

# 円管内遷移流の構造

京都大学大学院工学研究科 清水雅樹 (Masaki Shimizu), 木田重雄 (Shigeo Kida)

## 1 はじめに

オズボーン・レイノルズ (1883) は, 円管内流れの実験で, 流れの状態はレイノルズ数が約 2,000 を境として質的に変化し, それ以下では層流, それ以上では乱流状態が実現することを発見した。この実験以来, 『なぜレイノルズ数が大きくなると流れは乱れるのか』という問いに興味もたれ, さまざまなタイプの流れについて流れの安定性の問題が研究され, 流れが不安定になる臨界レイノルズ数が求められてきた。定常流に加えた微小攪乱の振幅の時間的増減によって, 流れの安定性を判定する, いわゆる線形安定性理論を用いて, 多くの基本的な流れの臨界レイノルズ数が求められている。しかし, 皮肉なことに, 線形安定性理論は, 円管内の定常流 (ハーゲン・ポアズイユ流) が微小攪乱に対して安定であるという結果を与え, レイノルズの実験を説明できないことは周知のとおりである。レイノルズが観測した乱れの発生は有限の大きさの攪乱によるのである。

円管内流の臨界レイノルズ数付近の流れでは, 流れ方向に部分的に乱流状態であるパフが発生し, パフは平均流速程度で下流へと流れて行くことが知られている。このパフでの乱流構造を知ることは, 高レイノルズ数での乱流における乱流維持機構やその条件を知る上で重要であると思われる。本研究の目的は, 流れの運動方程式の直接数値シミュレーション (DNS) によりパフを実現し, その構造を解析することである。

円管内乱流の研究は, 実験によるものは数多いが, DNS による研究はチャンネル乱流などのそれと比較して極端に少ない。円筒座標系を用いるという幾何形状がその理由のひとつである。流れの運動方程式を円筒座標系で記述すると, 中心軸が見かけの特異線になる。速度場は中心軸上でも解析的であるが, これまでのスペクトル法による DNS で動径方向の展開関数としてよく用いられてきたチェビシェフ多項式は, 中心線での解析性を保障しない。そこで本研究では, 中心線での解析性を自動的に満たすゼルニケ円多項式 (Bhatia & Born (1954) [1], Matsushima & Marcus (1995) [2]) を動径方向の展開に用いる。

次節では, 基礎方程式と数値計算法を簡単に述べる。複数のレイノルズ数に対して行なった DNS の結果を第 3 節で紹介する。特に, 臨界レイノルズ数付近では, ハーゲン・ポアズイユ流に十分大きな攪乱を与えるとパフが生じること, およびそのパフは統計的平衡状態になく生成と崩壊を繰り返すことを示す。

## 2 基礎方程式と数値計算法

一様外力  $f\hat{z}$  によって円管内を流れる非圧縮ニュートン流体を考える。壁面で粘着条件, 流れ方向に周期境界条件を満たすとする。長さのスケールとして半径  $a$  を, 速さのスケールとして  $U \equiv fa^2/4\nu$  を用いると, 無次元化されたナビエ-ストークス方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \frac{4}{Re} \hat{z}, \quad (1)$$

連続の式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

と書ける。また、壁面での粘着条件は,

$$\mathbf{u}(1, \theta, z) = 0, \quad (3)$$

流れ方向の周期境界条件は,

$$\mathbf{u}(r, \theta, z + L) = \mathbf{u}(r, \theta, z) \quad (4)$$

と表される。ここで、 $Re = fa^3/4\nu^2$  はレイノルズ数で、 $L$  は流れ方向の基本周期の長さである。

非圧縮条件 (2) より速度場は,

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \nabla \times (\phi \hat{\mathbf{z}}) \quad (5)$$

と2つのスカラー関数  $\psi$  と  $\phi$  で表される。これらの関数はそれぞれ、トロイダル関数、ポロイダル関数と呼ばれる。方程式系 (1)-(4) と同等な方程式系をトロイダル関数とポロイダル関数で表すと,

$$\Delta_{\perp} \left( \Delta - Re \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = Re(\nabla \times \mathbf{N}) \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (6)$$

$$\Delta_{\perp} \left( \Delta - Re \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \phi = -Re(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{N})) \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} \psi|_{r=1} d\theta = 0, \quad \phi|_{r=1} = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{r=1} + r \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right|_{r=1} = 0, \quad r \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \phi \Big|_{r=1} = 0, \quad (9)$$

$$\psi(\mathbf{r} + L\hat{\mathbf{z}}) = \psi(\mathbf{r}), \quad \phi(\mathbf{r} + L\hat{\mathbf{z}}) = \phi(\mathbf{r}), \quad (10)$$

$$r \left. \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Delta_{\perp} \psi \right|_{r=1} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \Delta_{\perp} \phi \Big|_{r=1} = 0, \quad (11)$$

$$-\frac{1}{\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi \Big|_{r=1} d\theta dz = -\frac{1}{\pi L Re} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^3 \phi \Big|_{r=1} d\theta dz + \frac{4}{Re} \quad (12)$$

