数理解析研究所講究録
第 1601 巻 2008 年 51-58

壁の不透過性がチャネル乱流に及ぼす影響

横嶋 哲*

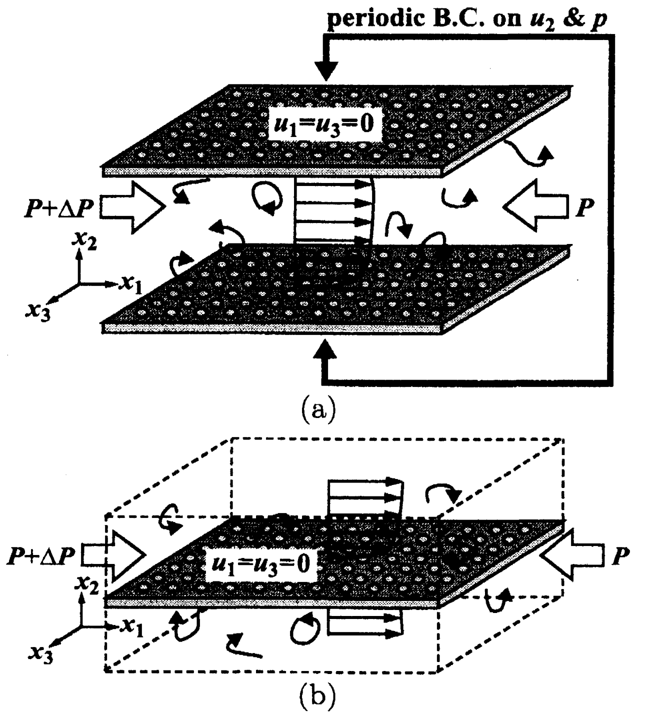

図-1 完全透過性チャネル乱流の概要．(a) と (b) は同一の系を x_2 方向にチャネル半幅分ずらして表示した．

1 はじめに

固体壁上での流速境界条件 $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ は流体粘性の作用によって壁接線方向の運動を抑える粘着条件 $u_1 = u_3 = 0$ と，運動学上の制約として流体が壁を通り抜けることを禁じる不透過条件の，物理的起源の全く異なる二種類の条件に分類される [1]．本研究の目的は，最も基本的な壁乱流のひとつである平行平板間乱流（以下，チャネル乱流）において壁の不透過性が果たす役割を明らかにすることにある．その方法として，**図-1**(a) に示すような，固体壁から不透過性を取り除いた「完全透過壁」を用いた平板間乱流（以下，完全透過チャネル乱流）の直接数値シミュレーション (DNS) を行う．乱流変動による一方の透過壁からの流出はここでは他方からの流入とする．

*静岡大学 工学部 システム工学科

流れの効率的な制御法，あるいは粗面境界上流れの更なる理解を求めて，固体壁上での流速境界条件の一部を改変する試みはこれまでに多く行われてきた [2, 3]．壁の不透過条件に関わるものでは，特に境界に吹き出し・吸い込み機能を加えた系の検討例が多い [4, 5]．それらの先行研究と比較した場合に，本研究で扱う完全透過チャネル内流れの特徴として以下の三項目が挙げられる：[i] 境界での流入・流出は乱流変動による未知量であって，外部条件として与えられるものではない；[ii] 透過量の平均値はゼロである；[iii] 対応するチャネル内流れと同一の層流解を持つ．これらの特徴が一致する既存の研究例は，著者の知る限りでは，Jiménez *et al.* による多孔質境界上のせん断乱流に関する数値実験 [6] のみである．彼らは境界に作用する圧力に比例する吹き出し・吸い込みを境界上で与えることで多孔質境界を模擬したが，この手法の利点は比例係数を変化させることで透過性の強弱を制御でき，かつ壁法線方向に周期性を要求しない点にある．Jiménez は透過性の比較的低いケースのみを扱ったが，完全透過性チャネル乱流は透過性が非常に高い（ある種の極限に相当）ケースに該当し，それによって壁の（不）透過性の役割が浮き彫りとなることが以下で示される．

2 数値実験条件と数値計算法

検討対象の流体は物性が均質・一定で，非圧縮性のナビエ・ストークス方程式に従うものとする．数値シミュレーションの条件設定は，固体壁を完全透過壁で置き換える点を除けば，通常のチャネル乱流にほぼ従う．すなわち，境界接線方向には周期境界条件を課す．なお**図-1**(a) と (b) は同一の系を x_2 方向にチャネル半幅 δ 分ずらして表示したものである．**図-1**(b) の視点に立てば，境界条件は三方向全てに周期条件となる．また流れは一定の圧力勾配で駆動されるものとした．なお透過壁上では，質量保存に起因して $\partial u_2/\partial x_2 = 0$ が陰に成

表-1 完全透過/不透過チャネル乱流の計算条件．P110-I が完全透過壁を，I110 が不透過壁を用いたケースを意味する．ここで Re_τ は壁面平均摩擦速度とチャネル半幅 δ に基づくレイノルズ数，$L_{x_{(1,3)}}$ は $x_{(1,3)}$ 方向の計算領域長さ，$N_{x_{(1,2,3)}}$ は計算格子点数，$\Delta x_{(1,2,3)}$ は計算格子点間隔，Δt は時間刻み幅，そして T はアンサンブル平均に要した積分時間を表す．

Case	Re_τ	L_{x_1}	L_{x_3}	$N_{x_1}\times N_{x_2}\times N_{x_3}$	Δx_1^+	Δx_3^+	Δx_2^+	Δt^+	T^+
P110-I	110	$5\pi\delta$	$2\pi\delta$	$128\times128\times128$	13.50	5.40	$0.20\sim3.83$	8.25×10^{-2}	6600
I110	110	$5\pi\delta$	$2\pi\delta$	$128\times128\times128$	13.50	5.40	$0.20\sim3.83$	2.20×10^{-1}	6600

