限が存在する. 例えばブラウン運動は Lévy 過程である. また

$$P(\eta_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

となる \mathbb{N}^d 値 Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ を intensity $\lambda > 0$ のポアソン過程という. さて閉包が 0 を含まない可測集合の生成するシグマ代数を $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mid \bar{U} \not\ni 0\})$ とおく. 時刻 $t = s$ での η_t のジャンプを $\Delta \eta_s = \eta_s - \eta_{s-}$ と定める. もちろん $\Delta \eta_s = 0$ のとき, η_t は $t = s$ で連続であり, 通常の意味でのジャンプはしていない. 時刻 $t > 0$ までの, サイズが $U \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ のジャンプの総数を

$$N(t, U) = \sum_{0 < s \leq t} 1_U(\Delta \eta_s) \quad (2.4)$$

と定義する. 確率 1 で $N(t, U) < \infty$ となることが示せる. 実は $(N(t, U))_{t \geq 0}$ は intensity

$$\nu(U) = \mathbb{E}_P[N(1, U)] \quad (2.5)$$

のポアソン過程になることが知られている. つまり

$$P(N(t, U) = n) = \frac{(\nu(U)t)^n}{n!} e^{-\nu(U)t}$$

集合関数 $\nu(\cdot) : \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ を Lévy 測度という. これは有限測度とは限らない. $\int_{|z| < 1} \nu(dz) = \infty$ ということも一般にはありえる. さて Lévy 過程で重要な事実を述べる. $\tilde{N}(t, U) = N(t, U) - t\nu(U)$ とおく. 微分形式で書けば

$$\tilde{N}(dtdz) = N(dtdz) - dt\nu(dz). \quad (2.6)$$

⁵ $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ は 2 階までの偏導関数が全て有界かつ連続な関数の空間.

命題 2.1 Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ は次のように分解できる⁶.

$$\eta_t = \alpha t + \sigma \cdot B_t + \int_0^t \int_{|z| < 1} z \tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(ds dz). \quad (2.7)$$

ここで $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^d$, B_t は $N(t, U)$ と独立な (S, S, P) 上のブラウン運動である.

これより Lévy 過程はジャンプとブラウン運動と直線からなることがわかる. (2.7) より η_t の特性関数 $\mathbb{E}_P[e^{iu\eta_t}] = e^{t\psi(u)}$ は \mathbb{R}^d 上の Lévy 測度 ν と, 非負値対称行列 A と $\beta \in \mathbb{R}^d$ によって

$$\psi(u) = i\beta \cdot u - \frac{1}{2} u \cdot Au + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iuz} - 1 - iuz1_{|z| \leq 1}) \nu(dz) \quad (2.8)$$

となることがわかる. 実はこの逆が成立する.

命題 2.2 3つ組み (A, β, ν) , 非負値対称行列 A , $\beta \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ 上の測度 ν で $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int 1 \wedge z^2 \nu(dz) < \infty$, が与えられたとき, (2.8) を満たす Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ が存在する.

Lévy 過程と正値性保存作用素の関係をのべておく.

定義 2.3 $L^2(M, d\rho)$ 上の有界作用素 T が $f \geq 0$ ならば $Tf \geq 0$ となるとき T を正値性保存作用素 (positivity preserving operator) という. また $f \geq 0$ (ただし $f \not\equiv 0$) ならば $Tf > 0$ となるとき正値性改良作用素 (positivity improving operator) という.

$e^{t\Delta}$ は $\Pi_t(x-y)$ を積分核にもつ積分作用素なので正値性改良作用素であり, $e^{t\partial_x}$ はシフト作用素 $f \mapsto f(\cdot + t)$ なので正値性保存作用素である.

命題 2.4 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ でその実部が下から有界であるとする. このとき $e^{-tF(-i\nabla)}$ が正値性保存作用素であることと命題 2.2 の 3つ組 (A, β, ν) で

$$F(u) = i\beta \cdot u + \frac{1}{2} u \cdot Au - \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iuz} - 1 - iuz1_{|z| \leq 1}) \nu(dz) \quad (2.9)$$

と表せることは同値である. ただし (2.7) との符号の違いに注意.

次に Ito の公式を紹介する. $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P_\Omega) = (W \times S, \mathcal{F} \times \mathcal{S}, P^0 \times P)$ とおき, 期待値を $\mathbb{E}_{P_\Omega}[\cdot] = \int \cdot \dots dP_\Omega$ とかく. $\mathcal{B}_t = \mathcal{F}_t \times \mathcal{S}_t$ とする. $g(t, z, \omega): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が (1) $g(t, \cdot, \cdot)$ が $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}_t$ 可測, (2) $g(\cdot, z, \omega)$ は左連続, となるとき predictable (pre. と略す) という.

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &:= \left\{ h = h(s, z, \omega) : \text{pre.} \left| \int_0^{t+} \int_{\mathbb{R}^d} |h| N(ds dz) < \infty \text{ a.e. } \omega \right. \right\}, \\ \mathbb{F}^2 &:= \left\{ h = h(s, z, \omega) : \text{pre.} \left[\mathbb{E}_P \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |h|^2 ds \nu(dz) \right] < \infty \right] \right\}, \\ \mathbb{F}^{2, \text{loc}} &:= \left\{ h = h(s, z, \omega) : \text{pre.} \left[\exists \tau_n : \Omega_t \text{-停止時刻 s.t. } \tau_n \uparrow \infty \text{ かつ } 1_{[0, \tau_n]}(t) h \in \mathbb{F}^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

⁶Lévy-Ito 分解という.

とおこう。次を仮定する。(1) $f^i(t, \omega)$ と $g^i(t, \omega)$, $i = 1, \dots, N$, は Ω_t -adapted.⁷ (2) $\mathbb{E}_{P_\Omega}[\int_0^t |f^i(s, \cdot)|^2 ds] < \infty$, (3) $g^i(\cdot, \omega) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ a.e. $\omega \in \Omega$. (4) $h_1^i \in \mathbb{F}$, $h_2^i \in \mathbb{F}^{2, \text{loc}}$. このとき $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P_\Omega)$ 上の確率過程 $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ を次で定義する:

$$X_t^i = \int_0^t f^i \cdot dB_s + \int_0^t g^i ds + \int_0^{t+} \int_{\mathbb{R}^d} h_1^i N(ds dz) + \int_0^{t+} \int_{\mathbb{R}^d} h_2^i \tilde{N}(ds dz). \quad (2.10)$$

この X_t に対して次の命題が成立する。これは Ito の公式と呼ばれている。

命題 2.5 X_t は (2.10) で与えられた確率過程とする。ただし $h_1^i h_2^j = 0$, $i \neq j$, と仮定する。 $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ のとき次が成立する。

$$\begin{aligned} & F(X_t) - F(X_0) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^t F_i(X_s) f^i \cdot dB_s + \sum_{i=1}^N \int_0^t F_i(X_s) g^i ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t F_{ij}(X_s) f^i \cdot f^j ds \\ &+ \int_0^{t+} \int_{\mathbb{R}^d} F(X_{s-} + h_1) - F(X_{s-}) N(ds dz) + \int_0^{t+} \int_{\mathbb{R}^d} F(X_{s-} + h_2) - F(X_{s-}) \tilde{N}(ds dz) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(F(X_s + h_2) - F(X_s) - \sum_{i=1}^N h_2^i F_i(X_s) \right) ds \nu(dz). \end{aligned}$$

ただし $F_i = \partial_{x_i} F$, $F_{ij} = \partial_{x_i} \partial_{x_j} F$.

X_t の生成子 $\lim_{t \rightarrow 0} (1/t) \mathbb{E}^x[F(X_t) - F(X_0)]$ を求めるとき、本質的に Ito の公式と dB_s , $\tilde{N}(ds dz)$ の平均がゼロ⁸という事実を使う。

3 Feynman-Kac の公式

3.1 基本

d -次元シュレディンガー作用素 $H_p = -(1/2)\Delta + V$ の生成する熱半群 e^{-tH_p} をウィナー測度とブラウン運動で表すのがいわゆる Feynman-Kac の公式であり、経路積分表示である。以降定義域の議論を避けるために何も言及しないときは $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と仮定する。Feynman-Kac の公式は次で与えられる。

$$(f, e^{-tH_p}) = \int dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s) ds} \right]. \quad (3.1)$$

証明の方法はいろいろ知られているが、Ito の公式を使って証明するのが手早い³、トロッタ積公式を使った証明はえば無限自由度系などへの応用範囲が広い。トロッタ積公式から

$$\begin{aligned} (f, e^{-tH_p}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f, \underbrace{(e^{-\frac{t}{n}(-\frac{1}{2}\Delta)} e^{-\frac{t}{n}V}) \dots (e^{-\frac{t}{n}(-\frac{1}{2}\Delta)} e^{-\frac{t}{n}V})}_n g) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\sum_{j=1}^n V(B_{jt/n})} \right] = (3.1) \end{aligned}$$

⁷任意の $t \geq 0$ で $f^i(t, \cdot)$, $g^i(t, \cdot)$ が Ω_t 可測となること。

⁸ $\mathbb{E}_P[N(ds dz)] = ds \nu(dz)$.