となる。ここで、 $\mathbf{N} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ ,  $\Delta_{\perp} = \Delta - \partial^2/\partial z^2$  である。

スカラー関数  $\psi$  と  $\phi$  は円管内で解析関数であるとする、

$$\begin{pmatrix} \psi(r, \theta, z) \\ \phi(r, \theta, z) \end{pmatrix} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}^{mk}(r) \\ \tilde{\phi}^{mk}(r) \end{pmatrix} \exp[i(m\theta + (2\pi/L)kz)] \quad (13)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{n=|m| \\ n+m=\text{even}}}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_n^{mk} \\ \hat{\phi}_n^{mk} \end{pmatrix} \Phi_n^m(r) \exp[i(m\theta + (2\pi/L)kz)] \quad (14)$$

$$\simeq \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \sum_{\substack{n=|m| \\ n+m=\text{even}}}^N \begin{pmatrix} \hat{\psi}_n^{mk} \\ \hat{\phi}_n^{mk} \end{pmatrix} \Phi_n^m(r) \exp[i(m\theta + (2\pi/L)kz)] \quad (15)$$

と展開できる。ここで、 $\Phi_n^m(r)$  はゼルニケ円多項式と呼ばれるもので、 $r^{|m|}, r^{|m|+2}, \dots, r^n$  の項から成り、

$$\int_0^1 \Phi_n^m \Phi_n^{m'} r dr = \delta_{nn'} \quad (16)$$

の直交条件を満たす (Bhatia & Born (1954) [1], Matsushima & Marcus (1995) [2])。

上記の支配方程式系 (6)–(12) に現れるパラメータは、レイノルズ数  $Re$  と基本周期長さ  $L$  である。レイノルズ数が  $Re = 2000, 3000, 3300, 3500, 4000, 6000, 8000, 10000, 12000$  の数値計算を行った。Priymak & Miyazaki (2004) [3] で、パフができる最小の周期長さは  $16\pi$  程度と述べられているので、 $L = 16\pi$  とした。

スペクトル展開に用いる上限の波数は式 (15) で、 $(N, M, K) = (100, 21, 170)$  とした。トロイダル・ポロイダル関数の時間発展方程式 (6) と (7) の時間積分は、粘性項にクランク・ニコルソン法、非線型項に 2 次のアダムズ・バッシュフォース法を用いた。平均流束の時間発展方程式 (12) の時間積分には、クランク・ニコルソン法を用いた。時間ステップの間隔は  $\Delta t = 0.005$  とした。非線型項を求めるのに、擬スペクトル法を用いた。 $r$  方向の境界条件は  $\tau$  法を用いて満足させた。

初期条件は、全てのレイノルズ数の計算に共通で、ハーゲン・ポアズイユ流に同じ攪乱を加えたものにした。攪乱は 3 つのフーリエ成分  $(m, k) = (1, 0), (0, 8), (0, 1)$  に与えた。実数条件より、原点对称な成分  $(-m, -k)$  には複素共役な攪乱を与える。ハーゲン・ポアズイユ流  $\mathbf{u} = (1 - r^2)\hat{z}$  は、 $(m, k) = (0, 0)$  の成分で表され、