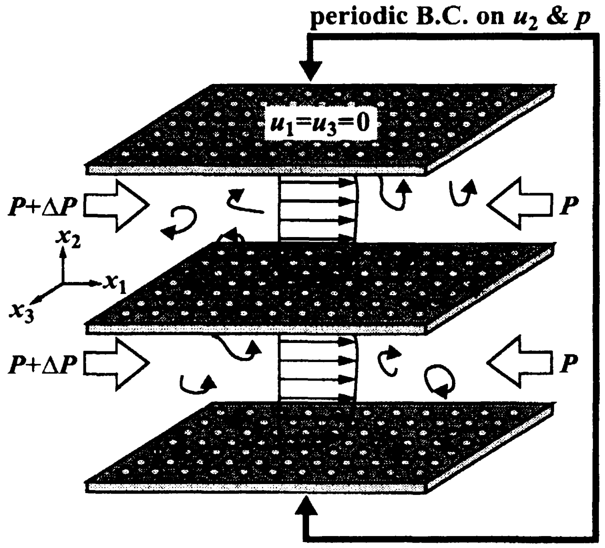

図-2 境界法線方向の周期境界条件の影響を検討するための二層型の完全透過性チャネル乱流．

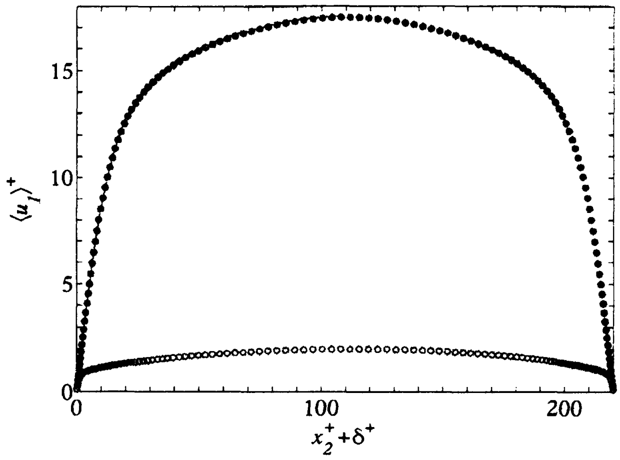

図-3 完全透過/不透過チャネル乱流における平均流速分布．白抜き (open) のシンボルは透過チャネルの，そうでない (filled) ものは不透過チャネル乱流の結果を示す．実線は Iwamoto *et al.* による不透過チャネル流 DNS 結果 [7]．

立する．

支配方程式の離散化は，部分段階法を適用した上で空間微分項を二次精度中心差分法で近似し，クランク・ニコルソン法と三次精度ルンゲ・クッタ法により半陰的に時間積分を行った．

前節で示した特徴 [iii] のため，壁の透過性の影響を効率的に評価するためには，併せて通常のチャネル乱流のシミュレーションを行うと便利である．計算条件を**表-1** にまとめて示す．シミュレーション精度を測る参考データとして，高解像度スペクトル法によるチャネル流 DNS データ [7] も併せて結果を示す．以下ではある物理量 f のアンサンブル平均値を $\langle f\rangle$，平均値からの変動成分を f'，さらに f を動粘性係数 ν 及び境界平均摩擦速度 U_τ を用いて無次元化したことを f^+ のように表記する．また座標軸 x_2 の原点は平板間の中央にあるとする．ただし統計量算出の際に $x_2=\delta$ での対称性を用いた場合等には，壁からの距離を y とした．

なお，本報では $Re_\tau=110$ の結果を示すが，それ以外にも 25,55,200,300 のケースの検討を進めており，このレイノルズ数の範囲では流況は定性的には変わらないことを確認している．また，完全透過チャネル乱流における境界法線方向の周期境界条件の影響を調べるために，**図-2** に示す二層重ねのケースも一部のレイノルズ数の条件下で検討した．単層流れと二層流れの流況は完全には一致しないもののその差はわずかであり，周期境界条件の影響は重要ではないことを確認した．

3 計算結果と考察

3.1 乱流統計量

図-3 に平均流速分布を示す．壁に透過性を付加することによって，流量が大きく低下することがわかる．平均流より得られる代表的な指標を**表-2** に纏めた．Jiménez *et al.* による透過性の比較的低い多孔質境界を用いた例では抵抗係数が約 40%増

表-2 平均流に関する指標．ここで Re_c，Re_m はそれぞれチャネル上下対称面での平均流速とチャネル半幅，断面平均流速とチャネル全幅に基づくレイノルズ数，C_f は抵抗係数を表す．

Case	Re_c	Re_m	C_f
P110-I	220	365	7.28×10^{-1}
I110	1922	3230	9.28×10^{-3}

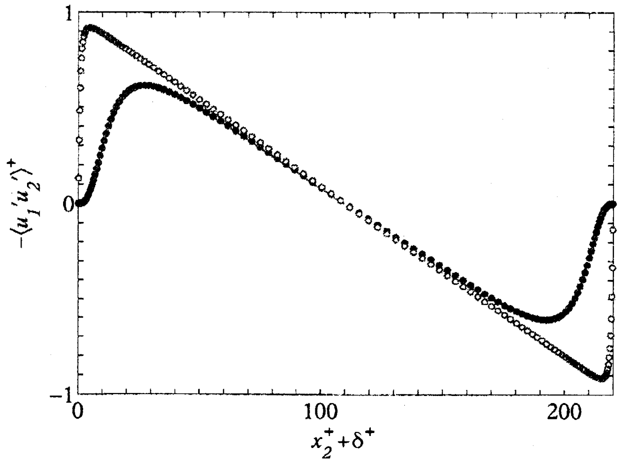

図-4 完全透過/不透過チャネル乱流におけるレイノルズせん断応力分布．シンボルと実線の意味は**図-3**と同じ．

加することが指摘されているが [6]，完全透過壁の場合にはほぼ二桁増加し，バルク・レイノルズ数は一桁低下する．

図-4はレイノルズせん断応力 $-R_{12} \equiv -\langle u_1'u_2'\rangle$ の分布を表す．不透過壁の場合には最大値は $y^+ \approx 27$ で表れるのに対して，完全透過壁ではその位置は $y^+ \approx 4.7$ であり，粘性応力の寄与は境界極近傍でわずかに認められるに過ぎない．