のようにして Feynman-Kac の公式が示せる. (3.1) の表示から熱半群 e^{-tH_p} の性質や, また H_p のスペクトルなど様々なことが分かる. 例えば e^{-tH_p} の hypercontractivity や $d \geq 3$ であれば Lieb-Thirring の不等式 [Lie80] などである.

一度, 経路積分表示が出来てしまえば, 逆に (3.1) の右辺が有界になるような V のクラスを設定し, (3.1) の右辺から決まる対称な C_0 半群⁹の自己共役な生成子として H_p を定義することも出来る¹⁰. 詳しくは [Sim79] を参照のこと. その例として Kato クラス¹¹ や Stummel クラスなどがよく知られている. さらに下から有界でない H_p の生成する熱半群 (非有界である) へも Feynman-Kac の公式を拡張できる. 例えば Stark ハミルトニアン $H_p = -(1/2)\Delta + E \cdot x$ などである [Sim00].

3.2 ベクトルポテンシャル \vec{a}

次元を $d = 3$ としよう. ベクトルポテンシャル \vec{a} とミニマル結合したハミルトニアンの経路積分表示も構成できる. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $a_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, をベクトルポテンシャルとする. a_j はもちろん \mathbb{R} 値である. このとき $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の作用素¹²

$$H(\vec{a}, V) = \frac{1}{2}(\vec{p} - \vec{a})^2 + V \quad (3.2)$$

は $D(-\Delta)$ 上で自己共役になる. その熱半群 $e^{-tH(\vec{a}, V)}$ の経路積分表示は次で与えられる.

$$(f, e^{-tH(\vec{a}, V)} g) = \int dx E^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s) ds} e^{-i \int_0^t \vec{a}(B_s) \circ dB_s} \right]. \quad (3.3)$$

これは Feynman-Kac-Ito の公式といわれている. 証明は次でみる定理 3.1 の証明に帰着できる. (3.3) はかなり広いクラスの (\vec{a}, V) まで拡張できる. $V = V_+ - V_-$ で V_+ は Kato クラス, V_- が局所 Kato クラス, さらに $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\nabla \cdot \vec{a}$ が其々局所 Kato クラスに入るような (\vec{a}, V) まで (3.3) を拡張できる [BHL98]. ここで $\nabla \cdot \vec{a}$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の超関数の意味での微分である.

簡単に $|(f, e^{-tH(\vec{a}, V)} g)| \leq (|f|, e^{-tH(\vec{0}, V)} |g|)$ が分かるので, $E(\vec{a}) = \inf \sigma(H(\vec{a}, V))$ とすれば $E(\vec{0}) \leq E(\vec{a})$ がわかる. これは反磁性的不等式といわれている. つまりスピンのなく, 粒子が一つのときはベクトルポテンシャルとミニマル結合すれば基底状態エネルギーは上がることがわかる.

3.3 スピン $\vec{\sigma}$

$H(\vec{a}, V)$ にスピン 1/2 を導入しよう. 2×2 パウリ行列を

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

⁹ S_t が C_0 半群とは $S_0 = 1$, $S_s S_t = S_{s+T}$ かつ $t \mapsto S_t$ が強連続.

¹⁰ Hille-Yoshida の定理

¹¹ $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{if } d = 1 \\ -\ln|x| & \text{if } d = 2 \\ |x|^{2-d} & \text{if } d \geq 3 \end{cases}$ と定める. V が $\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq r} |g(y-x)V(y)| dy = 0$ を満たすとき kato

クラスと呼ばれる. また \forall コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して $1_K V$ が Kato クラスになるとき V を局所 Kato クラスという.

¹² $\vec{p} = (-i\partial_{x_1}, -i\partial_{x_2}, -i\partial_{x_3})$.

とし, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とおく. $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ 上の作用素 $H_S(\vec{a}, V)$ を

$$H_S(\vec{a}, V) = \frac{1}{2}(\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{a}))^2 + V = H(\vec{a}, V) - \frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{b} \quad (3.4)$$

で定義する. ここで $\vec{b} = \text{rot} \vec{a}$ である. $H_S(\vec{a}, V)$ も $D(-\Delta)$ 上で自己共役である. Lévy 過程で $e^{-tH_S(\vec{a}, V)}$ の経路積分表示が構成できる. そのためにスピン変数 σ を導入しよう. 2次の加法群を

$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{-1, +1\}$$

とおく. $f = \begin{bmatrix} f(+1) \\ f(-1) \end{bmatrix} \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ に対して

$$(H_S(\vec{a}, V)f)(\sigma) = \left(H(\vec{a}, V) - \frac{1}{2}\sigma b_1 \right) f(\sigma) - \frac{1}{2}(b_1 + i(-\sigma)b_2)f(-\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{Z}_2,$$

であるから $H_S(\vec{a}, V)$ を $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上の自己共役作用素とみなせる. \mathbb{C}^2 -値 L^2 関数上の作用素が \mathbb{C} -値 L^2 関数上の作用素に見直せたことになる. これはありがたい. 時刻 t までのジャンプの回数を数える counting 測度を $N_s = N(s, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ とおき, $dN_s = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} N(ds dz)$ とする. つまり

$$\int_0^{t+} f(s, \sigma_{s-}) dN_s = \sum_{0 < r \leq t} f(r, \sigma_{r-})$$

となる. ただしジャンプする時刻 r (有限個) だけの和をとる.

$$\sigma_t : \mathbb{Z}_2 \times S \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad (\sigma, w) \mapsto \sigma \times (-1)^{N_t(w)}$$

として $(x, \sigma) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$ から出発する $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P_\Omega)$ 上の $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$ に値をとる確率過程を $(\xi_t)_{t \geq 0} = (B_t, \sigma_t)_{t \geq 0}$ で定義する. $\mathbb{E}^{x, \sigma}[f((\xi_t)_{t \geq 0})] = \int_\Omega f((B_t, \sigma_t)_{t \geq 0}) dP_\Omega^x$ とおく. 次が成立する.

定理 3.1 [ALS83] $T = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3} \Pi_s(x-y) \left| \log \frac{1}{2} \sqrt{b_1(y)^2 + b_2(y)^2} \right| dy < \infty$ と仮定する. $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ に対して, 次が成立する.

$$(f, e^{-tH_S(\vec{a}, V)} g) = e^t \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \int dx \mathbb{E}^{x, \sigma} \left[\overline{f(\xi_0)} g(\xi_t) e^{Z_t} \right]. \quad (3.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} Z_t &= - \int_0^t \left(V(B_s) - \frac{1}{2} B_3(B_s) \sigma_s \right) ds - i \int_0^t \vec{a}(B_s) \circ dB_s + \int_0^{t+} W(B_s, \sigma_{s-}) dN_s, \\ W(x, -\sigma) &= \log \left(\frac{1}{2} (b_1(x) + i(-\sigma)b_2(x)) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

証明の概略: 定理 3.1 の仮定 $T < \infty$ は $|\mathbb{E}^{x, \sigma}[\int_0^{t+} W(B_s, -\sigma_s) dN_s]| \leq 2T < \infty$ を保証する.

$$S_t g(x, \sigma) = \mathbb{E}^{x, \sigma} [e^{Z_t} g(\sigma_t, B_t)]$$

とする. S_t は対称な C_0 半群になるから, ある下から有界な自己共役作用素 K が存在して $S_t = e^{-tK}$ とかける. 以下で K を求める. Ito の公式より

$$\sigma_t - \sigma_0 = \int_0^{t+} -2\sigma_{s-} dN_s \quad (3.7)$$

に注意しよう. $U(x, \sigma) = -(1/2)b_3(x)\sigma$ とおく. Ito の公式と (3.7) から

$$\begin{aligned} & g(B_t, \sigma_t) - g(x, \sigma) \\ &= \int_0^t \nabla g(B_s, \sigma_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta g(B_s, \sigma_s) ds + \int_0^{t+} (g(B_s, -\sigma_{s-}) - g(B_s, \sigma_{s-})) dN_s, \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} e^{Z_t} - 1 &= \int_0^t e^{Z_s} (-ia(B_s)) \circ dB_s + \int_0^t e^{Z_s} (-V(B_s)) ds + \frac{1}{2} \int_0^t e^{Z_s} (-ia(B_s))^2 ds \\ &+ \int_0^t e^{Z_s} \frac{1}{2} (-i\nabla \cdot a)(B_s) ds + \int_0^t e^{Z_s} (-U(B_s, \sigma_s)) ds + \int_0^{t+} (e^{Z_{s-} + W(B_s, -\sigma_{s-})} - e^{Z_{s-}}) dN_s \end{aligned}$$