$$\tilde{\psi}^{00}(r) = 0, \quad (17a)$$

$$\tilde{\phi}^{00}(r) = (1 - r^2)(3 - r^2)/16 \quad (17b)$$

となる。それぞれの攪乱成分の  $r$  の関数は、境界条件を満たす最小次数の多項式とし、

$$\tilde{\psi}^{10}(r) = 10^{-2}(1 - r^2)^2 r, \quad (18a)$$

$$\tilde{\phi}^{10}(r) = 10^{-2}(1 - r^2)(1 - 5r^2/7 + r^4/7)r, \quad (18b)$$

$$\tilde{\psi}^{08}(r) = 10^{-2}(1 - r^2)^2, \quad (18c)$$

$$\tilde{\phi}^{08}(r) = 10^{-2}(1 - r^2)^3, \quad (18d)$$

$$\tilde{\psi}^{01}(r) = 10^{-4}(1 - r^2)^2, \quad (18e)$$

$$\tilde{\phi}^{01}(r) = 10^{-4}(1 - r^2)^3 \quad (18f)$$

とした。

### 3 数値計算の結果

数値計算を行った全ての  $Re$  のそれぞれに対する平均流束  $\bar{u}_z$  ( $u_z$  の空間平均) の時間変化を図 1 に示す。層流である、ハーゲン・ポアズイユ流では、 $\bar{u}_z$  は 0.5 となる。この図によると、 $Re$  が 3000 以下の場合の流れは、しばらくの間攪乱は増幅するが最終的には定常なハーゲン・ポアズイユ流に戻る。 $Re$  が 6000 以上の場合の平均流は、時間がたつと、レイノルズ数ごとに層流とは異なる一定値に落ち着くように見える。変動は平均値の 1% 以

下である。しかし、一定値に近づくのは空間平均のみで、流れは時間的にも空間的にも激しく変動している。したがって、これらの場合の流れは、統計的平衡状態に近い乱流であるといえよう。 $Re$ が3300, 3500, 4000の場合には、部分的乱流状態である、パフが観測された。このいずれの $Re$ においても、統計的平衡状態にはなく、パフの生成と崩壊が繰り返された。パフが見られるときに平均流束は大きく、パフが崩壊したときには平均流束は小さくなる。

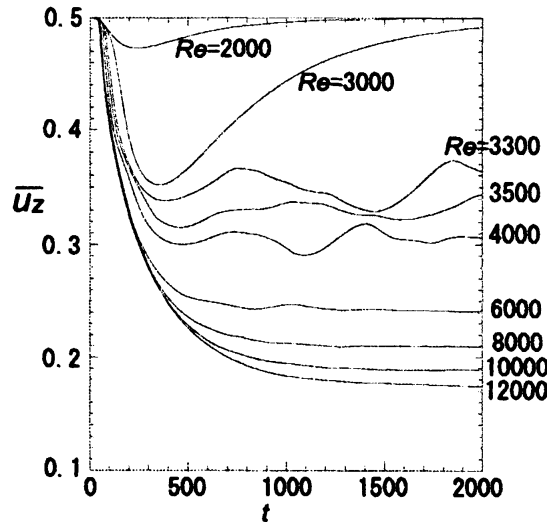


図 1: 平均流束  $\bar{u}_z$  の時間変化。

### 3.1 $Re = 3500$

$Re = 3500$  の場合では、パフの生成と崩壊が繰り返された。図 2 は、(a)  $z$  軸上での流れ方向速度  $u_z(r=0, z, t)$  の時間変化、(b) 原点 ( $z=0$ ) をパフのだいたいの進行速度で移動させた  $u_z(r=0, z-0.325t, t)$  の時間変化、および (c) 平均流束の時間変化を示す。(a) での、右肩上がりの筋模様が見られる時間帯は、パフが見られるときであり、この筋模様の傾きがパフの進行速度を表す。パフが見られる時間帯で流れ場は、層流領域 (明るい領域) と乱流領域 (暗い領域) に分けることができる。流れ方向に層流領域から乱流領域に変わるところをパフの「上流側境界」、乱流領域から層流領域に変わるところをパフの「下流側境界」と呼ぶ。下流側境界は鮮明ではない。(b) で見ると、パフの進行速度が時間的にほぼ一定であることが分かる。(a) や (b) を (c) と見比べると、パフが生まれると平均流束は大きくなり、パフが壊れると平均流束は小さくなっている。

図 3 にパフの生成と崩壊の様子を示す。この図は、 $u_z$  の攪乱成分を表したものである。 $t = 3800$  はパフが生成される段階にあり、 $t = 4000, 4200$  の図では、攪乱の大きい領域 (乱流領域) と小さい領域 (層流領域) の境界 (パフの上流側境界) を中央付近に見ることができる。こうした時刻がパフを観測できる時刻である。乱流領域は徐々に流れ方向に広がり、 $t = 4600, 4800$  になると、もはやこの境界は見られず、全領域が乱流領域であるように見える。この中から再びパフが生成され、 $t = 5200$  付近よりパフの上流側境界を見ることができる。