図-5に乱れ強度分布と，レイノルズ応力の非等方テンソル $b_{ij} \equiv R_{ij}/R_{kk} - (1/3)\delta_{ij}$ の不変量マップ (Lumley triangle)[8] を示す．不変量マップの縦軸 η と横軸 ξ は b_{ij} の第二不変量 $\mathrm{II}_b \equiv -(1/2)b_{ij}b_{ji}$ 及び第三不変量 $\mathrm{III}_b \equiv (1/3)b_{ij}b_{jk}b_{ki}$ と，$\mathrm{II}_b = -3\eta^2$，$\mathrm{III}_b = 2\xi^3$ の関係がある．**図-5**(a) より，不透過壁の場合に全断面を通じて最小である壁法線方向成分 u_2^{rms} が透過壁の場合には最大であり，全断面ではほぼ一定の値をとることがわかる．透過壁上での乱れ強度，すなわち透過速度の rms(root-mean-square) は約 $1.2U_\tau$ で，Jiménez *et al.* のケースと比較して一桁高い．**図-5**(b) が与える成分情報と併せ読むことで，完全透過チャネル流の応力場の主要な性質は以下に要約される：(1) 透過壁上（$y^+ = 0$）では境界法線方向成分 R_{22} のみ非ゼロの一成分状態である；(2) 壁から離れると接線方向の二成分が急増し，特に主流方向成分 R_{11} は R_{22} に匹敵する強さに達するため，準二成分状態を経て y^+ が 20 強の位置で $R_{22} \approx R_{11} > R_{33}$ の軸対象状態に達する（図中の × 印）；(3) さらに壁から離れると主流方向成分 R_{11} が緩やかに減衰し，他方で残り二成分はほぼ一定値を保つので，流路中央に向かうにつれて $R_{22} > R_{11} \approx R_{33}$ の軸対象状態に近づく．このように完全透過チャネル乱流の応力場の基本的な構造は不透過壁の場合とは全く異なったものとなる．

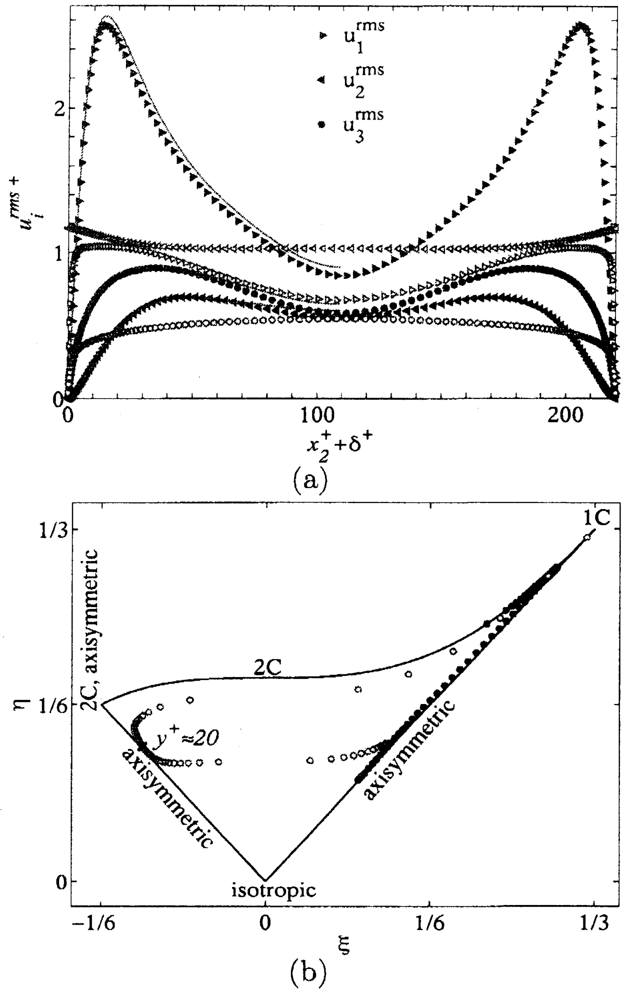

図-5 完全透過/不透過チャネル乱流におけるレイノルズ垂直応力分布と成分情報：(a) 乱れ強度，(b) 不変量マップ (Lumley triangle)．シンボルと実線の意味は**図-3**と同じ．ただし (b) の実線は $\eta = \pm\xi$ 及び $\eta = ((1/27) + 2\xi^3)^{1/2}$．

図-6(a) に乱れエネルギー分布を示す．**図-5**(a)