が従う. これより

$$\begin{aligned} & e^{Z_t} g(B_t, \sigma_t) - g(x, \sigma) \\ &= \underbrace{\int_0^t e^{Z_s} \left(\frac{1}{2} \Delta - ia(B_s) \cdot \nabla + \frac{1}{2} (-i\nabla \cdot a)(B_s) - \frac{1}{2} a(B_s)^2 - V(B_s) \right) g(B_s, \sigma_s) ds}_{\text{スピンのない部分}} \\ &+ \underbrace{\int_0^t e^{Z_s} (\nabla g(B_s, \sigma_s) - ia(B_s) g(B_s, \sigma_s)) \cdot dB_s}_{\text{マルチンゲールの部分}} + \underbrace{\int_0^t e^{Z_s} (-U(B_s, \sigma_s)) g(B_s, \sigma_s) ds}_{\text{スピンの対角成分}} \\ &+ \underbrace{\int_0^{t+} e^{Z_{s-}} \left(g(B_s, -\sigma_{s-}) e^{W(B_s, -\sigma_{s-})} - g(B_s, \sigma_{s-}) \right) dN_s}_{\text{スピンの非対角成分}}. \end{aligned}$$

両辺の期待値をとれば $\mathbb{E}^{x, \sigma}[e^{Z_t} g(B_t, \sigma_t) - g(x, \sigma)] = \int_0^t \mathbb{E}^{x, \sigma}[G(s)] ds$. ここで

$$\begin{aligned} G(s) &= e^{Z_s} \left[\frac{1}{2} \Delta g(B_s, \sigma_s) - ia(B_s) \cdot (\nabla g)(B_s, \sigma_s) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} a(B_s)^2 - V(B_s) + \frac{1}{2} (-i\nabla \cdot a)(B_s) - U(B_s, \sigma_s) \right) g(B_s, \sigma_s) \right] \\ &\quad + e^{Z_{s-}} \left(g(B_s, -\sigma_{s-}) e^{W(B_s, -\sigma_{s-})} - g(B_s, \sigma_{s-}) \right), \quad s > 0, \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} G(0) &= \left(\frac{1}{2} \Delta - ia \cdot \nabla - \frac{1}{2} (i\nabla \cdot a) - \frac{1}{2} a^2 - V - U(\cdot, \sigma) - 1 + e^{W(\cdot, -\sigma)} \right) g(x, \sigma) \\ &= -(H_S(\vec{a}, V) + 1) g(x, \sigma). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f, (S_t - 1)g) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t ds \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \overline{f(x, \sigma)} \mathbb{E}^{x, \sigma} [G(s)] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \overline{f(x, \sigma)} \mathbb{E}^{x, \sigma} [G(0)] = (f, -(H_S(\vec{a}, V) + 1)g). \end{aligned}$$

となるから $K = H_S(\vec{a}, V) + 1$ が示せた.

qed

注意 3.2 (1) 経路積分表示 (3.6) に \log が現れる直感的な理由は, 例えば $e^{-\int_0^t V(B_s) ds} - 1 = \int_0^t e^{-\int_0^r V(B_s) ds} (-V(B_r)) dr$ の公式から $-(1/2)\Delta + V$ の生成される熱半群の経路積分表示 (3.1) が得られたように,

$$e^{\int_0^t W(B_s, -\sigma_s) dN_s} - 1 = \int_0^t e^{\int_0^r W(B_s, -\sigma_s) dN_s} (e^{W(B_r, -\sigma_r)} - 1) dN_r$$

から非対角成分が $-e^{W(x, -\sigma)} + 1$ という形の経路積分表示ができそうだ. 実際 $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上の掛け算作用素である非対角成分 $-(1/2)(b_1 + i(-\sigma)b_2)$ を強引に $-e^{\log[(1/2)(b_1 + i(-\sigma)b_2)]} + 1 - 1$ と表して得たのが定理 3.1 である.

(2) $T = 0$ になる場合にはゼロ点の近傍で底上げが必要である. 定理 4.6 をみよ.

3.4 相対論的シュレディンガー作用素

Lévy 過程のもう一つの典型的な応用として相対論的シュレディンガー作用素がある. 相対論的シュレディンガー作用素 H_R は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素

$$H_R = \sqrt{-\Delta + m^2} - m + V$$

で定義される. $e^{-t\sqrt{-\Delta + m^2}}$ が正値性保存作用素であるから $F(p) = \sqrt{|p|^2 + m^2}$ とすれば, 命題 2.2 より

$$F(p) = +\frac{1}{2}p \cdot Ap + i\beta \cdot p - \int (e^{ipz} - 1 - ipz) \nu(dz) \quad (3.8)$$

と表せる. 実際には $A = 0$, $\beta = 0$, $\nu(dx) = 2(m/2\pi)^{(d+1)/2} K_{(d+1)/2}(m|x|)|x|^{-(d+1)/2} dx$ である. 一方 Lévy-Khintchine 公式より, $\mathbb{E}_P[e^{ip\eta_t}] = e^{-tF(p)}$ となる Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ が存在するから結局

$$e^{-t\sqrt{-\Delta + m^2}} f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{-tF(p)} \hat{f}(p) e^{ipx} dp = \mathbb{E}_P[f(x + \eta_t)]$$

と表せる¹³. これから

$$(f, e^{-tH_R} g) = e^{+tm} \int dx \mathbb{E}_P [\overline{f(\eta_0)} g(\eta_t + x) e^{-\int_0^t V(\eta_s) ds}]$$

が従う. 相対論的シュレディンガー作用素がベクトルポテンシャル \vec{a} を含むとき, つまり $\sqrt{(\vec{p} - \vec{a})^2 + m^2} - m + V$ が生成する熱半群の経路積分表示も構成されている. ただし, 擬微分作用素を経由して $\sqrt{(\vec{p} - \vec{a})^2 + m^2} - m + V$ に対応する自己共役作用素 H_W を定義¹⁴し

¹³ $e^{-t\sqrt{-\Delta + m^2}}$ の積分核は $2 \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{(d+1)/2} \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{(d+1)/4}} K_{(d+1)/2}(m\sqrt{|x-y|^2 + t^2})$ である. ここで

K_ν は変形ベッセル関数.

¹⁴ ワイル量子化という.

て、それが生成する熱半群が Lévy 過程によって経路積分表示される [IT86]. このように構成された H_W はスペクトル分解定理から定義される作用素 $H_R(\vec{a}) = \sqrt{(\vec{p} - \vec{a})^2 + m^2} - m + V$ とは当然異なる. 我々の知る限り $H_R(\vec{a})$ の生成する熱半群の経路積分表示は未だ構成されていないようである.

4 汎関数積分表示とスペクトル解析

ここから量子場と結合した模型の汎関数積分表示について述べる. 今まではパス空間上の積分表示だったので経路積分表示と称していたが, 量子場が入ってくると実超関数空間上の積分表示にかかわるので汎関数積分表示と呼ばれる. もっと正確にいうとパス空間 \times 実超関数空間上に積測度が入った空間上での積分表示である. さらにパス空間上の積分表示のためにブラウン運動 B_t や Lévy 過程 η_t が導入されたように, 量子場の場合にはユークリッド場から定義されるガウス過程として $\phi_E(j_t f)$ や $A_E(j_t f)$ が必要である.

ここから Nelson 模型, Pauli-Fierz 模型, スピンボゾン模型またそれらの並行移動不変な模型を考察する. 詳細を述べる余裕はないがこれらの模型では適当な条件の下で基底状態の存在が示されている.

4.1 Nelson 模型

我々の考察する模型の中で Nelson 模型は最もスペクトル解析が進んでいる模型である. はじめに形式的な説明をする. 湯川模型とは次のラグランジアン密度で与えられる.

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) + \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu (i \partial_\mu - m_e) \Psi(x) - g \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \phi(x).$$

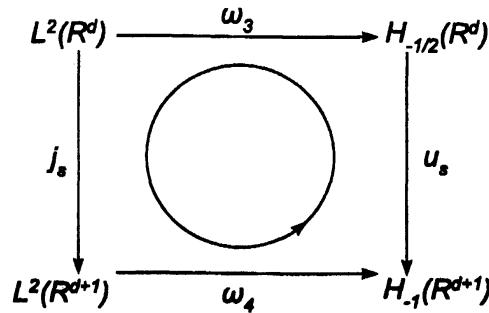
ここで m, m_e はボゾン (中間子) とフェルミオン (核子) の質量を表し, $x = (t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$, ϕ はスカラー場, Ψ はフェルミ場を表す. γ は 4×4 ガンマ行列である. Nelson 模型は, ディラック作用素 $\gamma^\mu (i \partial_\mu - m_e)$ をシュレディンガー作用素 $H_p = -(1/2) \Delta + V$ に置き換え, フェルミオンを 1 粒子状態に制限したものである. Nelson ハミルトニアンを形式的に書けば次のようになる.

$$H_p + g \phi(\vec{x}) + \int \sqrt{k^2 + m^2} a^*(k) a(k) d^3 k.$$

ここから厳密に Nelson 模型を定義しよう. 後のためにフォック表現のかわりにシュレディンガー表現で定義する. $S'_r = S'_r(\mathbb{R}^d)$ を実シュワルツ超関数の空間とする. $\phi \in S'_r$ と $f \in S_r$ のペアリングを $\phi(f) = \langle \phi, f \rangle \in \mathbb{R}$ で表す. Bochner-Minlos の定理より S'_r 上には次を満たすガウス型確率測度 μ とシグマ代数 Σ が存在する.