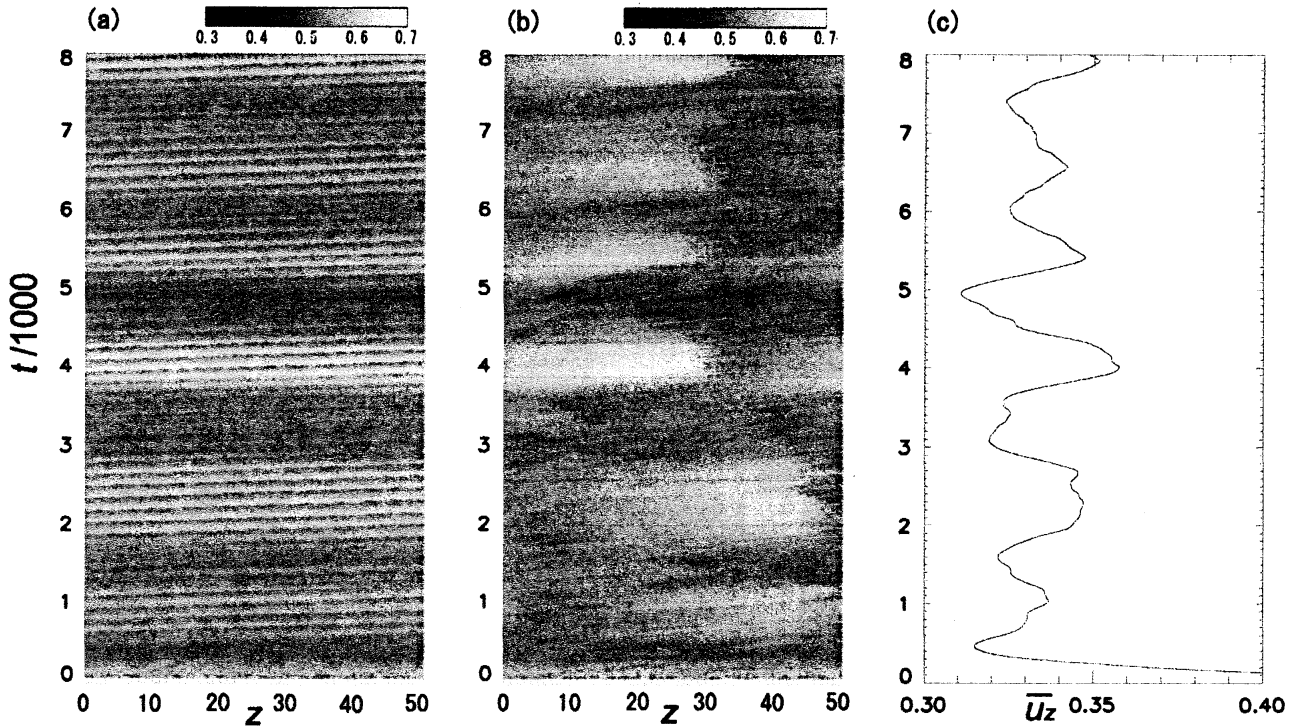


図 2:  $Re = 3500$ 。(a)  $z$  軸上での流れ方向速度  $u_z(r = 0, z, t)$ 。(b)  $z = 0$  を一定速度 0.325 で  $z$  方向に移動させた  $u_z(r = 0, z - 0.325t, t)$ 。(c) 平均流束の時間変化。

パフが見られる時間帯のデータを用いて、付録の方法でパフの上流側境界を時刻毎に位置合わせして、パフの速度分布の平均量を求めた。用いた時刻は、図 2(b) に示す実線の間時刻 ( $t = 2000 - 2590, 3880 - 4330, 5310 - 5750, 6250 - 6750, 7580 - 8000$ ) を  $\Delta t = 10$  間隔で、それぞれ 60, 46, 45, 51, 43 時刻、合計 245 時刻を用いた。図 4(a) は  $u_z$  の  $\theta, t$  平均からその  $\theta, z, t$  平均を引いた量で、(b) は  $2\pi r u_r$  の  $\theta, t$  平均である。(c) に速度 0.325 で  $z$  方向に進む系 (パフの上流側境界がほぼ静止している系) から見た平均速度場の流線を示す。