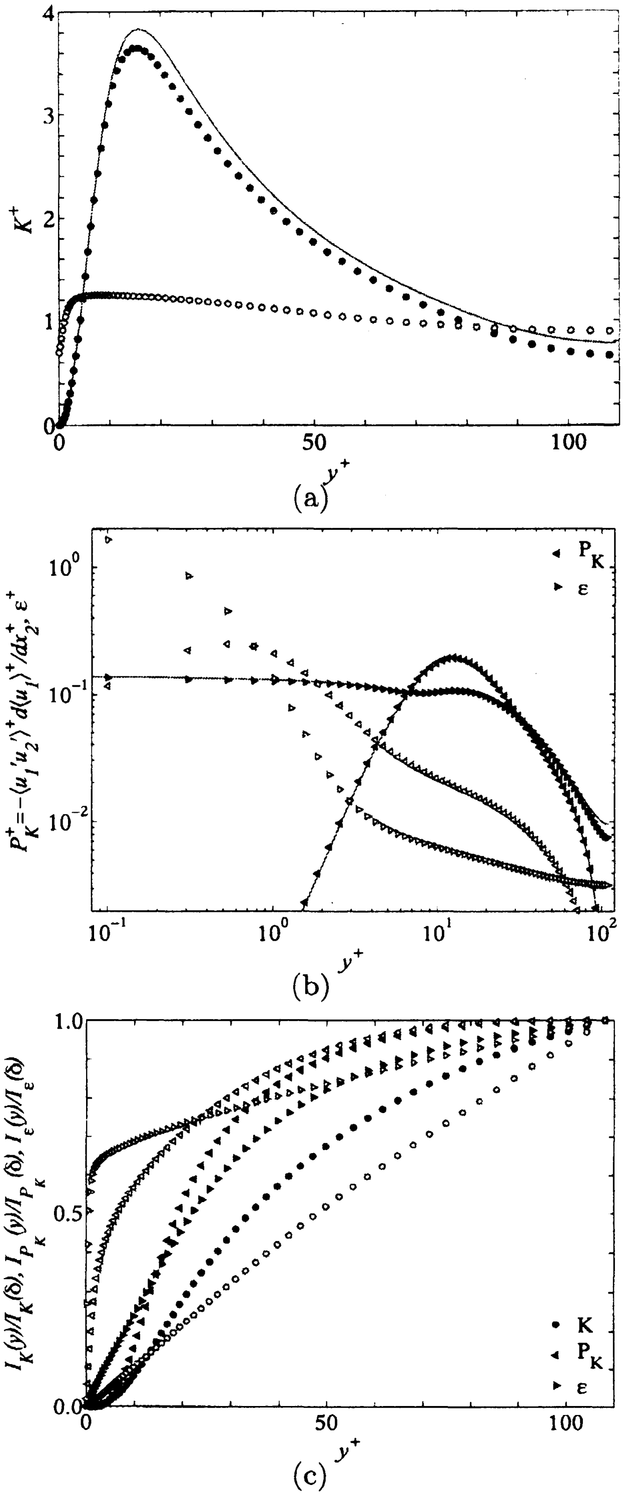

図-6 完全透過/不透過チャネル乱流における乱れエネルギーとその生成・散逸率分布：(a) 乱れエネルギー K，(b) エネルギー生成 P_K と散逸率 ε，(c)K，P_K 及び ε の境界からの積分値の累積分布．シンボルと実線の意味は**図-3**と同じ．ただし (c) からは実線を除いた．

の乱れ強度分布から容易に推測できるように，完全透過壁の場合には境界極近傍を除く断面全体でエネルギーは一定に近い．他方で**図-6**(b) に示すエネルギー散逸率分布では，$y^+ < 5$ の狭い領域内で散逸率が二桁増加し，エネルギー生成についても不透過境界の場合と比べて境界側にピーク位置が移動することが認められる．このようなエネルギーとその散逸の空間分布の偏りを定量的に調べるために，それぞれの境界からの積分の累積分布 I_K，I_{P_K} 及び I_ε を**図-6**(c) に示す．ここで

$$\mathrm{I}_f(y^*) \equiv \int_{y=0}^{y^*} f(y)dy$$

で，全断面に渡る積分値の透過性の有無に関する比は $I_K^{\mathrm{I}}(\delta)/I_K^{\mathrm{P}}(\delta) = 1.61$，$I_{P_K}^{\mathrm{I}}(\delta)/I_{P_K}^{\mathrm{P}}(\delta) = 4.03$，$I_\varepsilon^{\mathrm{I}}(\delta)/I_\varepsilon^{\mathrm{P}}(\delta) = 3.99$ であった．ここで上付きの添え字 I 及び P はそれぞれ不透過，完全透過チャネル乱流における値を意味する．図より透過壁の場合には，散逸について $y^+ < 1.5$，すなわち断面全体のわずか 1%強の領域で全体の 60%以上が発生し，生成に関しても全体の 55%程度が $y^+ < 10$ の領域で行われているのに対して，乱れエネルギー自身は断面全体にほぼ均質に分布することがわかる．また，生成項と散逸項の比 P_K/ε をプロットした付録の**図-14**(b) より，完全透過チャネル乱流では透過壁極近傍と上下対称面付近を除いた，比較的広い領域で $P_K > \varepsilon$ が成り立つことが認められる．以上より，上記の $P_K > \varepsilon$ となる領域で生成された乱れエネルギーの多くが透過壁極近傍に運ばれ，そこで熱エネルギーに変換されるという，エネルギーの主要な輸送機構の存在が窺われる．なお，エネルギー散逸が透過壁極近傍に過度に集中する点は，この流れをラージ・エディ・シミュレーションやレイノルズ平均モデルによって正確に再現することが困難であることを予想させる．

図-7 に乱流レイノルズ数 $Re_T \equiv K^2/(\varepsilon\nu)$ の分布を示す．エネルギーの大半を保有する大規模渦を特徴付ける長さスケールとして $L \sim K^{3/2}/\varepsilon$ を導入すれば，コルモゴロフ長 $l_\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ との比は $L/l_\eta \sim Re_T^{3/4}$ のように表される．図より不透過壁の場合と比べて，完全透過チャネル流におけるスケールの広がりは全断面に渡ってかなり大きいことがわかる．