$$(1) \Sigma = \sigma(\phi(f), f \in S_r), \quad (2) \int e^{i\phi(f)} d\mu = e^{-(1/4)\|f\|^2}.$$

テスト関数を $\phi(f) = \phi(\Re f) + i\phi(\Im f)$ で複素線形に拡張し, さらに $\int |\phi(f)|^2 d\mu = \frac{1}{2} \|f\|^2$ により $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ まで拡張しておく. $\phi(f)$ たちで張られる線形空間 $\{\phi(f_1) \cdots \phi(f_n), f_j \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ は $L^2(S'_r)$ で稠密になる. $\omega_m(k) = \sqrt{|k|^2 + m^2}$ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の掛け算作用素とする. このとき

図 3: j_s の構成

$d\Gamma(\omega_m(-i\nabla)) : L^2(S'_r) \rightarrow L^2(S'_r)$ を次で定義する¹⁵ :

$$d\Gamma(\omega_m(-i\nabla)) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) := \sum_{j=1}^n : \phi(f_1) \cdots \phi(\omega_m(-i\nabla)f_j) \cdots \phi(f_n) :.$$

ただし $d\Gamma(\omega_m(-i\nabla))1 = 0$. $H_f = d\Gamma(\omega_m(-i\nabla))$ とおく. 状態ベクトルのなすヒルベルト空間は $\mathcal{H}_N = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(S'_r)$ である. H_{N0} を

$$H_{N0} = H_p \otimes 1 + 1 \otimes H_f$$

としよう. Nelson ハミルトニアンは \mathcal{H}_N 上の作用素として次で定義される.

$$H_N = H_{N0} + g \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \phi(\tilde{\varphi}(x - \cdot)) dx, \quad g \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

ここで $\mathcal{H}_N \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} L^2(S'_r) dx$ と同一視した. $\tilde{\varphi} = (\hat{\varphi}/\sqrt{\omega_m})$ で $\hat{\varphi}$ はカットオフ関数といわれるもので $\sqrt{\omega_m}\hat{\varphi}, \hat{\varphi}/\omega_m \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を仮定する. H_N は相互作用項 H_I が掛け算作用素なので e^{-tH_N} の汎関数積分表示に Trotter 積公式が直接使える. ゆえに

$$e^{-tH_N} = s - \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-(t/n)H_I} e^{-(t/n)H_p \otimes 1} e^{-(t/n)1 \otimes H_f})^n$$

となる. 実は $e^{-|t-s|H_f} = J_t^* J_s$ となる J_t が存在する. それは次のようにすればいい. 構成的場の理論でミンコスキー空間とユークリッド空間をつなげる手法を模倣する. いま, $H_\nu(\mathbb{R}^n) = \{f | \hat{f}(k)(|k|^2 + m^2)^{\nu/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ とする.

$$u_s = \sqrt{2}\delta_s \otimes \cdot : H_{-1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H_{-1}(\mathbb{R}^{d+1}), \quad f \mapsto \sqrt{2}\delta(s - k_0) \otimes f(k)$$

は等長作用素になる. 実際 $(u_s f, u_t g)_{H_{-1}(\mathbb{R}^{d+1})} = (f, e^{-|t-s|\omega(-i\nabla)} g)_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^d)}$ がわかる. この u_s を $L^2(\mathbb{R}^d)$ から $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ の作用素へ引き戻す.

つまり

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \sqrt{\omega_m(k)} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H_{-1/2}(\mathbb{R}^d), \\ \omega_4 &= \sqrt{\omega_m(k)^2 + |k_0|^2} : L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \rightarrow H_{-1}(\mathbb{R}^{d+1}) \end{aligned}$$

¹⁵: X はウィック積を表す. それは次のように帰納的に定義される. $: \phi(f) := \phi(f)$, $: \phi(f)\phi(f_1) \cdots \phi(f_n) := \phi(f) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (f_j, f) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_j) \cdots \phi(f_n) :$

だから,

$$j_s = \omega_4^{-1} u_s \omega_3 : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{d+1})$$

とすればいい. 図3をみよ. 具体的にフーリエ変換でかけば

$$\widehat{j_t f}(k, k_0) = \frac{e^{-itk_0}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\omega_m(k)}{\omega_m(k)^2 + |k_0|^2}} \widehat{f}(k), \quad (k, k_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

となり $j_t^* j_s = e^{-|t-s|\omega_m(-\nabla)}$ をみたま. この j_t を第2量子化する. つまり

$$J_t 1 = 1, \quad J_t : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) := \phi_E(j_t f_1) \cdots \phi_E(j_t f_n):$$

で定めれば $e^{-|t-s|H_t} = J_t^* J_s$ が成立することが分かる. ここで $\phi_E(F) = \langle \phi_E, F \rangle$, $\phi_E \in S'_r(\mathbb{R}^{d+1})$, $F \in S_r(\mathbb{R}^{d+1})$ はユークリッド場といわれる. $L^2(S'_r(\mathbb{R}^d), d\mu)$ と同様に確率空間 $L^2(S'_r(\mathbb{R}^{d+1}), d\mu_E)$ が定義され, $\phi_E(F)$ は $F \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ まで拡張しておく.

定理 4.1 [BHLMS02] $F, G \in \mathcal{H}_N$ とする. このとき次が成り立つ.

$$(F, e^{-tH_N} G) = \int dx \mathbb{E}^x \left[\int d\mu_E \overline{J_0 F(B_0)} (J_t G(B_t)) e^{-\int_0^t V(B_s) ds} e^{-\int_0^t \phi_E(j_s \varphi(-B_s)) ds} \right]. \quad (4.2)$$

証明の概略: トロッタ積公式と上で説明した分解を使えば

$$(F, e^{-H_N} G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(J_0 F, \left(J_0 e^{-\frac{t}{n} H_p} e^{-\frac{t}{n} H_1} J_0^* \right) \left(J_{\frac{t}{n}} e^{-\frac{t}{n} H_p} e^{-\frac{t}{n} H_1} J_{\frac{t}{n}}^* \right) \cdots \left(J_t e^{-\frac{t}{n} H_p} e^{-\frac{t}{n} H_1} J_t^* \right) J_t G \right)$$

となる. 射影作用素 $E_s = J_s J_s^*$ のマルコフ性と e^{-tH_p} に対する Feynman-Kac の公式を使い極限操作を実行すれば定理が得られる. qed

定理 4.1 では $F, G \in \mathcal{H}$ を $F, G : x \mapsto F(x), G(x) \in L^2(S'_r)$ と見なしている. (4.2) に現れる積分核が $e^{-\int_0^t V(B_s) ds} e^{-\int_0^t \phi_E(j_s \varphi(-B_s)) ds} > 0$ なので e^{-tH_N} は正值性改良作用素である. 無限次元版 Perron-Frobenius 定理より次が分かる.

系 4.2 H_N の基底状態 φ_g が存在すれば $\varphi_g > 0$ となる. 特に基底状態は存在すれば一意的である.

さらに基底状態の存在も汎関数積分表示 (4.2) から示すことが出来る [Spo99]. この系より $f \geq 0$ に対して $(\varphi_g, f \otimes 1) > 0$ がわかるので, 有界作用素 S に対して

$$(\varphi_g, S\varphi_g) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(e^{-tH_N} f \otimes 1, S e^{-tH_N} f \otimes 1)}{\|e^{-tH_N} f \otimes 1\|^2} \quad (4.3)$$

が従う. (4.3) の重要な応用として $S = 1 \otimes e^{-\beta N}$, $\beta \geq 0$, がある. ここで $N = d\Gamma(1)$ は個数作用素である. $\phi_E(F)$ がガウス型確率変数であることから $(e^{-tH_N} f \otimes 1, (1 \otimes e^{-\beta N}) e^{-tH_N} f \otimes 1)$ で $d\mu_E$ に関する積分は計算できる. 結局次が得られる

$$(\varphi_g, e^{-\beta N} \varphi_g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} e^{-(g^2/2)(1-e^{-\beta})} \int_{-T}^0 dt \int_0^T ds W(t-s, B_s - B_t) d\mu_T.$$

ここで

$$d\mu_T = \frac{1}{Z_{2T}} e^{\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{g^2/4 \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T dt' W(t-s, B_t - B_{t'})} dP^0$$

は確率測度, ブラウン運動 $(B_t)_{t \geq 0}$ は $t = 0$ で折り返して \mathbb{R} 全体に拡張され, ウィナー測度 P^0 は $C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d) = C((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d) \times C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ と同一視して $C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ 上に拡張されている. W は 2 重ポテンシャルといわれるもので次で与えられる.

$$W(t, X) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{\varphi}(k)^2}{\omega_m(k)^2} e^{-|t|\omega(k)_m} e^{ik \cdot X} dk.$$

定理 4.3 [BHLMS02] $\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(k)|^2 / \omega_m(k)^3 dk < \infty$ とする. このとき測度 $d\mu_T$ がある確率測度 $d\mu_\infty$ に弱収束し, 次が成り立つ.

$$(\varphi_g, (1 \otimes e^{-\beta N}) \varphi_g) = \int_{C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} e^{-(g^2/2)(1-e^{-\beta}) \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty ds W(t-s, B_s - B_t)} d\mu_\infty. \quad (4.4)$$

ここで

$$\left| \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty ds W(t-s, B_s - B_t) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega_m(k)^3} dk \quad (4.5)$$

を注意しておく. 右辺に $\int |\hat{\varphi}(k)|^2 / \omega_m(k)^3 dk$ が出てくるのにハッとさせられる. 定理 4.3 で右辺の被積分関数を β の関数とみたとき, それは非常に単純な構造をしている. しかも μ_∞ が有限測度 (確率測度) なので β に関する解析がしやすい. 次のことが示せる [BHLMS02].