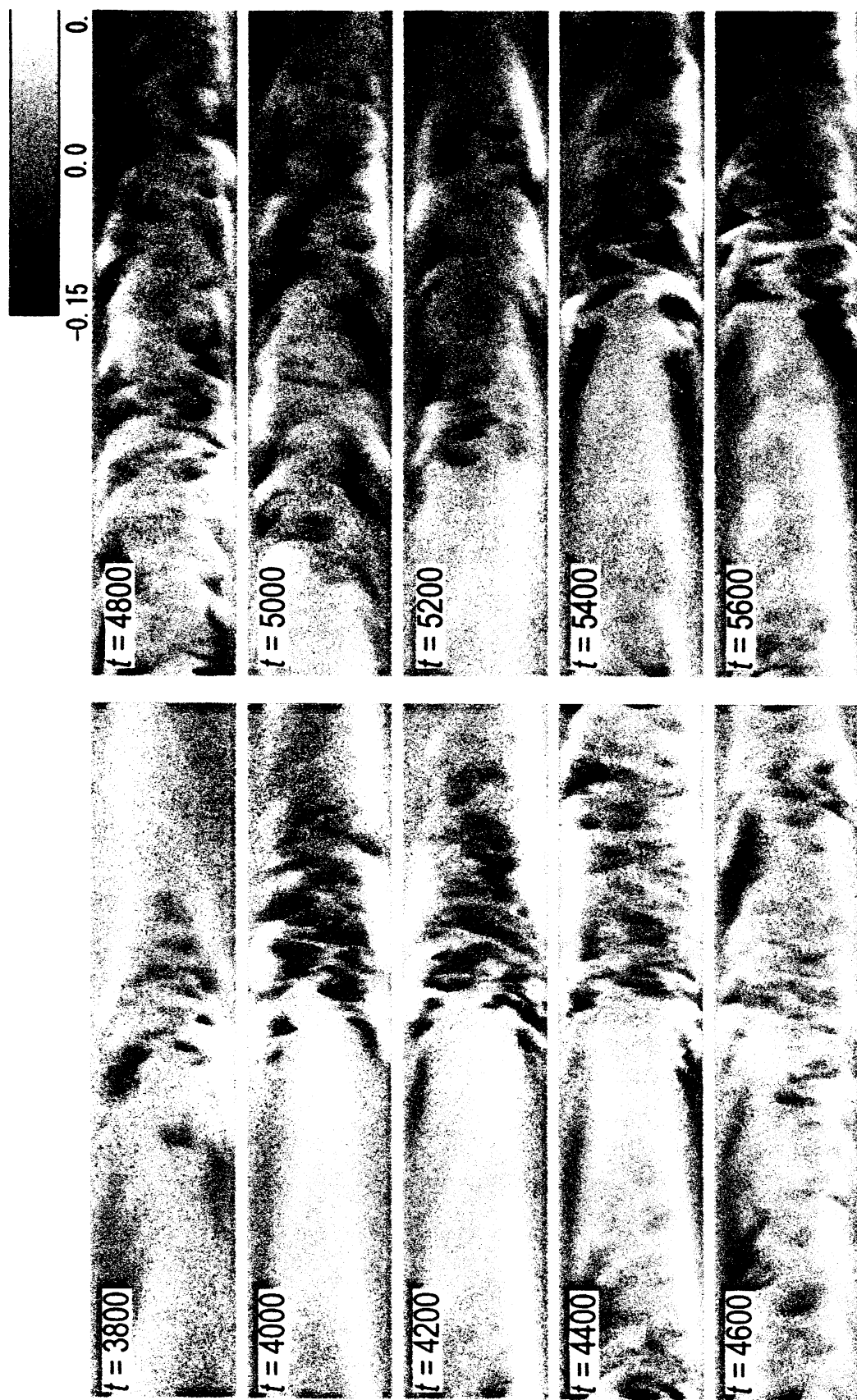


図 3: パワの生成と崩壊の様子。各図は  $z$  軸を含む  $\theta = 0, \pi$  の断面であり、縦方向に長さ  $2$ 、横方向に長さ  $16\pi$  である。横軸 ( $z$  軸) は、図 2 の (b) と同じもので、 $z = 0$  を一定速度  $0.325$  で  $z$  方向に移動させたものである。グレースケールは、流れ方向速度の攪乱  $u_z - \frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi} \int_0^L u_z d\theta dz$  を  $[-0.15, 0.15]$  の範囲で線形なスケールで書いたものである。