図-8 に渦動粘性係数 $\nu_T \equiv -R_{12}/(d\langle u_1\rangle/dx_2)$ の分布を示す．壁に透過性を付加することで運動量拡散が大きく促進されている．これは工業装置内での熱伝達や物質混合の効率化を図る上でとても重要な性質である．また，渦動粘性係数の断面

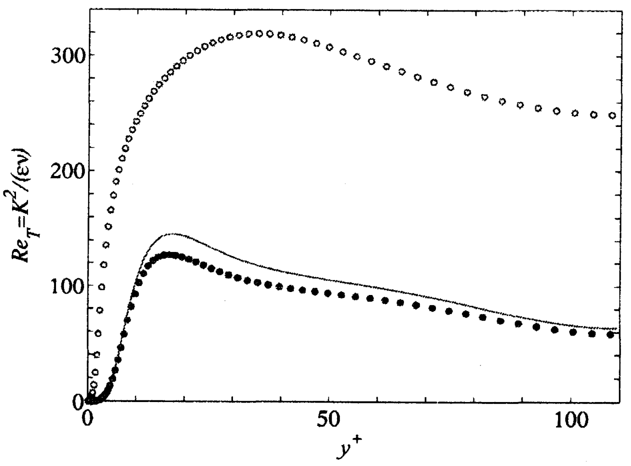

図-7　完全透過/不透過チャネル乱流における乱流レイノルズ数分布．シンボルと実線の意味は図-3と同じ．

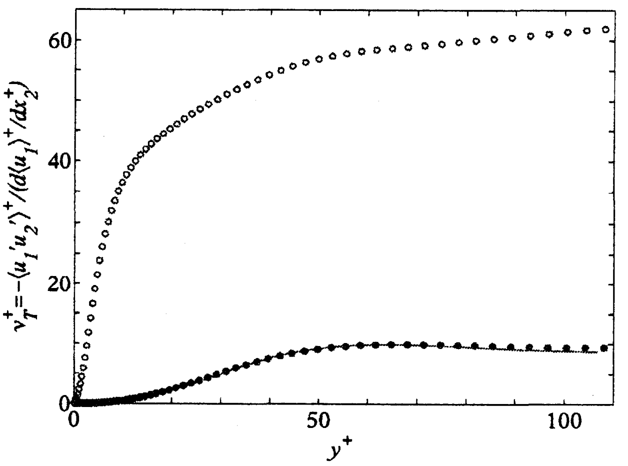

図-8　完全透過/不透過チャネル乱流における渦動粘性係数分布．シンボルと実線の意味は図-3と同じ．

平均値を

$$\bar{\nu}_T \equiv \frac{1}{\delta}\int_{y=0}^{\delta} \nu_T dy$$

で定義すれば，$\bar{\nu}_T^{\rm I}/\nu = 7.07$，$\bar{\nu}_T^{\rm P}/\bar{\nu}_T^{\rm I} = 7.43$（上付きの添え字IおよびPはそれぞれ不透過，完全透過チャネル乱流における値を意味）となり，乱流遷移時の混合性の増加率と，透過性を付加した場合のそれが同程度であることも興味深い．

3.2　瞬時乱流構造

本節では壁の不透過性が瞬時乱流構造に及ぼす影響を抽出することを目指す．図-9にはある瞬間の流体の主流方向の運動に関する高速及び低速領域を，等値面を描画することで可視化した．(a)では$-1 \le x_2/\delta \le 1$（壁から壁）を可視化範囲としているのに対して，(b)では$0 \le x_2/\delta \le 2$（完全透過壁が上下中央に位置）であることに注意されたい．不透過壁の場合には，主流方向に引き伸ばされたいわゆるストリークが存在することはよく知られているが（図-9(a)），壁が透過性を有する場合にはそのような構造は観察されない（図-9(b)）．ストリーク形成の有無を支配する，流れ形態に依らない局所パラメータがいくつか提案されているが，本報の付録Aにてその代表的なものを透過チャネル乱流に適用し，妥当性を検討している．

Jiménez *et al.*[6]は流速の空間二点相関の評価及び流れの横断方向への平均化によって，多孔質境界上流れには横断方向に軸を有するロール状の特徴的な構造が存在することを指摘した．そのような構造が完全透過チャネル乱流にも存在するかどうかを確認するため，図-9の場合と同じリアライゼーションに基づく速度勾配テンソル$\partial u_i/\partial x_j$の第二不変量$Q \equiv -(1/2)(S_{ij}S_{ij} - \Omega_{ij}\Omega_{ij})$の等値面図を図-10に示す．ここで$S_{ij}$は速度勾配テンソルの対称部分である変形速度テンソルを，Ω_{ij}は反対称部分の渦度テンソルを指す．図-10(a)の通常のチャネル乱流の場合には，多数の流れ方向渦が存在することが認められる．(b)の完全透過壁の場合には，境界に非常に近い位置でJiménez *et al.*が指摘するようなスパン方向に引き伸ばされた渦構造が多く存在すること，及びそのうちのいくつかは構造の一部がチャネル内部に向かって突き出ていることが観察される．なお図-11は図-9(b)及び図-10(b)に示された三次元等値面の三面図を表す．

図-12及び図-13には，図-9(b)と同じリアライゼーションに基づく壁透過速度及び壁面せん断応力$\tau_{12} \equiv \mu\partial u_1/\partial x_2$の等値カラー図を示す．吸い込み領域に正のせん断応力が作用するかなり強い傾向が認められる．これは吸い込みによって速度勾配が増すためと考えられ，壁上で一様・定常な吹き出し・吸い込みを伴うチャネル流DNS結果からも指摘されている[4]．