- (1) $(\varphi_g, (1 \otimes e^{-\beta N}) \varphi_g)$ は β に関して複素平面全体 \mathbb{C} に解析接続できる. さらに解析接続された $(\varphi_g, (1 \otimes e^{-\beta N}) \varphi_g)$ も (4.4) と同じ積分表示をもつ.
- (2) $\varphi_g \in D(1 \otimes e^{-\beta N}), \forall \beta \in \mathbb{C}$.
- (3) $(\varphi_g, (1 \otimes N) \varphi_g) = \frac{d}{d\beta} (\varphi_g, (1 \otimes e^{-\beta N}) \varphi_g) \Big|_{\beta=0}$ から

$$(\varphi_g, (1 \otimes N) \varphi_g) = \frac{g^2}{2} \int_{C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \left(\int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty ds W(t-s, B_s - B_t) \right) d\mu_\infty.$$

- (4) $\lim_{\|\hat{\varphi}/\omega_m^{3/2}\| \rightarrow \infty} (\varphi_g, (1 \otimes N) \varphi_g) = \infty$.

基底状態 φ_g を N のスペクトル $\sigma(N) = N^\times$ で分解して $\varphi_g = \bigoplus_{n=0}^\infty \varphi_g^{(n)}$ とおく. (2) より $\|e^{\beta N} \varphi_g\|^2 = \sum_{n=0}^\infty \|e^{\beta n} \varphi_g^{(n)}\|^2 < \infty, \forall \beta > 0$, なので, ボソンを n 個含む状態 $\varphi_g^{(n)}$ の存在確率は指数関数的に減衰している.¹⁶ しかし, 個数期待値は赤外発散 $\|\hat{\varphi}/\omega_m^{3/2}\| \rightarrow \infty$ の下では発散してしまうことが (3) から分かる. さらに $\|\hat{\varphi}/\omega_m^{3/2}\| = \infty$ のときに基底状態が存在しないことも証明されている [Hik07, LMS01]. まとめると

$$\text{赤外発散} \rightarrow \begin{cases} \text{ボソンの個数の期待値発散} \\ \text{基底状態の非存在} \end{cases}$$

このように Nelson 模型は汎関数積分による解析が最も上手くいった例である. さらなる汎関数積分の Nelson 模型への応用として weak coupling limit や紫外切断の除去, ブラウン運動に相対的なギブス測度への応用がある. 詳しくは [LHBG07] を参照せよ.

¹⁶超指数的減衰性 (superexponential decay) という.

4.2 Pauli-Fierz 模型

Pauli-Fierz 模型について述べる. 電磁場の中を電荷を持った N 個の粒子が動いている状態を考える. $B = B(x, t)$ を磁場, $E = E(x, t)$ を電場とする. $q_j = q_j(t) \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, \dots, N$, は時刻 t での j 番目の粒子の位置を表すとする. このときのマックスウエル方程式は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -\nabla \times E, & \dot{E} &= \nabla \times B - e \sum_{j=1}^N \varphi(\cdot - q_j) \dot{q}_j, \\ \nabla \cdot B &= 0, & \nabla \cdot E &= e \sum_{j=1}^N \varphi(\cdot - q_j). \end{aligned}$$

ここで φ は電荷の分布を表す. つまり $\int \varphi(x) dx = 1$. ベクトルポテンシャル $A = A(x, t)$ は $B = \nabla \times A$ となるベクトルで, スカラーポテンシャル $\phi = \phi(x, t)$ は $E = -\dot{A} - \nabla \phi$ となるものとして導入される. クーロンゲージ $\nabla \cdot A = 0$ を仮定する. そうするとマックスウエル方程式は

$$\square A = \nabla \phi - e \sum_{j=1}^N \varphi(\cdot - q_j) \dot{q}_j, \quad \Delta \phi = -e \sum_{j=1}^N \varphi(\cdot - q_j)$$

と書き表せる. ここから, いつものようにルジャンドル変換を通してハミルトニアンが定義される. 結果を書けば

$$H_{cl} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(p_j - e \int A(x) \varphi(x - q_j) dx \right)^2 + \frac{1}{2} \int \dot{A}^2 + (\nabla \times A)^2 dx + \frac{1}{2} e \sum_{j=1}^N \int \phi(x) \varphi(x - q_j) dx$$

となる. ここで p_j は q_j の共役運動量であり, $\Delta \phi = -e \sum_{i=1}^N \varphi(\cdot - q_i)$ とおくことにより $d = 3$ の場合には

$$\frac{1}{2} e \sum_{j=1}^N \int \phi(x) \varphi(x - q_j) dx = \frac{e^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int \int \frac{\varphi(q_i - y) \varphi(q_j - y')}{|y - y'|} dy dy' \quad (4.6)$$

と計算できる.

さて Pauli-Fierz ハミルトニアンはこの H_{cl} でベクトルポテンシャル A を量子化して定義される. 実際には次のようにする. 前章の $\phi(f)$ を定義したときと同じ手法をとる. $Q = \underbrace{S_r \times \dots \times S_r}_d$ とし $A(f) = \langle A, f \rangle$, $A \in Q'$, $F \in Q$ とおく. Bochner-Minlos の定理より Q' 上にシグマ代数 Σ_Q とガウス型確率測度 μ_A で次のようなものが存在する.

$$(1) \Sigma_Q = \sigma(A(f), f \in Q), \quad (2) \int e^{iA(f)} d\mu_A = e^{-(1/4)q(f,f)}.$$

ここで双線形形式は

$$q(f, g) = \sum_{\mu, \nu=1}^d \int \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|k|^2} \right) \overline{\hat{f}_\mu(k)} \hat{g}_\nu(k) dk$$

で定義する. これは退化している. 横断的デルタ関数 $\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|k|^2}$ が現れる理由はクーロンゲージによる. $\phi(f)$ 同様に $\mathcal{A}(f)$ のテスト関数も $f \in \oplus^d L^2(\mathbb{R}^d)$ まで拡張できる. また $\mathcal{A}(f)$ で張られる線形空間 $\{\mathcal{A}(f_1) \cdots \mathcal{A}(f_n), f_j \in \oplus^d L^2(\mathbb{R}^d)\}$ は $L^2(Q')$ で稠密である. 以降 $\mathcal{A}_\mu(f) = \mathcal{A}(0 \oplus \cdots \overset{\mu}{f} \cdots \oplus 0)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, とおく.

$\omega(k) = |k|$ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の掛け算作用素とする. これは $\omega_{m=0}(k)$ に他ならない. 電磁場に付随する量子である光子の質量 m がゼロであることに対応している. 数学的な側面からみると $m=0$ の場合は解析が非常に難しくなる. その最大の理由は赤外発散にある. 電荷の分布が運動量表示で原点の近傍で $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ とすれば, $\int |\hat{\varphi}(k)|^2 / \omega(k)^3 dk$ が $d=3$ のとき発散してしまうからである.

次に $H_{\text{rad}} : L^2(Q') \rightarrow L^2(Q')$ を定義する.

$$H_{\text{rad}} : \mathcal{A}(f_1) \cdots \mathcal{A}(f_n) := \sum_{j=1}^n : \mathcal{A}(f_1) \cdots \phi(\omega(-i\nabla)f_j) \cdots \mathcal{A}(f_n) :.$$

ただし $H_{\text{rad}} 1 = 0$. $\mathcal{H}_{\text{PF}} = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(Q')$ とおこう.

$$H_{\text{PF}0} = H_p \otimes 1 + 1 \otimes H_{\text{rad}}$$

にミニマル相互作用 $-i\nabla_\mu \otimes 1 \rightarrow T_\mu = -i\nabla_\mu \otimes 1 - e \int^\oplus \mathcal{A}_\mu(\tilde{\varphi}(\cdot - x)) dx$ $\mu = 1, 2, 3$, を導入して Pauli-Fierz ハミルトニアン H_{PF} を次で定義する.

$$H_{\text{PF}} = \frac{1}{2} T \cdot T + V \otimes 1 + 1 \otimes H_{\text{rad}}. \quad (4.7)$$

H_{PF} は $D(-\Delta \otimes 1) \cap D(1 \otimes H_{\text{rad}})$ 上で自己共役である. ただし, この自己共役性は自明ではない [Hir00b, Hir02]. $e^{-tH_{\text{PF}}}$ の汎関数積分表示も構成されている.