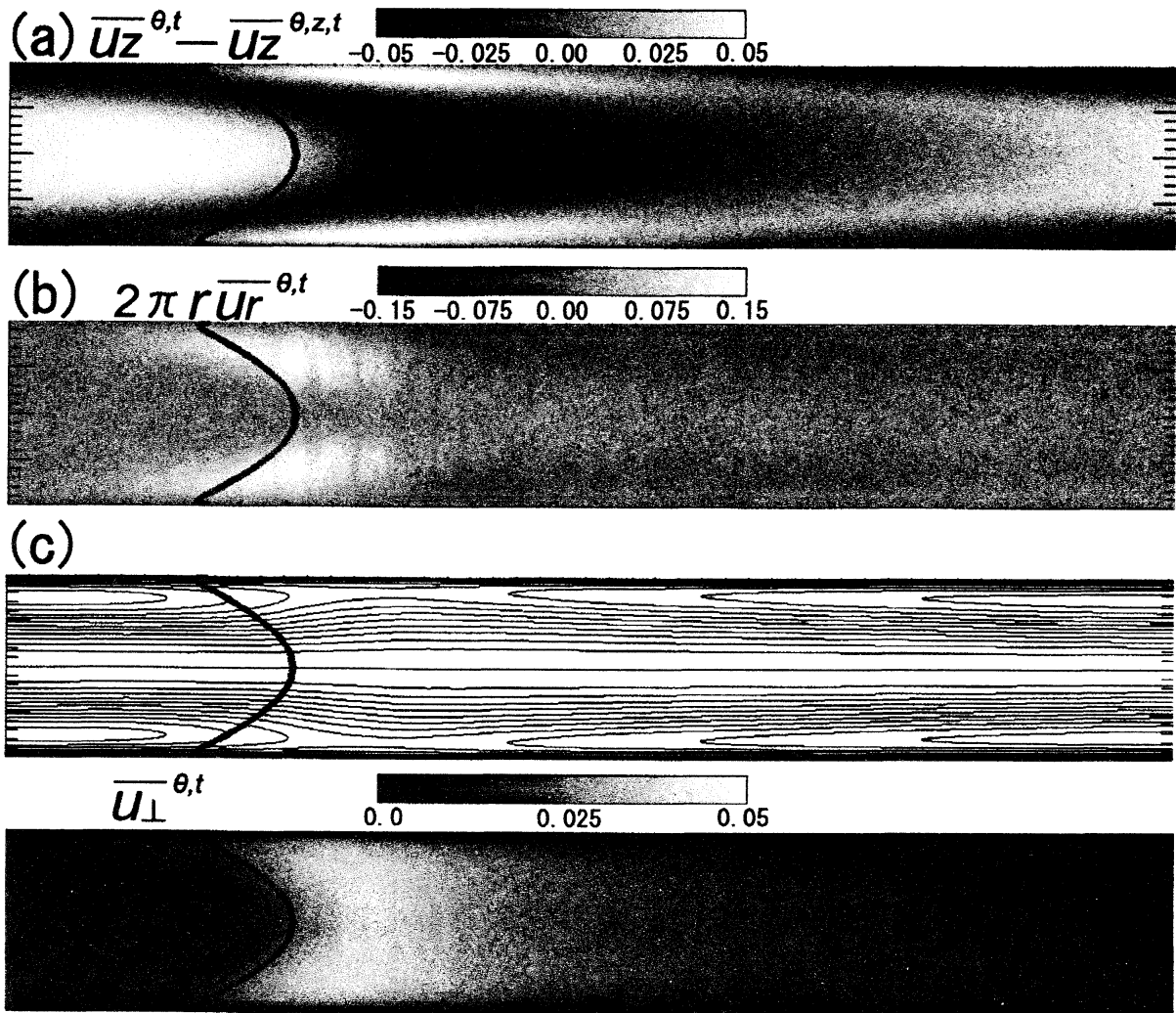


図 4: パフの平均速度場。各図にある太線の曲線は、位置あわせに用いたパフの境界の目印である。(a) 流れ方向速度  $u_z$  の  $\theta, t$  平均から、さらに  $z$  平均したものをひいたもの。(b) 動径方向の流束  $2\pi r u_r$  の  $\theta, t$  平均。(c)  $z$  方向に速度 0.325 で移動する慣性系から見た、 $\theta, t$  平均した速度場の流線。