完全透過チャネル内乱流で観察される乱流秩序構造は通常のチャネル内流れのそれらとは質的に大きく異なることが認められた．ただし，この変化が全て透過性の有無のみに起因するとは言い切れない．図-14(a)にその分布を示す無次元せん断パラメータ$S^*_{\rm LKM}$はストリーク形成の有無の判断に供する指標のひとつとして知られているが，この

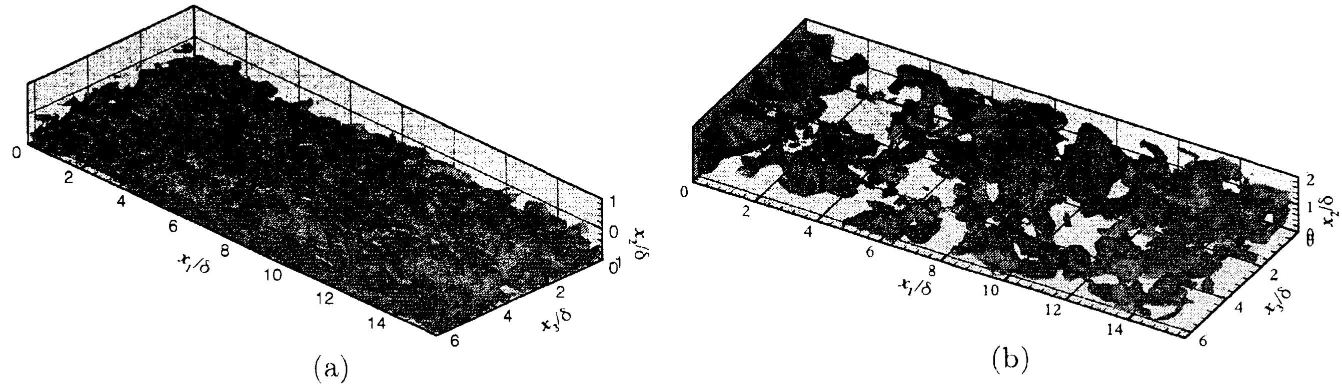

図-9 完全透過/不透過チャネル乱流における主流方向変動流速の等値面図 : (a) 不透過チャネル乱流，(b) 完全透過チャネル乱流．${u'_1}^+ < -1.25$，淡灰色 ; ${u'_1}^+ > 1.25$，濃灰色．見易さのために (a) では計算領域の下半分 ($x_2 \leq 0$) でのみ等値面を描画．(a) では $-1 \leq x_2/\delta \leq 1$ を，(b) では $0 \leq x_2/\delta \leq 2$ が可視化領域で，$x_2/\delta = \pm 1$ が境界位置．

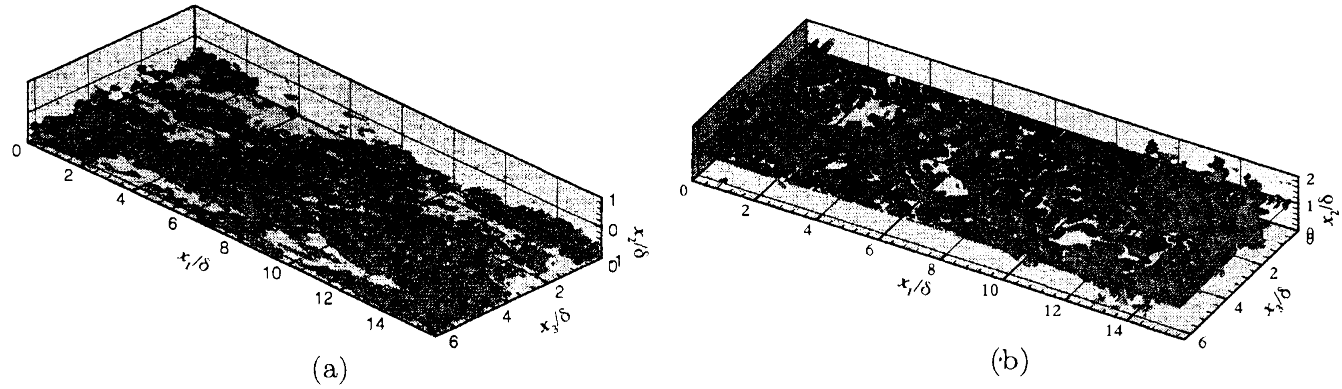

図-10 完全透過/不透過チャネル乱流における速度勾配テンソルの第二不変量 Q の等値面図 : (a) 不透過チャネル乱流，(b) 完全透過チャネル乱流．$Q^+ < -0.005$，淡灰色 ; $Q^+ > 0.005$，濃灰色．見易さのために (a) では計算領域の下半分 ($x_2 \leq 0$) でのみ等値面を描画．(a) では $-1 \leq x_2/\delta \leq 1$ を，(b) では $0 \leq x_2/\delta \leq 2$ が可視化領域で，$x_2/\delta = \pm 1$ が境界位置．