定理 4.4 [Hir97, FFG97] $F, G \in \mathcal{H}_{\text{PF}}$ とする. このとき次が成り立つ.

$$(F, e^{-tH} G) = \int dx \mathbb{E}^x \left[\int d\mu_{AE} \overline{J_0 F(B_0)} (J_t F(B_t)) e^{-\int_0^t V(B_s) ds} e^{-ie \int_0^t \mathcal{A}_E(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) dB_s} \right] \quad (4.8)$$

ここで $j_t : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ と $J_t : L^2(Q', d\mu_A) \rightarrow L^2(Q'_E, d\mu_{AE})$ は前章のスカラー場で定義されたものと同様に定義される等長作用素の族である. \mathcal{A}_E は \mathcal{A} に対するユークリッド場である. 証明はトロツタ積公式を直接使うわけにはいかない. 詳しくは [Hir97] を参照せよ. この積分表示から様々なことが分かる. 重要なことのの一つは $e^{-tH_{\text{PF}}}$ の正值改良性である. 積分核に phase

$$S_t = \exp \left(-ie \int_0^t \mathcal{A}_E(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) \cdot dB_s \right) = \exp \left(-ie \mathcal{A}_E \left(\oplus_\mu \int_0^t j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) dB_s^\mu \right) \right) \quad (4.9)$$

があるので $F \geq 0, G \geq 0$ であっても $(F, e^{-tH_{\text{PF}}} G) > 0$ とはならない. しかし $\theta = e^{-i(\pi/2)N}$ でユニタリ変換すると $(F, \theta^{-1} e^{-tH_{\text{PF}}} \theta G) > 0$ が示せる. これは $\theta^{-1} S_t \theta$ がシフト作用素になるというカラクリにある¹⁷. この帰結として次が従う.

¹⁷シフト作用素は正值性保存作用素であり, 正值性改良作用素でない. しかし $J_0^* \theta^{-1} S_t \theta J_t$ が正值性改良作用素であることが示せる.

系 4.5 [Hir00a] H_{PF} の基底状態は存在すれば一意的である. さらに $e^{i(\pi/2)N}\varphi_g > 0$ となる基底状態 φ_g を選ぶことが出来る.

また $\varphi_g = \varphi_g(x, A)$ の $x \in \mathbb{R}^d$ に関する指数的減衰性の Carmona 評価 [Hir04] もできる. さらに $E(A) = \inf \sigma(H_{\text{PF}})$ として $|(F, e^{-tH_{\text{PF}}}G)| \leq (|F|, e^{-tH_{\text{PF}0}}|G|)$ から簡単に反磁性的不等式

$$E(0) \leq E(A) \quad (4.10)$$

も従う [Hir97]. しかし基底状態の期待値 $(\varphi_g, S\varphi_g)$ については Nelson 模型のようには上手くいかない. その理由は S_t の分散が

$$\int d\mu_{AE} S_t S_t = \exp \left(\frac{-e^2}{4} \sum_{\mu, \nu} \int_0^t dB_s^\mu \int_0^t dB_r^\nu W_{\mu\nu}(s-r, B_s - B_r) \right)$$

となり, 確率 2 重積分が現れることにある. ここで

$$W_{\mu\nu}(t, X) = \int \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|k|^2} \right) \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^2} e^{ikx} e^{-t|\omega(k)|} dk.$$

もちろん上の確率 2 重積分の表記は形式的であるが, 正確な意味を付けることが出来る [BH07]. Nelson 模型の場合には確率 2 重積分は 2 重リーマン積分になっていた. さて $(\varphi_g, (1 \otimes e^{-\beta N})\varphi_g)$ の経路積分表示であるが

$$(\varphi_g, (1 \otimes e^{-\beta N})\varphi_g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} e^{+(e^2/2)(1-e^{-\beta}) \sum_{\mu\nu} \int_{-T}^0 dB_s^\mu \int_0^T dB_r^\nu W_{\mu\nu}(t-s, B_t - B_s)} d\mu_{AT} \quad (4.11)$$

とかけるのは Nelson 模型と同じように示せる [Hir04]. 測度 μ_{AT} の $T \rightarrow \infty$ に関する弱収束性は [BH07] で示されている. (4.11) に関する部分的な結果は [HL07b] にある.

4.3 スピンを含む Pauli-Fierz 模型

スピンを含む Pauli-Fierz 模型は $\mathcal{H}_{\text{PF}}^S = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2) \otimes L^2(Q')$ 上に

$$H_{\text{PF}}^S = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 (\sigma_\mu T_\mu)^2 + V \otimes 1 + 1 \otimes H_{\text{rad}} = H_{\text{PF}} - \frac{1}{2} \int^\oplus \vec{\sigma} \cdot \mathcal{B}(\vec{\varphi}(\cdot - x)) dx \quad (4.12)$$

で定義される. ただし $\mathcal{B}(\vec{\varphi}(\cdot - x)) = \text{rot}_x \mathcal{A}(\vec{\varphi}(\cdot - x))$ である. $e^{-tH_{\text{PF}}^S}$ の汎関数積分表示を得るためには古典的な場合 $H_S(\vec{a}, V)$ と同様にスピン変数 $\sigma \in \mathbb{Z}_2$ を導入すると便利である. つまり

$$(H_{\text{PF}}^S F)(\sigma) = \left(H_{\text{PF}} - \frac{e}{2} \sigma \mathcal{B}_3 \right) F(\sigma) - \frac{e}{2} (\mathcal{B}_1 + i(-\sigma)\mathcal{B}_2) F(-\sigma)$$

により, H_{PF}^S を $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2) \otimes L^2(Q')$ 上の作用素とみなす. 次をえる.

定理 4.6 [HL07a] $F, G \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2) \otimes L^2(Q')$ とする. このとき次が成り立つ.

$$(F, e^{-tH_{\text{PF}}^S} G) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \int dx \mathbf{E}^{x, \sigma} \left[\int d\mu \overline{J_0 F(\xi_0)} (J_t G(\xi_t)) e^{X_t} \right]. \quad (4.13)$$

ただし

$$X_t^\epsilon = - \int_0^t V(B_s) ds - ie \int_0^t \mathcal{A}_E(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) \cdot dB_s - \int_0^t \left(-\frac{\epsilon}{2}\right) \sigma_s \mathcal{B}_{E,3}(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) ds \\ + \int_0^{t+} \log \left[\frac{\epsilon}{2} \left(\mathcal{B}_{E,1}(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) + i(-\sigma_s) \mathcal{B}_{E,2}(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) \right) \right]_\epsilon dN_s,$$

$$\mathcal{B}_E(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - x)) = \text{rot}_x \mathcal{A}_E(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - x)). \text{ さらに } [k]_\epsilon = K + \epsilon \psi_\epsilon(K), \psi_\epsilon := \begin{cases} 1, & |x| < \epsilon/2, \\ 0, & |x| \geq \epsilon/2. \end{cases}$$

注意 4.7 (1) (4.13) の積分が収束することは自明ではない。それを示すためには射影作用素 $E_s = J_s J_s^*$ の Hypercontractivity の議論が必要である。詳しくは [HL07a] を参照せよ。

(2) X_t^ϵ 中の $[\cdot]_\epsilon$ は $[\cdot]$ の零点を回避するために導入した底上げである。非対角成分 $P = \mathcal{B}_{E,1}(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) + i(-\sigma_s) \mathcal{B}_{E,2}(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) = 0$ と仮定すると $\int \log[P]_\epsilon dN_s = \log \epsilon^{N_t}$ であるから $e^{\int \log[P]_\epsilon dN_s} = \epsilon^{N_t}$ となり、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $\epsilon^{N_t} \not\rightarrow 0$ で N_t の測度がゼロの可測集合、つまり対角成分だけが残る。

汎関数積分表示の積分核がスカラーであることから反磁性的不等式 (4.10) の拡張版を得る。つまり $E(H_{\text{PF}}^S) = E(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ とし、 \mathcal{A} と \mathcal{B} を独立に与えられたものと見なせば

$$\max \left\{ E \left(0, \sqrt{\mathcal{B}_i^2 + \mathcal{B}_j^2}, 0, \mathcal{B}_k \right), (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ の巡回置換} \right\} \leq E(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3). \quad (4.14)$$

4.4 スピンボゾン模型

Pauli-Fierz 模型の汎関数積分表示が構成された。その簡単な応用としてスピンボゾン模型の汎関数積分表示がある。スピンボゾン模型は $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(S_r^1)$ 上の自己共役作用素で

$$H_{\text{sb}} = \epsilon \sigma_1 \otimes 1 + \alpha \sigma_3 \otimes \phi(h) + 1 \otimes H_f, \quad \epsilon, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.15)$$

で与えられる。スピン変数 $\sigma \in \mathbb{Z}_2$ を使って H_{sb} を書き直せば

$$(H_{\text{sb}} \Psi)(\sigma) = (H_f + \alpha \phi(h)) \Psi(\sigma) - e^{i\pi + \log \epsilon} \Psi(-\sigma)$$