### 3.2 $Re = 3300$

$Re = 3300$  の場合、パフは生成と崩壊を何度か繰り返したが、 $t = 3800$  付近でパフが生成されて以降、層流に戻った。

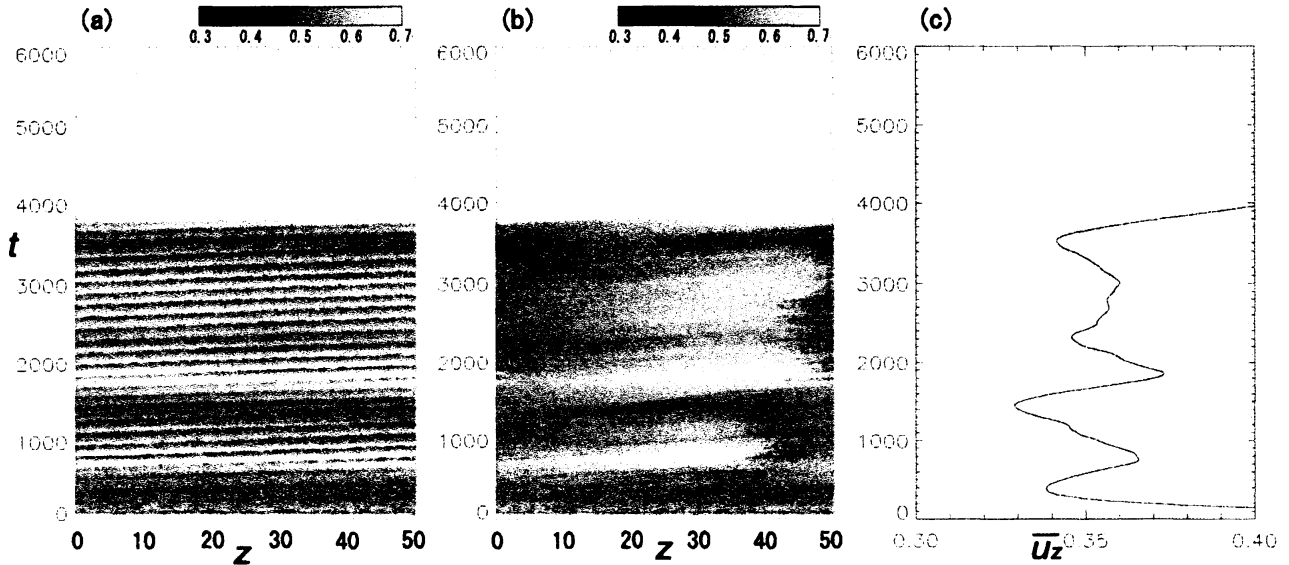


図 5:  $Re = 3300$ 。(a)  $z$  軸上での流れ方向速度  $u_z(r = 0, z, t)$ 。(b)  $z = 0$  を一定速度 0.335 で  $z$  方向に移動させた  $u_z(r = 0, z - 0.335t, t)$ 。(c) 平均流束の時間変化。

## 4 おわりに

ここで述べたパフの生成と崩壊は、『パフは生成された後にその先端(下流側境界)を徐々に伸ばし、周期境界条件のために上流側境界まで到達して全体が乱れ、その中からまたパフが生成される』過程となっている。Wynanski *et al.*(1975)[4] や東&荒賀(2001)[5] の実験によると、このパフの伸びていく速さは  $Re$  に依存していて、伸びない(長さを保つ)  $Re$  も存在するが、長さは一般に変化する。では、流れ方向に十分長くパフがいくつも納まる長さの場合に、平均流束(や壁摩擦力)は時間的どのように変化するであろうか。たとえば、パフの生成がある特定の波長で起こりそれぞれパフの間隔が同じぐらいで、それぞれが一斉に生成と崩壊をするようになっていると、周期的変化を示すことになる。今後の研究課題としたい。

数値計算には、京都大学学術情報メディアセンターの HPC2500、核融合科学研究所の SX8 を使用させて頂いた。



## 付録 パフの位置合わせ

パフの平均速度分布を求めるために、以下に述べる方法で各時刻ごとにパフの位置合わせを行った。位置合わせを行うためにパフの境界となる目印を、 $z$  軸に垂直な断面内速さ  $u_{\perp} = (u_r^2 + u_{\theta}^2)^{1/2}$  を用いて求めた。 $u_{\perp}$  はパフの上流部分で大きく、下流へと次第に小さくなっていく。ある  $r, \theta$  でのこの分布を、周期  $L$  で  $z = c$  に不連続な区分的 1 次関数、

$$u_{\perp} = \begin{cases} a(z + L - c) + b & (0 \leq z \leq c) \\ a(z - c) + b & (c \leq z \leq L) \end{cases} \quad (19)$$

で近似し、パラメータ  $a, b, c$  を最小二乗法を用いて求めた。ただし、 $c$  の値は  $z$  分点座標 (512 通り) に限った。全ての  $r, \theta$  分点上でこれを行い、境界の分布  $c(r, \theta, t)$  を得る (図 6)。次に、 $c(r, \theta, t)$  を  $\theta, t$  平均して、境界の平均的な形  $\bar{c}(r)$  を求めた。そして、各時刻における  $c(r, \theta, t)$  の  $\theta$  平均  $\bar{c}(r, t)$  を  $\bar{c}(r)$  と最小二乗法を用いて位置が合うように、 $z$  方向に平行移動を行った (図 7)。