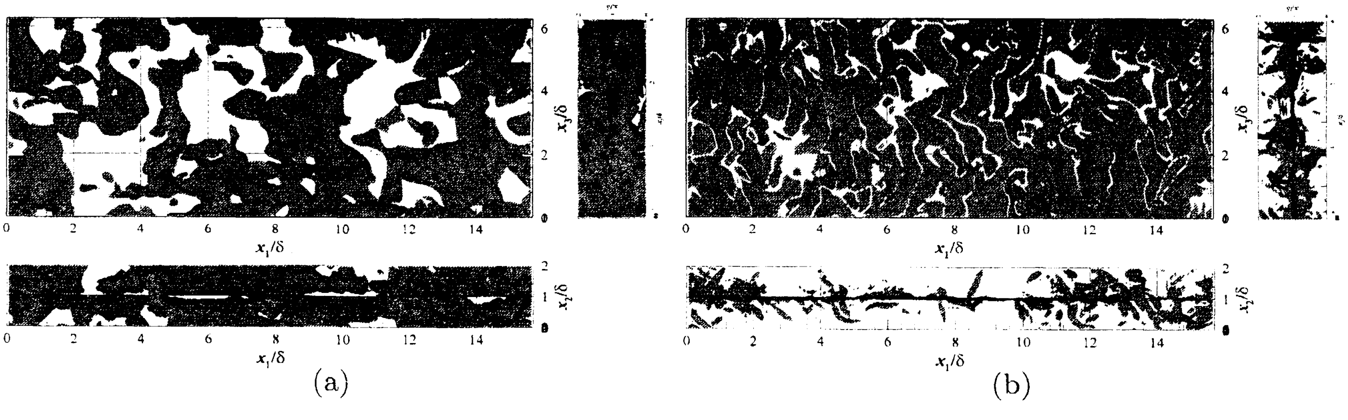

図-11 完全透過チャネル乱流における秩序構造の三面図 : (a) 主流方向変動流速の等値面図（図-9(b) に対応），(b) 速度勾配テンソルの第二不変量の等値面図（図-10(b) に対応）．

指標を信じれば，今回の完全透過チャネル内流れで生じる平均せん断はストリークを形成するにはそもそも不十分である（詳細は付録 **A** を参照）．本研究では流れの駆動力を固定した条件下でチャネル内流れに対する透過性の有無の影響を調べたが，加えて流量固定の条件下でも同様の比較を行うことによってさらに理解が進むことが期待できる．

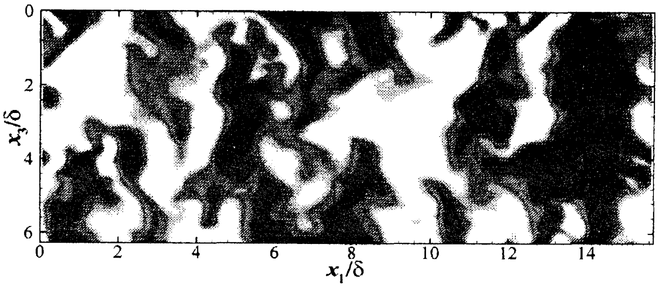

図-12 完全透過壁上での壁法線方向流速 u_2 の等値カラー図：u_2^+ の最小値・最大値はそれぞれ -2.73 及び 2.62 であるが，正負の領域の判別の容易さを重視して，$[-1, 1]$ で黒から白に遷移するように描画．

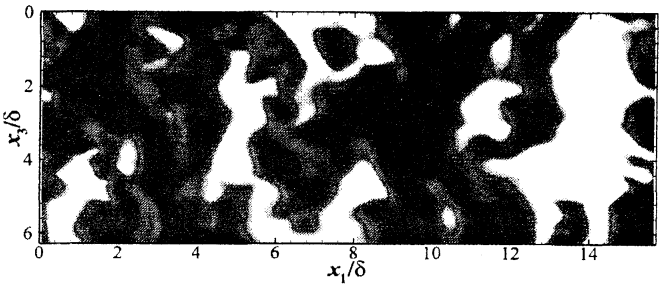

図-13 完全透過壁上でのせん断応力 $\tau_{12} \equiv \mu \partial u_1/\partial x_2$ の等値カラー図：τ_{12}^+ の最小値・最大値はそれぞれ -1.45 及び 7.29 であるが，正負の領域の判別の容易さを重視して，$[-1, 1]$ で黒から白に遷移するように描画．

4 おわりに

最も基本的な壁乱流のひとつであるチャネル乱流において壁の不透過性が果たす役割を解明することを主目的として，固体壁から不透過性を取り除いた完全透過壁を用いた平板間乱流である完全透過チャネル乱流の直接数値シミュレーションを行った．本研究で得られた特に重要な知見は以下の二点に要約される．

- 壁の不透過性は粘性底層の存在を可能とし，その壁付近の準層流層が緩衝材のように壁と乱流の直接的な接触を妨げることで抵抗低減に大きく寄与している．
- 完全透過チャネル乱流では断面全体で運動量輸送が強く促進され，通常のチャネル内流れではもはや乱流状態を維持できないような低バルク・レイノルズ数条件下においても乱れが十分に保たれる．

抵抗と混合性の劇的な変化は工学的に最も重要な層流と乱流の性質の違いであるが，境界に透過性を付加することでチャネル内乱流のそれらが飛躍的に高まる様子は，通常の層流－乱流遷移に加えて言わば「もうひとつの乱流遷移 !?」の存在を想像させるものでとても興味深い．またこの性質は工業装置内での熱伝達や物質混合の促進を図る上で非常に有用である．

チャネル乱流は壁乱流のカノニカルな流れとして現在もなお多くの研究者の関心を集めている．その流れの拘束条件をひとつ緩めた完全透過チャネル乱流もまた，壁乱流の物理の探求や乱流予測法の性能評価において新たなカノニカル流れとはならないだろうか？

謝辞

Blair Perot (UMass Amherst, USA) からは，シミュレーション結果に対して貴重なコメントを受けた．記して謝意を表する．

A 平均せん断パラメータの比較検討

ここではストリーク形成の有無を決める局所無次元パラメータとして，これまでに提案された二つの無次元せん断パラメータを完全透過チャネル乱流に適用し，その妥当性を評価する．