となり非対角成分が定数1になる。これから即座に次の定理が得られる。

定理 4.8 [HH07] $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^2 \otimes L^2(S_r^1)$ とする。このとき次が成り立つ。

$$(\Phi, e^{-tH_{\text{sb}}} \Psi) = e^t \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_P^\sigma \left[\int d\mu_E \overline{J_0 \Phi(\sigma_0)} e^{-\alpha \phi_E \left(\int_0^t \sigma_s j_s h ds \right)} (-\epsilon)^{N_t} J_t \Psi(\sigma_t) \right]. \quad (4.16)$$

定理 4.8 では $e^{-tH_{\text{sb}}}$ の積分核が H_{PF}^S と同様にスカラーで表されている。さらに H_{sb} は $\epsilon \leftrightarrow -\epsilon$ でユニタリー同値である。特に $\epsilon < 0$ のときは (4.16) より $e^{-tH_{\text{sb}}}$ が正值性改良作用素になるので、 $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ (ただし $\epsilon \neq 0$) に対して H_{sb} に基底状態が存在すれば一意的であることが結論される。ちなみに $\epsilon = 0$ のときは自明的に基底状態は 2 重に縮退しているのでスピンボゾン模型は相互作用がスイッチオンした瞬間に一意的な基底状態を持つことになる。また (4.16) の表現を用いれば $(\varphi_g, T\varphi_g)$ の経路積分表示も可能であろう [HH07]。

5 並行移動不変な模型

ポテンシャル V が恒等的にゼロな場合, Nelson 模型も Pauli-Fierz 模型も並行移動不変になり基底状態は存在しない. そこでファイバー $P \in \mathbb{R}^d$ ごとにハミルトニアンを分解してスペクトルを解析する.

5.1 Nelson 模型

Nelson 模型でポテンシャル V を恒等的にゼロと仮定する. このとき $P_f = d\Gamma(-i\nabla)$ を場の運動量作用素, さらに全運動量作用素を $P_T = -i\nabla \otimes 1 + 1 \otimes P_f$ で定義すれば

$$[H_N, P_T] = 0$$

となる. 正確に言えば $[e^{itP_T}, e^{-sH_N}] = 0$. 一般論より H_N は P_T のスペクトルでファイバー分解できる. 次のことが知られている.

$$\mathcal{H}_N \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} L^2(S_f') dP, \quad H_N \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} H_N(P) dP, \quad H_N(P) = \frac{1}{2}(P - P_f)^2 + g\phi(\tilde{\varphi}) + H_f.$$

$H_N(P)$, $P \in \mathbb{R}^d$, は $D(H_f) \cap D(P_f^2)$ 上の自己共役作用素である. $e^{-tH_N(P)}$ の汎関数積分表示は次のようになる.

定理 5.1 [Hir07] $\Phi, \Psi \in L^2(S_f')$ とする. このとき次が成り立つ.

$$(\Phi, e^{-tH_N(P)}\Psi) = \mathbb{E}^0 \left[e^{iP \cdot B_t} \int d\mu_E \overline{J_0 \Phi}(J_t e^{-iP_f \cdot B_t} \Phi) e^{-g \int_0^t \phi_E(\tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) ds} \right] \quad (5.1)$$

証明の概略: Π_s は熱核であった. いま $F_s = \Pi_s \otimes \Phi$, $G_r = \Pi_r \otimes \Psi$ として $(F_s, e^{-tH_N} e^{-i\xi \cdot P_T} G_r)$ を定理 4.2 を用いて汎関数積分表示すれば

$$(F_s, e^{-tH_N} e^{-i\xi \cdot P_T} G_r) = \int dx \mathbb{E}^x \left[\Pi_s(B_0) \Pi_r(B_t - \xi) \int d\mu_E \overline{J_0 \Phi}(J_t e^{-i\xi \cdot P_f} \Psi) e^{-g \int_0^t \phi_E(\tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) ds} \right] \quad (5.2)$$

となる. 一方

$$(F_s, e^{-tH_N} e^{-i\xi \cdot P_T} G_r) = \int_{\mathbb{R}^d} dP e^{-i\xi \cdot P} (F_s(P), e^{-tH_N(P)} G_r(P)) \quad (5.3)$$

である. ここで $F_s(P) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ix \cdot (P - P_f)} \Pi_s(x) \Psi dx$ である. $G_r(P)$ も同様. $s \rightarrow 0$ の極限をとれば $F_s(P) \rightarrow (2\pi)^{-d/2} \Phi$, $\Pi_s(x - y) \rightarrow \delta(x - y)$ に注意して, (5.2) と (5.3) から $s \rightarrow 0$ とすれば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dP (\Phi, e^{-tH_N(P)} G_r(P)) e^{-i\xi \cdot P} \\ &= \mathbb{E}^0 \left[\Pi_r(B_t - \xi) \int d\mu_E \overline{J_0 \Phi}(J_t e^{-i\xi \cdot P_f} \Psi) e^{-g \int_0^t \phi_E(\tilde{\varphi}(\cdot - B_s)) ds} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

をえる. この両辺を ξ についてフーリエ変換すれば

$$\begin{aligned} & (\Phi, e^{-tH_N(P)} G_r(P)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d\xi e^{i\xi \cdot P} \mathbb{E}^0 \left[\Pi_r(B_t - \xi) \int d\mu_E \overline{J_0 \Phi}(J_t e^{-i\xi \cdot P_t} \Psi) e^{-g \int_0^t \phi_E(\bar{\varphi}(\cdot - B_s)) ds} \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる. ここで $r \rightarrow 0$ とすれば (5.1) をえる.

qed

$H_N(P)$ が $L^2(S'_t)$ 上の作用素であるにもかかわらずブラウン運動が汎関数積分表示に現れるところが興味深い. また

$$\exp(iP \cdot B_t) \quad (5.6)$$

のような phase にブラウン運動が出てくるのもおもしろい. この汎関数積分表示から $E(P) = \inf \sigma(H_N(P))$ として $E(0) \leq E(P)$ を得る. ちなみに $e^{-iP_t \cdot B_t}$ はシフト作用素である. さらに $P = 0$ のとき (5.6) の phase が $1 (> 0)$ になるので $e^{-tH_N(P=0)}$ が正値性改良作用素になる. 特に $H_N(P=0)$ の基底状態は存在すれば一意的である. ここで注意をひとつ述べる. 実は H_N の別な表現をとれば任意の P で $e^{-tH_N(P)}$ が正値性改良作用素になることが非常に簡単に示せる [Fro74]. その意味では汎関数積分による Nelson 模型の基底状態の一意性に関する結果は弱い. ただし Pauli-Fierz 模型のようなミニマル結合した模型では威力を発揮する. 次にそれをみてみよう.

5.2 Pauli-Fierz 模型

$V = 0$ とおいた Pauli-Fierz 模型も並行移動不変になり,

$$\mathcal{H}_{\text{PF}} \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} L^2(Q') dP, \quad H_{\text{PF}} \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} H_{\text{PF}}(P) dP, \quad H_{\text{PF}}(P) = \frac{1}{2}(P - P_f - e\mathcal{A}(\bar{\varphi}))^2 + H_{\text{rad}}$$

とファイバー分解できる. $H_{\text{PF}}(P)$ は $\forall P \in \mathbb{R}^d, \forall e \in \mathbb{R}$ で $D(H_{\text{rad}}) \cap D(P_f^2)$ 上で自己共役である [Hir07, LMS07]. $e^{-tH_{\text{PF}}(P)}$ の汎関数積分表示は次で与えられる.

定理 5.2 [Hir07] $\Phi, \Psi \in L^2(Q')$ とする. このとき次が成り立つ.

$$(\Phi, e^{-tH_{\text{PF}}(P)} \Psi) = \mathbb{E}^0 \left[e^{iP \cdot B_t} \int d\mu_{\mathcal{A}E} \overline{J_0 \Phi}(J_t e^{-iP_f \cdot B_t} \Psi) e^{-ie \int_0^t \mathcal{A}_E(j_s \bar{\varphi}(\cdot - B_s)) \cdot dB_s} \right] \quad (5.7)$$

証明の方針は Nelson 模型 $H_N(P)$ の場合と同じである. (5.7) の積分核は形式的に

$$J_0^* \exp \left(i \int_0^t \left(P - P_{E_f} - e\mathcal{A}_E(j_s \bar{\varphi}(\cdot - B_s)) \right) \cdot dB_s \right) J_t$$

となることを注意しておく. ここで P_{E_f} はユークリッド場における場の運動量作用素である. (5.7) にも $e^{iP \cdot B_t}$ が現れるので, $P = 0$ の場合を考えよう. $e^{-ie \int_0^t \mathcal{A}_E(j_s \bar{\varphi}(\cdot - B_s)) \cdot dB_s}$ という項が現れるがこれは前章のトリック $\theta = e^{-i(\pi/2)N}$ を使ってシフト作用素に変換できるから, 次の系を得る.