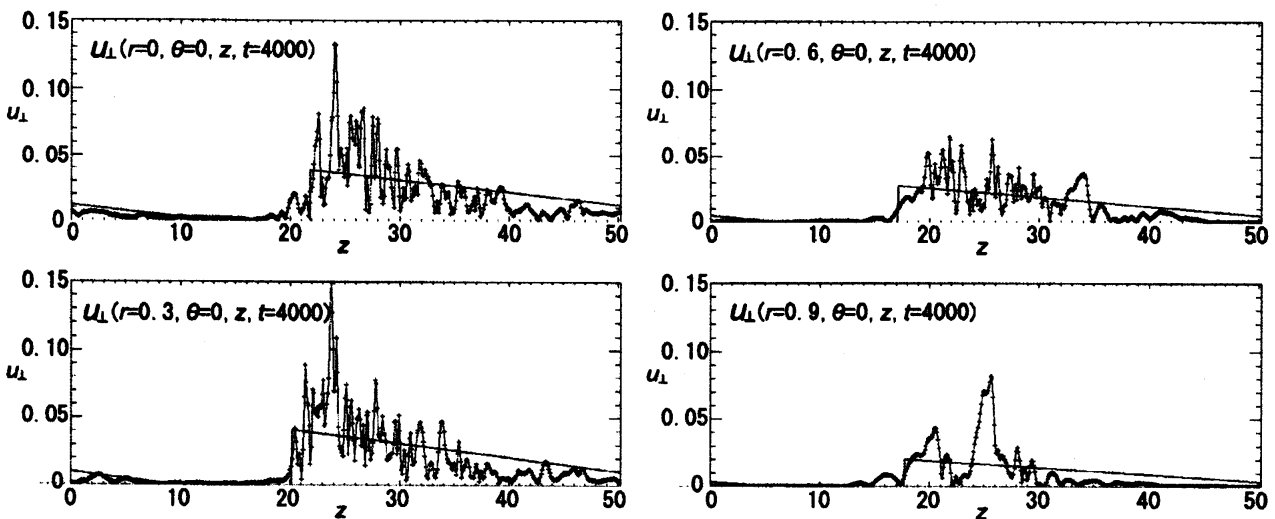


図 6: パフ境界の決め方の例。それぞれの図は  $z$  軸に平行な直線上の断面内速度  $u_{\perp} = (u_r^2 + u_{\theta}^2)^{1/2}$  の分布と式 (19) によるフィッティングの結果を示す。

## 参考文献

- [1] A. B. Bhatia and M. Born, "On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets," in Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 50, 1954, pp. 40-53.
- [2] T. Matsushima and P. S. Marcus, A Spectral Method for Polar Coordinates, Journal of Computational Physics, 120-2, 1995, pp. 365-374(0)
- [3] VG. Priymak and T. Miyazaki, Direct numerical simulation of equilibrium spatially localized structures in pipe flow, Phys. Fluids, 16-12, 2004, pp.4221-4234

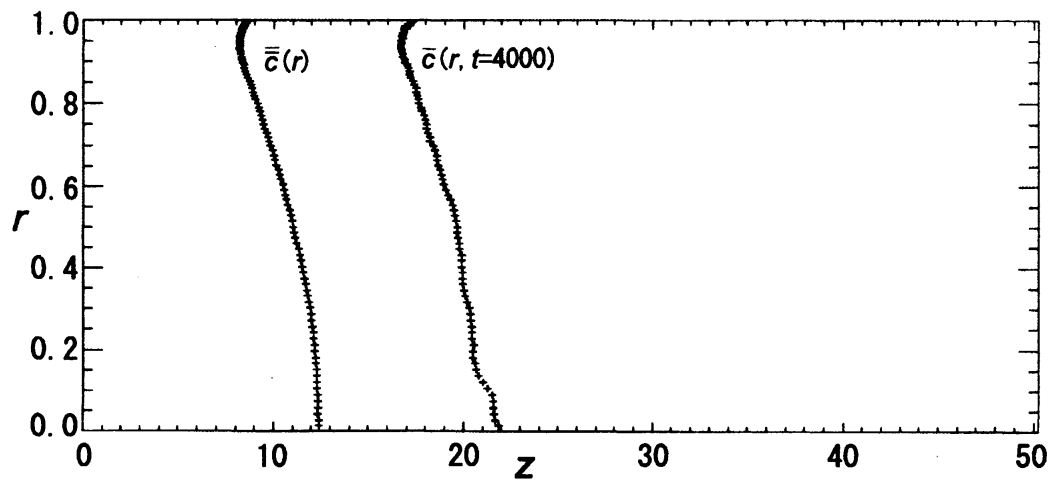


図 7: 各時刻におけるパプの位置合わせ。各時刻で  $\bar{c}(r, t)$  を求めて、それが  $\bar{c}(r)$  に合うように  $z$  方向に平行移動させる。

- [4] I. J. Wagnanski, M. Sokolov and D. Friedman, On transition in a pipe. Part 2. The equilibrium puff, J. Fluid Mech., 69, 1975, pp.283-304
- [5] 東 恒雄, 荒賀浩一, 日本機械学会論文集 (B 編) 67 巻 654 号 (2001-2)