平均せん断を $S \equiv d\langle u_1 \rangle/dx_2$ とすれば，Lee *et al.*[9] は代表速度スケールと長さスケールをそれぞれ q，q^3/ε（ここで $q^2 \equiv 2K$）として，これらを用いて S を無次元化することで得られる $S^*_{\mathrm{LKM}} \equiv Sq^2/\varepsilon = 2SK/\varepsilon$ の値により，一様せん断乱流とチャネル乱流におけるストリーク形成を統一的に判断できることを報告した．

これに対して Lam and Banerjee[10] は，気液界面に対する最も簡単な近似として広く受け入れられている完全すべり面近傍でのストリーク形成基準として上述の S^*_{LKM} は適切でないことを指摘し，q^2 を Reynolds せん断応力の絶対値 $|\langle u_1' u_2' \rangle|$ で置き換えた新たなパラメータ $S^*_{\mathrm{LB}} \equiv S|\langle u_1' u_2' \rangle|/\varepsilon = P_K/\varepsilon$ を提案した．

図-14 に透過チャネル乱流における両者の分布を示す．Lee *et al.* はストリーク形成の有無の判断基準となる閾値の具体的な値には陽に言及していないが，$S^*_{\mathrm{LKM}} \approx 20$ をひとつの目安とみなしてよいと思われる．Lam and Banerjee の場合には彼ら自身が $S^*_{\mathrm{LB}} \approx 1$，すなわち乱れエネルギーの生成

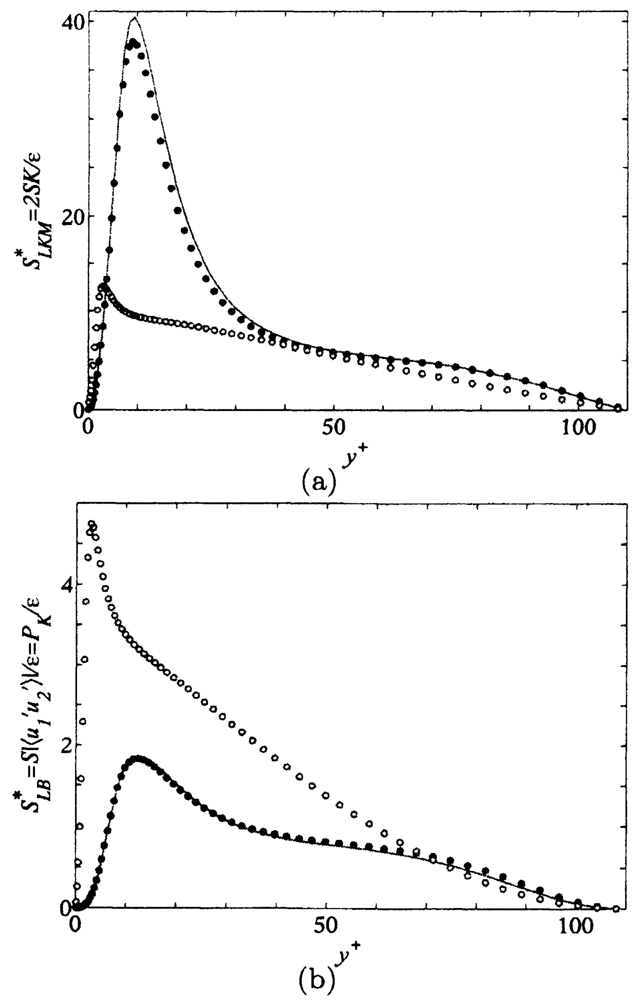

図-14 透過/不透過チャネル乱流における無次元せん断パラメータ分布：(a)Lee *et al.* の提案 [9]，(b)Lam and Banerjee の提案 [10]．シンボルと実線の意味は図-3 と同じ．

が散逸を上回るかどうかでストリーク形成が支配されるという提案を行った．図-9 より完全透過壁上ではストリーク状の構造は観察されないが，この観測事実と整合するのは S^*_{LKM} であり，透過チャネル内のかなり広範な領域でストリークの存在を'予測'する S^*_{LB} は完全透過チャネル乱流には適さないことが明らかになった．

参考文献

[1] D.J. Tritton: *Physical Fluid Dynamics* (2nd ed.). Clarendon Press, Oxford (1988) sec.5.7.

[2] P. Orlandi, S. Leonardi, R. Tuzi & R.A. Antonia: Direct numerical simulation of turbulent channel flow with wall velocity disturbances. *Phys. Fluids* **15**(12) (2003) pp.3587–3601.

[3] O. Flores & J. Jiménez: Effect of wall-boundary disturbances on turbulent channel flows. *J. Fluid Mech.* **566** (2006) pp.357–376.

[4] Y. Sumitani & N. Kasagi: Direct numerical simulation of turbulent transport with uniform wall injection and suction. *AIAA J.* **33**(7) (1995) pp.1220–1228.

[5] M. Quadrio, J.M. Floryan & P. Luchini: Effect of streamwise-periodic wall transpiration on turbulent friction drag. *J. Fluid Mech.* **576** (2007) pp.425–444.

[6] J. Jiménez, M. Uhlmann, A. Pinelli & G. Kawahara: Turbulent shear flow over active and passive porous surfaces. *J. Fluid Mech.* **442** (2001) pp.89–117.

[7] K. Iwamoto, Y. Suzuki & N. Kasagi: Reynolds number effect on wall turbulence: toward effective feedback control. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **23** (2002) pp.678–689.

[8] S.B. Pope: *Turbulent Flows.* Cambridge University Press, Cambridge, UK (2000) sec.11.3.2.

[9] M.J. Lee, J. Kim & P. Moin: Structure of turbulence at high shear rate. *J. Fluid Mech.* **216** (1990) pp.561–583.

[10] K. Lam & S. Banerjee: On the condition of streak formation in a bounded turbulent flow. *Phys. Fluids* A4(2) (1992) pp.306–320.