系 5.3 [Hir07] $\theta^{-1} e^{-tH_{\text{PF}}(P=0)} \theta$ は正値性改良作用素である. 特に $H_{\text{PF}}(P=0)$ の基底状態が存在すれば一意的である.

並行移動不変な Nelson 模型 $H_N(P)$ と異なり $H_{PF}(P)$ の $P \neq 0$ での基底状態の一意性は自明ではない。 $|P|, |e|$ が共に十分小さい場合の基底状態の一意性は [Hir05a, HS01] で示されている。ただし赤外発散 $\int |\hat{\varphi}(k)|^2 / \omega(k)^3 dk = \infty$ が起きている場合 $P \neq 0$ で基底状態が存在しないことが証明されている [Che01, HH06]。その意味で任意の $e \in \mathbb{R}$ で $H_{PF}(P=0)$ の基底状態の一意性を示した系 5.3 は重要である。同様の議論で $\inf \sigma(H_{PF}(P)) = E(P, \mathcal{A})$ として

$$0 = E(0, 0) \leq E(0, \mathcal{A}) \leq E(P, \mathcal{A}), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad (5.8)$$

も示せる。Nelson 模型の場合は積分核が正だったので (5.8) に対応する不等式は即座に導かれるが $H_{PF}(P)$ の場合は上述の θ を介して証明されるので自明なものではない。

さらに $P=0$ のときの基底状態 $\varphi_g(0)$ は $(\varphi_g(0), 1) > 0$ となるので

$$(\varphi_g(0), e^{-\beta N} \varphi_g(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)} e^{(e^2/2)(1-e^{-\beta}) \sum_{\mu\nu} \int_{-t}^0 dB_\mu^\nu \int_0^t dB_\nu^\mu W_{\mu\nu}(s-r, B_s - B_r)} d\mu_{\mathcal{A}t}$$

のようにある確率測度 $d\mu_{\mathcal{A}t}$ で表せるが、この測度の $t \rightarrow \infty$ での弱収束性は今のところ知られていない。

5.3 スピンを含む Pauli-Fierz 模型

スピンを含む場合も $V=0$ とおけば H_{PF}^S は並行移動不変になり同様な議論が出来る。 H_{PF}^S は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{PF}^S &\cong \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} C^2 \otimes L^2(Q') dx, & H_{PF}^S &= \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_{PF}^S(P) dP, \\ H_{PF}^S(P) &= \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \cdot (P - P_f - \mathcal{A}(\vec{\varphi})))^2 + H_f \end{aligned}$$

とファイバー分解できる。結果だけを示す。

定理 5.4 [HL07a] $\Phi, \Psi \in L^2(Q' \times \mathbb{Z}_2)$ とする。このとき次が成り立つ。

$$(\Phi, e^{-tH_{PF}^S(P)} \Psi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^t \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \mathbb{E}^{0, \sigma} \left[e^{iP \cdot B_t} \int J_0 \Phi(\sigma) e^{X_\epsilon(t)} J_t e^{-iP_f \cdot B_t} \Psi(\sigma_t) d\mu_E \right]. \quad (5.9)$$

いま $\inf \sigma(H_{PF}^S(P)) = E(P, \mathcal{A}, B_1, B_2, B_3)$ とおけば、汎関数積分表示 (5.9) より $E(0, 0) \leq E(P, \mathcal{A})$ の拡張版をえる。

$$\max \left\{ E \left(0, 0, \sqrt{B_i^2 + B_j^2}, 0, B_k \right), (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ の巡回置換} \right\} \leq E(P, \mathcal{A}, B_1, B_2, B_3). \quad (5.10)$$

6 おわりに

(1) Nelson 模型 H_N で適当なくりこみを行えば $\hat{\varphi} \rightarrow (2\pi)^{-d/2}$ の極限 H_∞ が存在する [Nel64]。熱半群 e^{-tH_∞} の汎関数積分表示は構成されていないようである。 $m=0$ のとき H_∞ の基底状態の存在は [HHS05] で示されているがその一意性は示されていない。

(2) 相対論的な Pauli-Fierz 模型

$$H_{\text{PF}}^{\text{R}} = \sqrt{\left(\vec{p} - e\mathcal{A}(\vec{\varphi}(\cdot - x))\right)^2 + m^2} - m + V \otimes 1 + 1 \otimes H_{\text{rad}}$$

の生成する熱半群 $e^{-tH_{\text{PF}}^{\text{R}}}$ の汎関数積分表示は構成されていない。実際古典的な場合でも我々の知る限りその経路積分表示はワイル量子化の場合にしか構成されていないようである。また H_{PF}^{R} の基底状態の存在証明も今まで開発されてきた手法を応用すれば出来るのだろうけど、その証明は公表されていない。

参考文献

- [ALS83] G. F. De Angelis, G.J. Lasinio and M. Sirugue, Probabilistic solution of Pauli type equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983), 2433–2444.
- [Ara02] A. Arai, Mathematical theory of quantum particles interacting with a quantum field, In: *Non-commutativity, infinite dimensionality and probability at the crossroads* (eds. N. Obata, et. al.), World Scientific, 2002, 1–50.
- [LHBG07] V. Betz, M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lőrinczi, *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space. With Applications into Rigorous Quantum Field Theory*, to be published from De Gruyter.
- [BH07] V. Betz and F. Hiroshima, Measures with double stochastic integrals on a path space, preprint 2007.
- [BHLMS02] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, Gibbs measure associated with particle-field system, *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 173–198.
- [BHL98] K. Broderix, D. Hundertmarl and H. Leschke, Continuity properties of Schrödinger semigroups with magnetic fields, *Rev. Math. Phys.* **12** (1998), 181–225.
- [Che01] T. Chen, Operator-theoretic infrared renormalization and construction of dressed 1-particle states in non-relativistic QED, mp-arc 01-301, preprint, 2001.
- [FFG97] C. Fefferman, J. Fröhlich, G. M. Graf, Stability of ultraviolet-cutoff quantum electrodynamics with non-relativistic matter, *Commun. Math. Phys.* **190** (1997), 309–330.
- [Fro74] J. Fröhlich, Existence of dressed one electron states in a class of persistent models, *Fortschritte der Physik* **22** (1974), 159–198.
- [HH06] D. Hassler and I. Herbst, Absence of ground states for a class of translation invariant models in nonrelativistic QED, preprint, 2006.
- [Hik07] M. Hirokawa, Infrared catastrophe for Nelson’s model. — non-existence of ground state and soft-boson divergence, *Publ. RIMS* **42** (2006), 897–922.
- [HH07] M. Hirokawa and F. Hiroshima, Poisson point process and spin-boson models, preprint 2007.
- [HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and H. Spohn, Ground state for point particle interacting through a massless scalar Bose field, *Advances in Math.*, **191** (2005), 339–392.
- [Hir97] F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, *Rev. Math. Phys.* **9** (1997), 489–530.
- [Hir00a] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 661–674.
- [Hir00b] F. Hiroshima, Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants, *Commun. Math. Phys.* **211** (2000), 585–613.

- [Hir02] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. Henri Poincaré*, **3** (2002), 171–201.
- [Hir04] F. Hiroshima, Analysis of ground states of atoms interacting with a quantized radiation field, *Topics in the theory of Schrödinger operators* ed. by H. Araki and H. Ezawa, World Scientific, 2004, 145–272.
- [Hir05a] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields, *J. Funct. Anal.* **224** (2005), 431–470.
- [Hir05b] 廣島文生, 場の理論に現れる埋蔵固有値の振動問題, *数学* **57** (2005), 70–92.
- [Hir07] F. Hiroshima, Fiber Hamiltonians in nonrelativistic quantum electrodynamics, *J. Funct. Anal.* **252** (2007), 314–355.
- [HL07a] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Functional integral representations of nonrelativistic quantum electrodynamics with spin $1/2$, mp-arc 07-137, preprint 2007.
- [HL07b] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Exponential localization of ground states of the Pauli-Fierz model, in preparation.
- [HS01] F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz model with spin, *Adv. Theor. Math. Phys.* **5** (2001), 1091–1104.
- [IT86] T. Ichinose and H. Tamura, Imaginary-time path integral for a relativistic spinless particle in an electromagnetic field, *Commun. Math. Phys.* **105** (1986), 239–257.
- [Lie80] E. Lieb, The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem, *Proceedings of the Amer. Math. Soc. Symposia in Pure Math.* **36** (1980), 241–252.
- [LMS01] J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, The infrared behaviour in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2001), 1–28.
- [LMS07] M. Loss, T. Miyao and H. Spohn, Lowest energy states in nonrelativistic QED: atoms and ions in motion, *J. Funct. Anal.* **243** (2006), 353–393.
- [Nel64] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.
- [Sim79] B. Simon, Schrödinger semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 447–526.
- [Sim00] B. Simon, A Feynman-Kac formula for unbounded semigroups, *Canadian Math. Soc. Conf. Proceeding* **28** (2000), 317–321.
- [Spo99] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 9–16.
- [Spo04] H. Spohn, *Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field*, Cambridge University Press, 2004.